

# 数学入門公開講座

平成10年8月3日(月)から8月7日(金)まで

京都大学数理解析研究所

## 講師及び内容

### 1. 無理数、超越数 (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・助手 永田 誠

$\sqrt{2}$ は無理数、円周率 $\pi$ は超越数、というのは良く知られています。 $\sqrt{2}$ が無理数であるということはギリシャ時代には既に知られていました。一方 $\pi$ が超越数であるということが証明されたのは約百年前のことです。現在でもある数が超越数(または無理数)であるかどうかを判定することは大変難しい問題です。

本講座では現在この分野でどのようなことが知られているのかということの紹介等を話題に進めていく予定です。

### 2. 微分方程式と発散級数 (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・助教授 竹井 義次

「収束」の概念が確立された現代の解析学においては、収束しない発散級数は、取り扱いの難しい厄介な代物と考えられがちです。しかしその一方で、微分方程式を解く過程でしばしば発散級数が現れます。では、こうした発散級数で表される解には何の意味もないのでしょうか。面白いことに事実は全く逆で、収束する解と比べても遜色ないほど多くの情報を発散級数解は含んでいるのです。この講義では、発散級数を論じる際の基本的な道具である「漸近展開」や「Borel総和法」の解説を行いながら、モノドロミー群といった微分方程式の解の大域的な性質と発散級数解との関わりについて考えてみたいと思います。

### 3. 再帰的構造とアルゴリズム (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・助手 西村 進

自然数の階乗を求める関数 $f$ は

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \times f(n-1) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のように定義できるが、このような定義を、自分自身の定義を使った定義という意味で、再帰的定義という。このような再帰的関数定義は、自然数に限らず、リストや木などの再帰的構造を持つようなデータの処理を、簡潔にかつわかりやすく記述するのに非常に有効である。

本講座では、再帰的プログラミングの入門から始めて、いくつかのアルゴリズム(問題を解く手順)を、再帰的プログラミングの観点から紹介する。

## 時間割

日	8月 3日 (月)	4日 (火)	5日 (水)	6日 (木)	7日 (金)
時間					
10:30~11:45	永田	永田	永田	永田	永田
11:45~13:00	休憩				
13:00~14:15	竹井	竹井	竹井	竹井	竹井
14:15~14:45	休憩				
14:45~16:00	西村	西村	西村	西村	西村

# 微分方程式と発散級数

京都大学数理解析研究所・助教授 竹井義次

1998, AUGUST 3, 4, 5, 6, 7, 13:00 ~ 14:15

# 微分方程式と発散級数

竹井 義次

## 1 発散級数は如何に現われるか

Newton による微積分法の創始（そして同時に運動方程式の定式化）以来，微分方程式は解析学の一つの中心課題であり続けてきた．しかし，「微分方程式を解く」ことは一般に難しい．コンピュータによる数値計算を別にすれば，求めたい未知関数を独立変数やパラメータの（無限）級数に展開してみるという素朴な方法が，解析学がこれほど進歩した現在においても，最も適用範囲の広い方法ではないかと思われる．ところが，こうした級数展開を利用して微分方程式の解を求めてみると，しばしば発散級数が現われる．次の3つの簡単な例を見てみよう．

**例 1.1**  $u' + u = x$ .

未知関数  $u(x)$  を  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  と  $x$  のべき級数に展開する．  $u' = \sum_{n=0}^{\infty} n u_n x^{n-1}$  を用いて各  $x^n$  の係数を比較すれば，

$$u_1 + u_0 = 0, \quad 2u_2 + u_1 = 1, \quad (n+1)u_{n+1} + u_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

この漸化式を解くと，  $c$  を定数として

$$u_0 = -1 + c, \quad u_1 = 1 - c, \quad u_n = c \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n \geq 2).$$

従って，次の一般解が得られた．

$$u = -1 + x + c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = -1 + x + ce^{-x}.$$

**例 1.2**  $xu' + u = x$ .

例 1.1 と同様に，  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  とすれば，

$$u_0 = 0, \quad 2u_1 = 1, \quad (n+1)u_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

これより，すぐにわかるように，  $u_1 = 1/2$  を除いて他の  $u_n = 0$ ．従って，今度は  $u = x/2$  という解が得られた．

**例 1.3**  $x^2 u' + u = x$ .

例 1.1, 例 1.2 と同様に,  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  とすれば,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad (n-1)u_{n-1} + u_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

これを解くと,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (n \geq 2).$$

従って,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1}.$$

例 1.1, 例 1.2 とは異なり, この場合は発散級数解が現われる.

比較すれば容易にわかるように, この3つの例の違いは  $u'$  の係数にある. 特に例 1.2 や例 1.3 では,  $x=0$  で消える関数が  $u'$  の係数だったことに注意してほしい. 一般に, 未知関数の最高階の微分の前にかかっている係数が0になる点を, 微分方程式の特異点と呼ぶ. 例えば, 次のような  $n$  階の常微分方程式 (但し, 未知関数  $u$  の  $n$  階微分  $u^{(n)}$  の係数で割った形で考える)

$$u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \dots + p_n(x)u = f(x)$$

の場合, いずれかの係数  $p_j(x)$  が  $\infty$  となる (つまり特異性をもつ) 点が特異点である. こうした特異点のうちで

$$p_j(x) \text{ の特異点 (極) の次数が } j \text{ 以下}$$

がすべての  $j$  について成り立つような特異点を確定特異点 (regular singular point), 上記の性質が満たされない  $j$  が存在する特異点を不確定特異点 (irregular singular point) と呼んでいる. 従って, 例 1.2 では  $x=0$  は確定特異点であり, それに対して例 1.3 では  $x=0$  は不確定特異点である. 例 1.3 で見たように, ベキ級数展開を用いて常微分方程式の解を求めようとする時, 不確定特異点ではしばしば発散級数が現われる (次節も参照).

次に, パラメータに関する級数展開について考えよう. 量子力学で基本的な Schrödinger 方程式を取り上げる.

**例 1.4**  $-h^2 u'' + Q(x)u = 0$ .

但し  $h$  は非常に小さいパラメータとする (量子力学における Planck 定数にあたる). 次のような  $h$  に関する展開をもつ解 (WKB 解と呼ばれる) を考えよう.

$$u = \exp\left(\frac{1}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{Q(y)} dy\right) \{a_0(x) + a_1(x)h + a_2(x)h^2 + \dots\}.$$



この展開を微分方程式に代入すれば, 次の  $\{a_n(x)\}$  についての (微分) 漸化式が得られる.

$$\begin{cases} 4Q(x)a_0' + Q'(x)a_0 = 0, \\ 4Q(x)a_n' + Q'(x)a_n = -2\sqrt{Q(x)}a_{n-1}'' \quad (n \geq 1). \end{cases}$$

従って, この  $\{a_n(x)\}$  についての 1 階微分方程式を逐次解いていくことにより, 上記のような  $h$  に関する展開をもつ解が得られる. 例えば  $Q(x) = 1$  ならば, すべての  $a_n$  が定数となり, 得られる解は指数関数  $u = e^{x/h} \times (\text{定数})$  である. また  $Q(x) = x$  の場合は, 帰納法により  $a_n(x) = c_n x^{-1/4-3n/2}$  ( $c_n$  は定数) という形の解が存在することが証明できる. ここで,  $\{c_n\}$  は

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{(6n-1)(6n-5)}{48n} c_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

という漸化式により定まる数列である. この漸化式からわかるように, こうして得られる WKB 解も一般には収束しない.

例 1.4 の方程式では, 今度は  $u''$  の前にパラメータ  $h^2$  がかかっていた. この  $h$  が小さいために, この微分方程式もある種の特異性をもつ. ( $h = 0$  だと微分方程式でなくなる!) この類の特異性は特異摂動 (singular perturbation) と呼ばれるが, 小さなパラメータを含んだ特異摂動の方程式に対してそのパラメータに関する展開をもった解を考えると, やはり一般に発散級数が現われる.

いわゆる  $\epsilon$ - $\delta$  論法により「収束」の概念が確立された現代の解析学においては, 発散級数は, それ自体は意味をもたないような非常に扱いにくい代物だと考えられがちである. では, これらの例で現われた微分方程式の発散級数解にも, まったく意味がないのだろうか? 実は, 収束する解と比べても遜色ないほど多くの情報を発散級数解は含んでいる. 一体どのような情報を発散級数解が持っているのか, そして, そうした情報を発散級数解から引き出すにはどのようにすれば良いのか, .... こうした問題を考えていこうというのがこの講義の目標である.

**注意** 例 1.4 の WKB 解はこの講義で中心的な役割を果たすので, その重要性を考慮して, より便利な WKB 解の他の求め方をここで説明しておこう. 例 1.4 の微分方程式

$$-h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + Q(x)u = 0 \quad (1)$$

において, 未知関数  $u$  を次の形におく.

$$u(x) = \exp \int_{x_0}^x S(y) dy. \quad (2)$$

( $x_0$  は定点.) すると  $S$  は次の Riccati 方程式を満たさねばならない.

$$S^2 + \frac{dS}{dx} = h^{-2} Q(x). \quad (3)$$

ここで  $S$  が  $S = h^{-1}S_{-1}(x) + S_0(x) + hS_1(x) + \dots$  という形の展開をもつと仮定すれば, 次の  $\{S_n(x)\}$  に関する漸化式が得られる.

$$\begin{cases} S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}, \\ S_n(x) = -\frac{1}{2S_{-1}(x)} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} S_j(x)S_{n-1-j}(x) + S'_{n-1}(x) \right\} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

この漸化式は, 微分方程式を逐次に解く必要もなく, 容易に解ける. 特に,  $S_{-1}(x)$  を決める際の  $\sqrt{Q(x)}$  の分枝のとり方に応じて, 2つの解  $S^\pm(x)$  が得られることに注意. こうして定まる  $S^\pm(x)$  を (2) に代入すれば, 微分方程式 (1) の WKB 解  $u^\pm(x)$  を得る.

## 2 複素領域での線形常微分方程式について

複素関数論でべき級数展開が重要な道具であることから容易に想像されるように, 前節で述べた級数展開による微分方程式の解法は, 本来複素領域での解を論じるのに適した方法である. そこで, 発散級数解が果たす役割をより良く理解するために, まず複素領域での線形常微分方程式に関する基本的な事柄をここで復習しておこう. (詳しくは, 例えば [3] を参照.)

以下, 話を簡単にするために, 方程式は2階であって次の形をしているものとする.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u = 0. \quad (4)$$

複素領域で (4) を論じる際, 議論の出発点となるのは, 係数の  $q(x)$  が正則な点で初期条件を与えたとき, その初期条件を満たす正則な解が一意的に存在することを保証するいわゆる Cauchy の定理である. もう少し正確に述べよう. 今, 考えている点は  $x=0$  であるとし, そこで  $q(x)$  は正則と仮定する. このとき, 勝手に与えた2つの複素数  $a, b$  に対して, 初期条件  $u(0) = a, u'(0) = b$  を満たす方程式 (4) の正則な解が ( $x=0$  の近傍で) 一意的に存在する. 実際,  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  および  $q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$  とべき級数に展開し, (4) に代入した上で  $x^n$  の係数を比較すれば,

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} = \sum_{j=0}^n q_j u_{n-j} \quad (n \geq 0).$$

初期条件から  $u_0 = a, u_1 = b$  なので, この漸化式により  $\{u_n\}$  は完全に決定され, 更にいわゆる優級数の方法を用いれば, こうして定まる  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$  が収束することも証明できる. この Cauchy の定理により, 係数  $q(x)$  が正則である限り, 微分方程式 (4) の解は正則関数としてどこまでも解析接続できることが結論される.

では,  $q(x)$  の特異点ではどうだろうか? はじめに確定特異点の場合を考えよう. 正則点とは異なり, 確定特異点では初期条件を与えて解を求めることは残念ながらできない. けれ

ども, 前節で述べた確定特異点の定義から,  $x = 0$  が (4) の確定特異点であるとする,  $x^2q(x)$  はそのまわりで  $x^2q(x) = q_0 + q_1x + \dots$  という展開をもつはずである. この展開の第1項の係数  $q_0$  を用いて  $f(\rho) = \rho(\rho - 1) - q_0$  と定め,  $f(\rho) = 0$  の2つの根を  $\rho_1, \rho_2$  とおこう. ( $\rho_j$  は特性指数 (characteristic exponent) と呼ばれる.) すると,  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の差が整数でないという仮定の下で, 次のような2つの解が ( $x = 0$  の近傍において) 存在する.

$$\begin{cases} u^{(1)}(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(1)} x^n, \\ u^{(2)}(x) = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(2)} x^n. \end{cases}$$

こうした形の解の存在は, やはりべき級数展開の方法で示すことができる. すなわち,  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\rho_1+n}$  と上述の  $x^2q(x)$  の展開を微分方程式に代入すれば, 今度は次の形の漸化式が得られる.

$$f(\rho_1 + n)u_n = \sum_{j=1}^n q_j u_{n-j} \quad (n \geq 0).$$

特に  $n = 0$  の時は  $0 \cdot u_0 = 0$  という式となり,  $u_0$  には何の条件もつかない. そこで  $u_0$  の値を勝手に一つ与えると,  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の差が整数でないという仮定から, 残りの  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  は上の漸化式より一意に定まるのである. しかも, 正則点の時と同様に, この場合もこれらの解  $u^{(i)}(x)$  は収束する. つまり, 確定特異点においても ( $x^{\rho_i}$  というべき関数程度の特異性は別にして) 微分方程式の解は収束級数を用いて表される. 従って, (4) が複素平面 (より正確には Riemann 球面) 全体でただか確定特異点しか持たないいわゆる Fuchs 型方程式の場合には, 各点の近傍で解は収束級数により表されるので, その性質も局所的には良くわかったものと考えてよい.

**注意** 微分方程式 (4) が Fuchs 型である時,  $q(x)$  は次の形の (有理) 関数である.

$$q(x) = \frac{F(x)}{(x - b_0)^2 \dots (x - b_g)^2}. \quad (5)$$

但し  $g$  は 0 以上の整数で  $b_0, \dots, b_g$  は相異なる複素数. また  $F(x)$  は  $2g$  次以下の多項式である.

ところが, 不確定特異点においては状況は一変する. 不確定特異点ではもはや, 微分方程式の解を収束級数で表すことはできないのである. 実際, (慣例にしたがって)  $x = \infty$  が (4) の不確定特異点であったとしよう. 不確定特異点の定義から ( $x = 1/y$  という変数変換が必要な点に注意),  $x = \infty$  において  $q(x)$  は  $q(x) = x^\mu(q_0 + q_1x^{-1} + q_2x^{-2} + \dots)$  という展開をもつ. 但し  $\mu$  は  $-1$  以上の整数である. この時, 正則点や確定特異点の場合のような (ただかべき関数を含むような) 単純な級数展開では, 不確定特異点における解は構



成できない. 次のように, 指数関数の部分をもった ( $x^{1/2}$  の) 級数を考えねばならない.

$$u = e^{R(x)} x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} u_{n/2} x^{-n/2}.$$

ここで  $R(x)$  は, 定数項を含まない  $x^{1/2}$  の  $(\mu+2)$  次の多項式である. この形の解ならば, 前節の注意で述べた WKB 解の構成法を少し修正すれば, それほどの困難もなく構成できる. 具体的には,  $u = \exp(\int^x S(y)dy)$  とおけば  $S$  が Riccati の方程式

$$S^2 + \frac{dS}{dx} = q(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n}$$

をみたすので,  $S = x^{\mu/2} \sum_{n=0}^{\infty} S_{n/2} x^{-n/2}$  と展開した上でこの方程式から  $S_{n/2}$  を帰納的に求め, その結果を  $u = \exp(\int^x S(y)dy)$  に代入すれば良い. こうして, 指数関数まで許せば, 不確定特異点においても級数解は構成できる. しかし, この解の無限級数の部分は一般には収束しない. 例えば  $q(x) = x$  の時,  $x = \infty$  は確かに不確定特異点であり, そこでの級数解は, 例 1.4 で構成した ( $Q(x) = x$  の場合の) WKB 解で  $h=1$  とおいたものに他ならない (構成の仕方は少し異なるけれども). 例 1.4 でも注意したように, この解は発散級数解である. また, 方程式の形は (従って解の形も) かなり違うが, 例 1.3 でも不確定特異点  $x=0$  において級数解を求めると発散級数が現われたのだった.

この節で考察したことを一言でまとめれば, 「級数展開の方法により, 正則点や確定特異点においては収束する級数解が得られるのに対し, 不確定特異点においては必然的に発散級数解が現われる」. では, こうして得られる解が発散してしまうから, この方法で不確定特異点を調べることは無理なのだろうか? 実は, こうした発散級数解から真の解を求める方法が存在する. しかも, 級数解が発散するという現象は, 不確定特異点の本質的な性質と密接に関わっているのである. 更にまた, たかだか確定特異点しか含まない Fuchs 型方程式についても, 各点の近くでの局所的な性質はわかっても, そうした局所解がどのようにつながっているのかという大域的な性質については収束級数解では何もわからなかった.ところが, Fuchs 型方程式に対して例 1.4 で論じた WKB 解と呼ばれる発散級数解を考えると, この発散級数解が方程式の大域的な性質に関する情報を含んでいることがわかるのである. 次節からこういった発散級数解のもつ意味について考えていくことにしよう.

### 3 発散級数を如何に扱うか — 漸近展開と Borel 総和法

発散級数を数学的に扱うための標準的な道具が, Poincaré により導入された漸近展開 (asymptotic expansion) の考え方である. 彼は, 意味づけの難しい発散級数そのものではなく, それを次の意味で近似する関数が存在すれば良いと考えた. すなわち, (必ずしも収束するとは限らない) 級数  $\sum f_n z^n$  と  $z$  が動く範囲 (当然  $z=0$  の近く) が与えられた時, 次の条件を満たす関数  $f(z)$  が見つかったとせよ.

$z$  が問題の範囲を動く時に,

$$\left| f(z) - \sum_{n \leq N} f_n z^n \right| \leq C_N |z|^{N+1} \quad (6)$$

が任意の  $N$  に対して成り立つ (ここで  $C_N$  は  $z$  にはよらない定数) .

この時,  $f(z)$  は漸近展開の意味で  $\sum f_n z^n$  を近似する (あるいは,  $\sum f_n z^n$  を漸近展開にもつ) と言い,  $f(z)$  を  $\sum f_n z^n$  の代用物と考えるのである.

**例 3.1** 級数  $\sum f_n z^n$  が収束する場合, その収束級数が定める正則関数を  $f(z)$  とし, また  $z$  の動く範囲として  $z=0$  の十分小さな近傍をとれば, (6) が成り立つ.

**例 3.2** 級数として, すべての  $f_n$  が 0 であるものを考える. 明らかに  $f(z) \equiv 0$  は  $\sum 0 \cdot z^n$  を漸近展開にもつが, 一方,  $e^{-1/z}$  も  $z > 0$  において漸近展開の意味で  $\sum 0 \cdot z^n$  を近似する.

漸近展開の意味を理解するのは, 決してやさしくない. 例えば, 勝手に与えられた級数  $\sum f_n z^n$  に対して, それを漸近展開の意味で近似する関数  $f(z)$  が存在することが知られているが,  $n$  に応じてどんなに速く大きくなる  $f_n$  に対してもそれを「近似する」関数が存在するというのは正直言って奇異な印象すら受ける. (秘密は, 上の不等式で  $C_N$  がいくら大きいても良い, つまりここでは実質的には  $z \rightarrow 0$  の時の挙動しか問題にしていないという点にあるのだが. . .) しかも, 上の例 3.2 で見たように, 与えられた級数に対してそれを近似する関数の方は一意には決まらず, かなりの任意性がある. これは, 最初の級数がある微分方程式を満たしていても, その級数を漸近展開にもつ関数は一般には同じ微分方程式を満たすとは限らないことを意味する. 微分方程式との関連で発散級数を考えようとする立場から見れば, これは甚だ都合が悪い.

微分方程式との相性から言って便利なのは, 次の **Borel 総和法** (Borel resummation) である. 今, 指数関数部分を含んだ級数  $f = e^{\zeta_0/z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n+\alpha}$  ( $\alpha$  は負の整数以外の実数) が与えられたとする. この級数  $f$  に対して, まずその Borel 変換を

$$f_B(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(n+\alpha)} (\zeta + \zeta_0)^{n+\alpha-1} \quad (7)$$

と定義する. (ここで  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$  はガンマ関数. 特に  $n$  が自然数ならば  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .) 更に, この Borel 変換を用いて定義される Laplace 積分

$$\int_{-\zeta_0}^{\infty} e^{-\zeta/z} f_B(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

(但し積分は複素積分であり, 積分路は例えば正の実軸に平行にとるものとする) を,  $f$  の Borel 和と呼ぶことにしよう. 与えられた (発散) 級数の代用物として, その Borel 和

(もちろん意味をもつ時に限ってではあるが)を採用しようと言うのが Borel 総和法である. 実際, Borel 和が(適当な意味で)存在する場合には, それは漸近展開の意味で元の級数を近似することが証明できる. つまり, Borel 総和法とは, 発散級数からそれを漸近展開にもつ関数を構成する一つの方法である.

例で見てみよう. 例 1.3 の発散級数を取り上げる.

**例 3.3** 例 1.3 の発散級数解  $u = \sum (-1)^n n! x^{n+1}$  の Borel 変換は ( $\zeta_0 = 0, \alpha = 1$  とし  
て)

$$u_B(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(n+1)} \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n = \frac{1}{1+\zeta}. \quad (9)$$

従って, Borel 和は次で与えられる.

$$\int_0^{\infty} e^{-\zeta/x} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta. \quad (10)$$

この積分は  $x > 0$  の時 (あるいはより一般に,  $\operatorname{Re} x > 0$  をみたす複素数  $x$  に対して) 確かに収束する. また,  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$  により

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-\zeta/x} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta - \sum_{n \leq N-1} (-1)^n n! x^{n+1} \right| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{1+tx} x dt - \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1 - (-tx)^N}{1+tx} x dt \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-t} t^N x^{N+1} dt = N! x^{N+1}. \end{aligned}$$

が成立するので, その漸近展開は  $u$  に一致している. 更に

$$\left( x^2 \frac{d}{dx} + 1 \right) \int_0^{\infty} e^{-\zeta/x} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} (\zeta + 1) e^{-\zeta/x} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^{\infty} e^{-\zeta/x} d\zeta = x.$$

すなわち, Borel 和 (10) は確かに微分方程式  $x^2 u' + u = x$  を満足する.

Borel 総和法は, まるで手品のように, 発散級数解から微分方程式の真の解を導き出してくれる. こうして, 不確定特異点においても, 発散級数解に対して Borel 総和法を適用することにより, 微分方程式の真の解が得られるのである. ここで, 上記の例 3.3 で, Borel 変換 (9) が  $\zeta = -1$  に特異点を持っていた事実に注意してほしい. 一般に, 収束級数の Borel 変換を考えると, それは複素平面全体で正則となる. つまり, こうした Borel 変換の特異点は, 元の級数が発散級数であったことの反映として現われる. しかも, この Borel 変換のもつ特異点は, 以下の注意で見ると, 不確定特異点におけるいわゆる Stokes 現象 (Stokes phenomenon) と密接に関連している.

**注意** 例 3.3 の場合, 発散級数解の Borel 和 (10) は微分方程式  $x^2 u' + u = x$  の真の解だった訳だが, それはあくまでも  $x > 0$  の近傍 (あるいは最大限に広げても右半平面  $\operatorname{Re} x > 0$ ) における解を与えたに過ぎない. より広い領域 (例えば  $\arg x = \theta$  の近傍)

での解を得るためには, Borel 和 (10) の積分路を  $[0, \infty)$  から  $[0, e^{-i\theta}\infty)$  に回転する必要が生じる. ところが, Borel 変換が  $\zeta = -1$  に特異点を持っているので, 積分路はたかだか  $|\theta| < \pi$  までしか回すことができない. 強引に  $\theta = -\pi$  を越えて積分路を回そうとすると, Borel 和は  $\zeta = -1$  の回りの周回積分  $-\oint e^{-\zeta/x} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = -2\pi i e^{1/x}$  を「拾い込む」ことになる (次節の WKB 解の Borel 和に対する説明も参照). この新たに拾い込んだ関数  $-2\pi i e^{1/x}$  は,  $\arg x = -\theta = \pi$  では指数的に小さいが, 更に  $\arg x$  を大きくして  $\arg x > 3\pi/2$  となると遂には指数的に大きな項となり, 対応する解の漸近展開の形が完全に変わってしまうことになる. 不確定特異点のまわりでの解の漸近展開式が方向によって異なるこのような現象は Stokes 現象と呼ばれる. 発散級数解の Borel 変換のもつ特異点は, まさしく Stokes 現象を引き起こす帳本人なのである. (この例 3.3 については, [4] に詳しい解説がある.)

Borel 総和法の最大の特徴は, 発散級数という解析的に扱いにくい対象を, Borel 変換により普通の (正則) 関数に変換する点にあると言えるだろう. そして, 例えば不確定特異点における発散級数解は, Borel 変換の特異点という形で Stokes 現象に関する情報までも内包していた訳である. 不確定特異点における発散級数解については, 実質的には例 3.3 を論じただけであるが, これ以上深入りすることはしない. このテーマに関する研究は数多い. 興味のある方は例えば [5] を参照されたい.

## 4 WKB 解の Borel 和について

前節では, 不確定特異点における発散級数解がもつ解析的な意味について, Borel 総和法の立場から考察した. しかし, より興味深いのは, 例 1.4 で扱った WKB 解という発散級数解の背後には, 微分方程式の大域的な情報が隠されているということである. それを論じるための準備として, この節では WKB 解の Borel 和について考察しよう.

以下, 例 1.4 で  $Q(x) = x$  の場合を考える. まず WKB 解は

$$u = e^{\zeta_0/h} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-1/4-3n/2} h^n$$

(但し  $\zeta_0 = 2x^{3/2}/3$ ) という形をしていたことを思い出そう. 便宜上  $xh^{1/2}u$  を  $v$  で表すことにし,  $v$  の Borel 和を計算する. 定義から  $v$  の Borel 変換 (当然  $h$  に関して行う) は次式で与えられる.

$$v_B(x, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{3/4-3n/2}}{\Gamma(n+1/2)} (\zeta + \zeta_0)^{n-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma(n+1/2)} \left( \frac{\zeta}{x^{3/2}} + \frac{2}{3} \right)^{n-1/2}$$

(この場合,  $x$  はパラメータであることに注意.) 従って,  $t = \zeta/x^{3/2}$  とおくと,  $v_B$  は  $v_B(x, \zeta) = w(t)$  というように  $t$  のみの関数である. ここで, 例 1.4 で求めた  $\{c_n\}$  に関する

漸化式を使えば, (もしくは,  $v_B$  が  $t$  のみの関数であってしかも  $(\partial^2/\partial x^2 - x\partial^2/\partial y^2)v_B = 0$  という偏微分方程式を満たすことを用いれば, )  $w(t)$  が次の微分方程式を満たすことが確かめられる.

$$\left(1 - \frac{9}{4}t^2\right) \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{27}{4}t \frac{dw}{dt} - 2w = 0.$$

更に  $s = 3t/4 + 1/2$  と変数変換すれば,

$$s(1-s) \frac{d^2w}{ds^2} + \left(\frac{3}{2} - 3s\right) \frac{dw}{ds} - \frac{8}{9}w = 0.$$

これは Gauss の超幾何微分方程式

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \quad (11)$$

でパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  をそれぞれ  $5/6, 1/6, 1/2$  とおいたものに他ならない. 超幾何微分方程式の解として定義される超幾何関数  $F(\alpha, \beta, \gamma; s)$  は, 積分表示式を初めとして非常に性質の良く分かった関数である ([6] 参照). 上で述べたことから,  $w(s)$  はこの超幾何関数を用いて次のように表される.

$$w(s) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} s^{-1/2} F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}; s\right).$$

結局, 問題の WKB 解の Borel 和は, この  $w$  により次式で与えられることがわかった.

$$\frac{1}{xh^{1/2}} \int_{-\zeta_0}^{\infty} e^{-\zeta/h} w(s) \Big|_{s=3\zeta/(4x^{3/2})+1/2} d\zeta. \quad (12)$$

さて,  $w$  は超幾何微分方程式の解だから,  $s = 0$  と  $1$ , つまり  $\zeta = \pm\zeta_0$  に特異点を持っている. このうち  $\zeta_0$  が, 例 3.3 の発散級数の場合の  $\zeta = -1$  に相当する, WKB 解が発散級数であったことの反映として現われる特異点である. (もう一方の  $-\zeta_0$  は Borel 変換を定義する際の基準点). 前節での議論と同様, WKB 解の Borel 和を考える際にもこの特異点が本質的な役割を演じる. 今の場合, これらの特異点が (本来の独立変数である)  $x$  と共に動くという事実が特に重要である. 例えば,  $\zeta_0 = 2x^{3/2}/3$  であったから,  $x = 0$  では 2 つの特異点  $\pm\zeta_0$  はぶつかって 1 点につぶれるし, また  $\text{Im } x^{3/2} = 0$  においてはそれらの虚部が等しくなる. 「Borel 和を与える Laplace 積分 (8) の積分路は正の実軸に平行にとる」という規約を思い出せば,  $x$  がこうした特別な値を取る時に WKB 解の Borel 和に何らかの不具合が生じるであろうことは想像に難くない. 実際 WKB 解の Borel 和は,  $x$ -平面からこうした例外集合 (図 1 の左図参照.  $x = 0$  は変わり点,  $x = 0$  から出る 3 本の直線は Stokes 曲線と呼ばれる) を除いた領域でのみ意味をもつのである.

では, Stokes 曲線を横切って隣の領域へと移った時, WKB 解の Borel 和は一体どうなるのだろうか? 例えば図 1 のように  $x$ -平面で正の実軸を下から上へと横切ったとしよう. この時  $\zeta$ -平面では, WKB 解の発散の現われであった特異点  $\zeta_0$  が Borel 和の積分路を

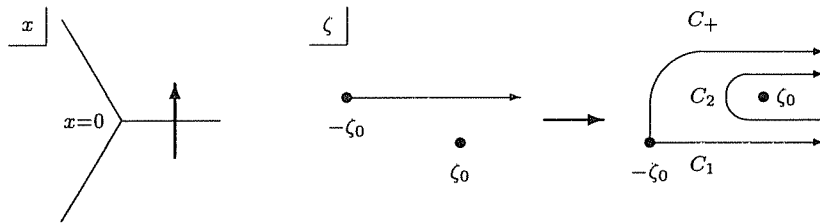


図 1: Stokes 曲線を横切った時の Borel 和の積分路の変化

横切るという現象が観察される。そして、領域  $\text{Im } x < 0$  において (12) により定義されていた WKB 解の Borel 和は、( $x$  の関数として見れば)  $\text{Im } x > 0$  では図の  $C_+$  という路に沿う積分に解析接続されることがわかる。正則関数の積分は積分路によらないという有名な Cauchy の積分定理によれば、 $C_+$  に沿う積分は  $C_1$  及び  $C_2$  に沿う 2 つの積分の和に等しい。このうち  $C_1$  に沿う積分は、定義から  $\text{Im } x > 0$  における WKB 解の Borel 和に他ならず、一方  $C_2$  に沿う積分の方は、もう一つの WKB 解 — 例 1.4 で指数部分に現れる  $\sqrt{Q(x)}$  の分枝を取り替えて (つまり  $(-1)$  倍して) 得られる同様な形をした発散級数解 (第 1 節の注意も参照) — の Borel 和の  $i (= \sqrt{-1})$  倍に等しいことが超幾何関数の性質から証明できる。すなわち、Stokes 曲線を横切ると、WKB 解の Borel 和は 2 つの WKB 解の Borel 和の一次結合に置き換わるのである。

以上  $Q(x) = x$  の場合に WKB 解の Borel 和の性質を調べてきたが、一般の有理関数  $Q(x)$  に対しても状況は同様である。一般の場合については (証明する余裕はないので) 結果のみ述べることにしよう。以下、第 1 節の注意で導入した記号を用いる。微分方程式 (1) に対して、 $Q(x)$  の零点を変わり点 (turning point) と呼び、また各変わり点  $a$  から出る  $\text{Im} \int_a^x \sqrt{Q(y)} dy = 0$  で定義される曲線を **Stokes 曲線** (Stokes curve) と呼ぶ。なお、変わり点はすべて  $Q(x)$  の単純零点であると仮定する。この時、(1) の WKB 解  $u^\pm$  の Borel 和は、複素平面から変わり点と Stokes 曲線を除いた各小領域においてのみ意味をもつ。更に、変わり点  $a$  から出る Stokes 曲線を横切る時には、((2) で  $x_0 = a$  と取って  $u^\pm$  を規格化しておけば) 次の 2 つの関係式のいずれかが成立する。

$$\begin{cases} u^+ \longrightarrow u^+ \\ u^- \longrightarrow u^- \pm iu^+ \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} u^+ \longrightarrow u^+ \pm iu^- \\ u^- \longrightarrow u^- \end{cases} \quad (13)$$

(WKB 解  $u^\pm$  の Borel 和を同じ  $u^\pm$  という記号で表している。また矢印は、Stokes 曲線を越えての解析接続を表す。) この種の関係式は、WKB 解に対する接続公式 (connection formula) と呼ばれている。

WKB 解の Borel 和がもつこの顕著な性質を最初に明確に認識したのはおそらく Voros [7] であろう。標語的に言えば、変わり点と Stokes 曲線から成る幾何学が WKB 解という



発散級数解を統制しており, そして次節で見るように, この性質が微分方程式 (1) の大域的な解析を可能にするのである.

## 5 発散級数は如何に有効か — WKB 解を用いたモノドロミー群の計算

この節では, WKB 解に対する接続公式 (13) を利用して, 実際に Fuchs 型方程式の大域的な解析を行う. そのために, まず, Fuchs 型方程式の解の大域的な挙動を記述するモノドロミー群 (monodromy group) について, 簡単に説明しておこう.

扱う方程式は (4) である. 但し, ここでは Fuchs 型に話を限るので  $q(x)$  は (5) の形をしているものとし, また簡単のため  $F(x)$  の次数はちょうど  $2g$  であると仮定する. この時, 方程式 (4) は  $x = b_0, \dots, b_g$  および  $\infty$  (これを  $b_{g+1}$  で表す) に確定特異点をもっている. この確定特異点の集合を  $\Sigma$  で表し, 更に領域  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$  内に基準点  $x_0$  を定め,  $x_0$  における (4) の一次独立な解の組  $(u_1, u_2)$  を一つ取って固定しよう. 今,  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$  内の  $x_0$  を起点とする閉曲線  $C$  を勝手に一つ与えると, 第2節で述べたことから  $(u_1, u_2)$  をこの  $C$  に沿って解析接続していくことができる. しかし, 再び起点の  $x_0$  に戻ってきた時, 問題の正則関数の組はやはり方程式 (4) を満たしてはいるが, もはや元の解  $(u_1, u_2)$  と同じであることは期待できず, 一般にはその一次結合になる. つまり, 適当な  $2 \times 2$  行列  $A_C$  があって,  $(u_1, u_2)A_C$  という形になる. こうして,

$$\{P^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma \text{ 内の閉曲線}\} \ni C \mapsto A_C$$

という対応 (写像) が得られた. (実際には,  $A_C$  は  $C$  のホモトピー類のみにより, この対応は  $P^1(\mathbb{C}) \setminus \Sigma$  内の閉曲線のホモトピー類の全体, いわゆる基本群から,  $2 \times 2$  行列のなす群への写像となる. しかもこの写像は, 群としての準同型である.) この対応を方程式 (4) のモノドロミー表現, そしてこの対応による像をモノドロミー群 (上で述べたことから, それは  $2 \times 2$  行列の部分群である) と呼んでいる.

**例 5.1** 次の方程式を考える.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{c}{x^2}u = 0.$$

( $c$  は定数.) つまり (5) で  $g = 0, b_0 = 0$  の場合である. この方程式の確定特異点は  $0$  と  $\infty$ . この場合は解をべき関数で具体的に表すことができる. すなわち,  $\rho_1, \rho_2$  を二次方程式  $\rho(\rho-1) - c = 0$  の2根とすると, 解は  $x^{\rho_1}$  と  $x^{\rho_2}$  である. 従って, 例えば  $C$  を原点中心の単位円とすると,  $C$  に対応するモノドロミー行列  $A_C$  は  $\begin{pmatrix} \exp(2\pi i \rho_1) & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i \rho_2) \end{pmatrix}$  である.

**例 5.2** 次に (5) で  $g = 1$  の場合を考える. この時, 1 次分数変換を考えることにより,  $b_0 = 0, b_1 = 1$  としても一般性は失われない. すなわち

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{F(x)}{x^2(x-1)^2}u = 0.$$

( $F(x)$  は 2 次の多項式) を考えれば良い. 実は, この方程式は Gauss の超幾何微分方程式 (11) と同等な方程式である. (具体的には,

$$F(x) = \alpha\beta x(1-x) + \frac{1}{4}(\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)^2 - \frac{1}{2}(\gamma(1-x)^2 + (\alpha + \beta - \gamma + 1)x^2)$$

が成り立つようにパラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  を定め,  $ux^{-\gamma/2}(1-x)^{-(\alpha+\beta-\gamma+1)/2}$  を新たな未知関数にとれば良い.) 超幾何微分方程式のモノドロミー群は古典的に知られている. 例えば [3] を参照.

**注意** 一般に微分方程式のモノドロミー群を計算することは非常に難しい問題である. 例えば今問題にしている方程式の場合, モノドロミー群を決定するのに必要な data の数は最低  $3g$  個であるのに対して, そのうち実際に求めることが可能な data である各確定特異点における特性指数は (独立なものが)  $(g+2)$  個しかない. 従って  $g \geq 2$  の時は, モノドロミー群を記述するために, 特性指数以外に  $3g - (g+2) = 2(g-1)$  個の data を見いさねばならない.

この Fuchs 型方程式のモノドロミー群が, 前節で述べた WKB 解の性質を利用すれば計算できる. もう少し詳しく言うと, 与えられた方程式の変わり点と Stokes 曲線の絵を (コンピュータ等を用いて) 書くことができれば, その絵を眺めながら接続公式 (13) を繰り返し適用することによりモノドロミー群が求まるのである. 以下, 具体的にどのように計算すれば良いのかを, 次の例を用いて見ていくことにしよう. (もちろん, WKB 解を考えるために, 微分方程式としては (4) の代わりにパラメータ  $h$  の入った (1) を扱う. なお, 詳しい説明は講義の際に行うこととし, ここでは主に結果のみ記すにとどめる.)

**例 5.3** 次の方程式を考える.

$$-h^2 \frac{d^2u}{dx^2} + Q(x)u = 0, \quad Q(x) = \frac{(x^2 - 9)(x^2 - 1/9)}{(x^3 - e^{\pi i/8})^2}. \quad (14)$$

変わり点と確定特異点に, 次のように番号をつけておこう.

$$a_0 = -3, a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = 3, \quad b_0 = e^{33\pi i/24}, b_1 = e^{\pi i/24}, b_2 = e^{17\pi i/24}, b_3 = \infty.$$

この方程式の Stokes 曲線の絵は図 2 のようになる. 但し, 細い実線が Stokes 曲線を表し, 太い実線は基準点  $x_0$  から各確定特異点  $b_k$  を一度回って  $x_0$  に戻る閉曲線  $C_k$  を表す. ま

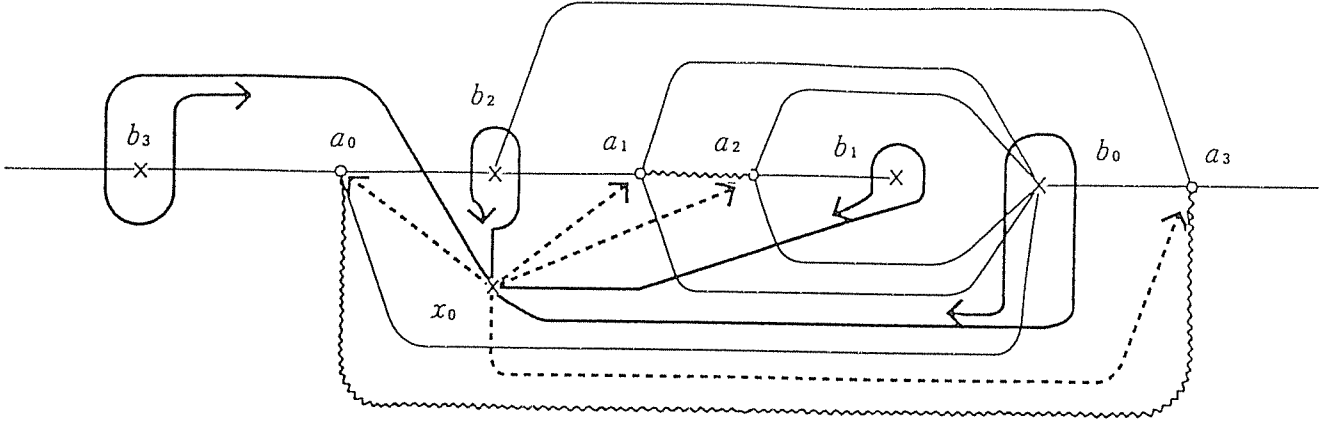


図 2: 例 5.3 の方程式の Stokes 曲線

た, 点線は (以下でモノドロミー行列を記述する際必要となる)  $x_0$  と各変わり点  $a_j$  を結ぶ曲線  $\gamma_j$  であり, 波線は  $\sqrt{Q(x)}$  を 1 価関数として定義するためのカットである. なお, この図 2 では, 図を見やすくするために Stokes 曲線はかなり (トポロジカルに) 変形されていることを断っておく.

今, 基準点  $x_0$  での一次独立な解の組として, この基準点  $x_0$  を (2) の積分端点とする WKB 解  $u^\pm$  を採用すれば, 各閉曲線  $C_k$  に沿うモノドロミー行列  $A_k$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{pmatrix} \nu_0^+ & 0 \\ 0 & \nu_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_1 \frac{\nu_0^+}{\nu_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_2 \frac{\nu_0^+}{\nu_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_2 \frac{\nu_0^+ \nu_1^+}{\nu_0 \nu_1} & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_1 u_{12}^2 \frac{\nu_0^+ \nu_1^+}{\nu_0 \nu_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \nu_0^+ & 0 \\ -i \left( u_1 \nu_0^+ + u_2 \nu_0^+ + u_2 \frac{\nu_0^+ \nu_1^+}{\nu_1} + u_1 u_{12}^2 \frac{\nu_0^+ \nu_1^+}{\nu_1} + u_3 \nu_0^- + u_0 \nu_0^- \right) & \nu_0^- \end{pmatrix} \\
 A_1 &= \begin{pmatrix} \nu_1^+ & 0 \\ 0 & \nu_1^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_1 \frac{\nu_1^+}{\nu_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_2 \frac{\nu_1^+}{\nu_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_2^{-1} \frac{\nu_1^-}{\nu_1^+} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ iu_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ iu_1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \nu_1^+ + \nu_1^- + u_{21}\nu_1^- & -iu_2^{-1}\nu_1^- \\ -i(u_1\nu_1^+ + u_2\nu_1^+ + u_1\nu_1^- + u_1u_{21}\nu_1^-) & -u_{21}\nu_1^- \end{pmatrix} \\
A_2 &= \begin{pmatrix} \nu_2^+ & 0 \\ 0 & \nu_2^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_0^{-1}\frac{\nu_2^-}{\nu_2^+} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_3^{-1}u_{12}^2\frac{\nu_0^+\nu_1^+}{\nu_0^-\nu_1^-} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nu_2^+ & -i(u_0^{-1}\nu_2^- + u_3^{-1}u_{12}^2\frac{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+}{\nu_0^-\nu_1^-} + u_1^{-1}\nu_2^+) \\ 0 & \nu_2^- \end{pmatrix} \\
A_3 &= \begin{pmatrix} \nu_3^+ & 0 \\ 0 & \nu_3^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_0^{-1}\frac{\nu_3^-}{\nu_3^+} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_0\frac{\nu_3^+}{\nu_3^-} & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -iu_3u_{21}^2\frac{\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-}{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -iu_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -u_{03}u_{21}^2\frac{\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-\nu_3^-}{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+} & -i(u_0^{-1}\nu_3^- + u_0^{-1}u_{03}u_{21}^2\frac{\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-\nu_3^-}{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+}) \\ -i(u_0\nu_3^+ + u_3u_{21}^2\frac{\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-\nu_3^-}{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+}) & \nu_3^+ + \nu_3^- + u_{03}u_{21}^2\frac{\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-\nu_3^-}{\nu_0^+\nu_1^+\nu_2^+} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで用いた記号の意味は次の通り.

$$u_j = \exp\left(2 \int_{\gamma_j} S_{\text{odd}} dx\right), \quad u_{jj'} = u_j^{-1}u_{j'}, \quad \nu_k^\pm = \exp(2\pi i \rho_k^\pm).$$

(但し,  $S_{\text{odd}}$  は Riccati 方程式 (3) の解  $S$  の  $h$  に関する奇数次部分, また  $\rho_k^\pm$  は 確定特異点  $b_k$  における特性指数である.)

「微分方程式に関連して自然に現われる発散級数は, 実に豊かな内容を含んでいる」ということが, 少しは感じて頂けたらうか. しかし, こうした発散級数解のもつ意味が明らかになったのは, 現在の所まだごく一部の微分方程式に限られている. 非線形方程式や多変数の偏微分方程式にまで世界を広げた時, 発散級数のまわりには一体どのような風景が広がっているのだろうか.

## 参考文献

- [1] 竹井義次: 現代数学における解析の一断面, 『数学セミナー』 本年 5 月号, 日本評論社.
- [2] 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 近刊.
- [3] 高野恭一: 常微分方程式, 朝倉書店, 1994.
- [4] 高崎金久: 漸近展開, 『数理科学』 1993 年 4 月号, サイエンス社.

- [5] W. Balsler: *From Divergent Power Series to Analytic Functions*, Lect. Notes in Math. No. 1582, Springer-Verlag, 1994.
- [6] 森口繁一他: 数学公式 III, 岩波書店, 1960.
- [7] A. Voros: *The return of the quartic oscillator*, Ann. Inst. H. Poincaré, **39**(1983), 211–338.

## Gauss の超幾何微分方程式 (cf. [3], [6])

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0$$

- $z = 0, 1, \infty$  に確定特異点をもつ。特性指数は次の通り。

$$\begin{cases} z = 0: & 0, 1 - \gamma \\ z = 1: & 0, \gamma - \alpha - \beta \\ z = \infty: & \alpha, \beta \end{cases}$$

- $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \dots$

:  $z = 0$  での特性指数 0 に対応する収束べき級数解。

(超幾何関数と呼ばれる。)

各特異点における基本解系 (一次独立な解の組) は, この  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  を用いて記述される。例えば

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ では } & \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z), \end{cases} \\ z = 1 \text{ では } & \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) \\ (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta}F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z). \end{cases} \end{aligned}$$

- Euler 積分表示:  $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha} dt$

これを用いると, 各特異点における基本解系の間関係式など, 超幾何微分方程式の解の大域的な性質がわかる。例えば

$$\begin{aligned} & z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \\ &= \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)}F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) \\ &+ \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\Gamma(\beta - \gamma + 1)}(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta}F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z). \end{aligned}$$