数 学 入 門 公 開 講 座

平成１３年８月６日（月）から平成１３年８月１０日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．電気回路とランダムウォーク（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　熊谷　　隆

皆さんの中には、高校の物理でオームの法則・キルヒホッフの法則といった、電気回路についての法則を経験則として学んだ人も多いと思います。この講座では、これらの法則が離散調和解析と呼ばれる数学を用いてどのように表現されるかを学び、電気回路に対応するランダムウォーク（マルコフ連鎖）について考察します。グラフの上に電気回路を構成してそのポテンシャル論的な性質を学ぶとともに、電気回路の性質が、対応するランダムウォークの性質にどのように反映するかを調べ、これらを用いた応用にも触れる予定です。

2．流体力学と流体数学（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教　授　岡本　　久

わが国の大学の数学教室では流体力学を講義することは少ないが、ヨーロッパの大学では数学教室で流体力学を教えることも多い。イギリスなどでは応用数学のかなりの部分を流体力学周辺で占めていることもある。歴史的に見ても、B. Riemann, H. Poincare, H. Weyl, A. N. Kolmogorov など、その人の主要な業績からは外れるけれども重要な流体力学の論文を書いてきた数学者は多い。

本講義の目的は、流体力学が数学の問題の宝庫であることを、具体例を通じて感じとっていただくことである。簡単な微分方程式は使うけれども、内容の大部分はグラフや流れの画像等を使って理解できるようにする予定である。

3．超弦理論の数学（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助　手　髙橋　篤史

物質や空間の基本構成要素が「点（素粒子）」ではなく1次元の空間的な広がりを持った「弦」であると考えることから、超弦理論は始まりました。現在では、一般相対性理論と量子論の究極的統一理論、つまり万物の理論の最有力候補として、理論物理学の表舞台で活躍しています。

数学と理論物理学は互いに刺激を与えながら発展してきましたが、超弦理論はこれまで以上に数学の世界に非常に大きな影響を与え続けています。それは、群論・表現論・保型形式・数論・代数幾何・シンプレクティック幾何……と広範囲にわたりますが、それも「弦」の持つ1次元の空間的自由度が理由です。

この講座では、超弦理論の数学的側面について、入門的解説および最新の成果の紹介をします。とくに、「空間とは何か」という幾何学の基本的問題に対する超弦理論からのアプローチについて触れたいと思います。

時　間　割

日 / 時間	8月6日(月)	7日(火)	8日(水)	9日(木)	10日(金)
10：30～11：45	熊谷	熊谷	熊谷	熊谷	熊谷
11：45～13：00	休憩				
13：00～14：15	岡本	岡本	岡本	岡本	岡本
14：15～14：45	休憩				
14：45～16：00	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤

流 体 力 学 と 流 体 数 学

京都大学数理解析研究所・教　授　　岡　本　　　久

2001, AUGUST 6, 7, 8, 9, 10,　13:00～14:15

流体力学と流体数学

岡本 久
〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
京都大学数理解析研究所

2001 年 6 月

要旨

流体力学という言葉はよく知られているが, 流体数学という言葉は造語であって一般的ではない. これは今井 功東大名誉教授の創作であろう (今井 功, 等角写像とその応用, 岩波書店 1979 年). 筆者はこの言葉が好きである. これは理論流体力学の同義語であると言ってもよいし, 数理流体力学と言ってもよい. その目指すところは「流体力学から派生する様々な数学的諸問題の解決」である.

1 初めに

日本人は農耕民族であったから, 水に対する関心は古代から並々ならぬものがあったと思われる. 銅鐸に描かれた渦巻模様 (図 1) などを見ると, 大昔から日本人は流れの面白いパターンに惹かれていたのだ, と推察できよう. 同様の渦巻模様は昔のケルト民族の意匠にもあるようである. 100% の自信があるわけではないが, このようなデザインが古代人に好まれた理由を筆者は次のように推測する. 稲の水を見回りにきた人間が水を観察してみたら多くの模様が観察された. その中でも「渦」は特に美しく, しかも頻繁に現れるので脳裏に焼き付けられるようになった. 都会に住む現代人と違い, ふだんから水に慣れ親しむことが多かった昔の人々にとって図 1のようなデザインを思いつくのは自然であったのであろう. この図のような渦巻きは流れの中に様々な形で現れるが, Kelvin-Helmholz 不安定性と呼ばれる現象に近いかもしれない (図 2参照).

もう一つの例として雲の形を見てみよう. パターンと呼べるような形の無い雲も多いが, 時としてきれいなパターンが見えることもある. 図 3は数理解析研究所の上空

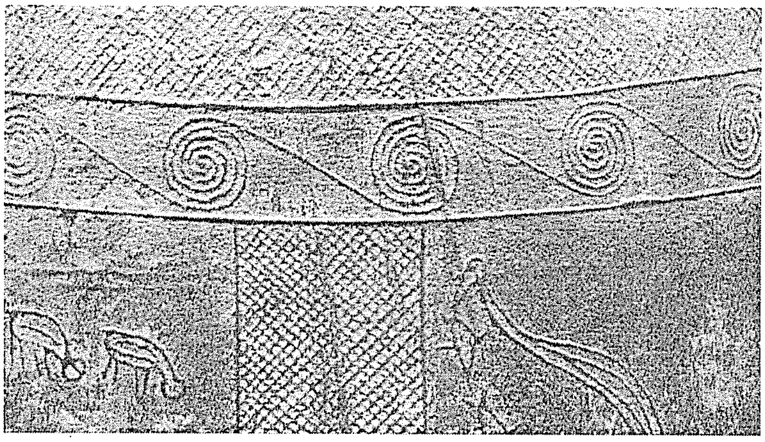

図 1: 銅鐸表面の渦巻模様. 兵庫県桜ヶ丘遺跡 4 号鐸の表面の一部

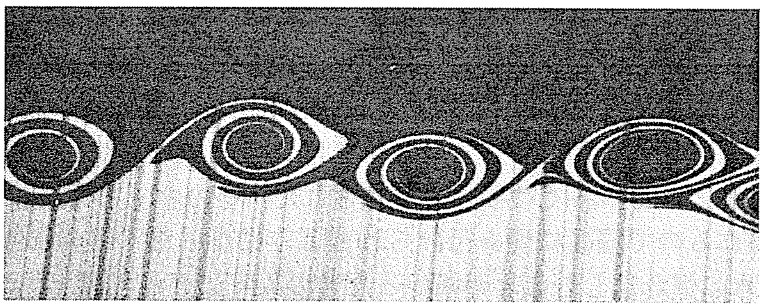

図 2: Kelvin-Helmholz 不安定性の実験. 文献 [10] より.

に現れた棒状の雲であるが, これはいわゆるすじ雲とは違うもので, 対流現象が可視化されたものと推測することができる.

渦とか対流運動とかは流体の運動に典型的にあらわれるが, このような現象がどのようなメカニズムによって発生するのかを理論的に理解するのは少し準備がいる. ある程度高級な数学も必要となるし, 計算機も必要となる. しかし, パターンの発生に限って議論すれば直感的に理解することも不可能ではない. 本講義の目的はこうした「流れのパターンの数学的な理解」である. 関連する話題で、比較的読みやすく書かれた解説 [1] を参照していただければ幸いである。

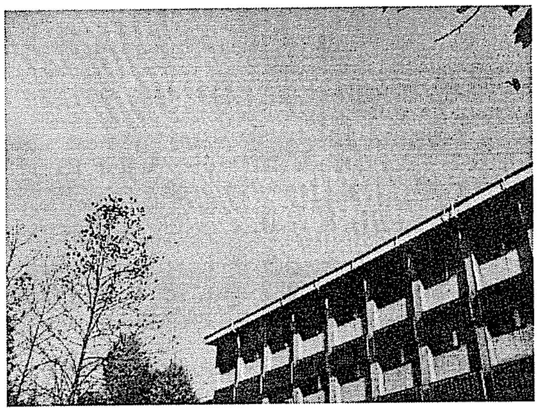

図 3: 数理解析研究所上空に現れた棒状の雲；１９９８年１１月. 撮影 岡本 久

2　流体力学と数学

水のような連続体の運動を研究する学問を流体力学と呼ぶ. 流体にも様々な種類が存在するが, 水であれば「非圧縮流体」と見做してよい. 実際, 水の非圧縮性は極めて高く, 常温常圧での圧縮率は $0.45 \times 10^{-10}\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{g}$ という大変小さな数である (巽 [8]). したがって, 地球上で観察できる水の運動は非圧縮であるとしてよい. 水の圧縮性を考慮するのはまず意味がないのである. 空気は水よりも圧縮率が高いが, それでも常温常圧の空気が１%の密度変化を生ずるには $50m/s$ 程度の高速が必要になる. 動いている人間の回りの空気であったら, 非圧縮としても実害はないことになる (流体力学ハンドブック [6]).

さて, ある場合 (あとで述べる水面波について考える場合など) では粘性も無視できることがある. 粘性が効いてくるのは境界近くの流体において著しく, 境界から少し

離れると粘性はあまり効果が見られない. 通常の波には境界の影響が少ないことが多いから, 波の形を問題にする限り粘性は無視できる.

そこで, まず初めに非圧縮非粘性でしかも密度一定の連続体を考えよう. これを記述する基礎方程式は約２５０年前に発見されており, Euler 方程式として知られている. L. Euler は数学の様々な分野で活躍した巨人で, ギネスブックにも「最も多くの論文を書いた数学者」として名前が挙がっている. だが, 同時に彼は流体力学の父としても知られているのである. 流体力学について学ぶには佐野 [7] をお勧めする. 非常にわかりよい教科書でなおかつ, 基本的なことが丁寧に説明されている. もう少し本格的に勉強するには巽 [8] がよい.

Euler 方程式とは速度ベクトル場 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ と圧力場 $p = p(t, x)$ に関する次のような非線形偏微分方程式である：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

ここで, $\mathbf{g}$ は重力場である. 池や海を考えるときには, g を正定数として $\mathbf{g} = {}^t(0, 0, -g)$ としてよい.

ちなみに, 粘性がある場合には方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nu \triangle \mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

となる. ここで ν は粘性係数と呼ばれる定数である. これが Navier-Stokes 方程式と呼ばれ, 非圧縮粘性流体の基本方程式として知られているものである. 粘性係数 ν がゼロの場合が Euler 方程式である.

3　水面波

流体力学の問題で一番なじみやすいものが波の問題であろう. そこで, まず初めに水面波の数学的記述について解説してみよう.

池に石を放り込めば水面を同心円形で伝わるのは誰でも知っているが, これを厳密に記述するにはある程度の数学を必要とする. そういった数学はすでに確立されたものであって, 数学的な道具あるいは数学的な枠組はすでに存在している. しかし, これは流体数学という分野が「枯れた」ものであることを意味しない. それどころか, 応用上重要でしかも極めて魅力的な問題が山積みされているのである. 枠組がある程度出

来ているのは, いわば料理の材料がすでに山積みされているという程度のことであり, これを如何に料理するかはシェフの独創性にかかっている.

さて波の問題も現象論としてはかなり複雑である. 図4を見ればわかるように波には大きなうねりと小さなさざなみがあり, それらが互いに干渉しあうので, 現象の記述は単純ではない.

そこで, ターゲットを絞り, 波の形が一定で一定の速度で進むものだけを考察してみよう. こうすると数学的にすっきりした理論を構成することが可能になる. このような波を次のように定義しておこう.

定義 1 波の形が一定で一定の速度で進む波を定常進行波と呼ぶ.

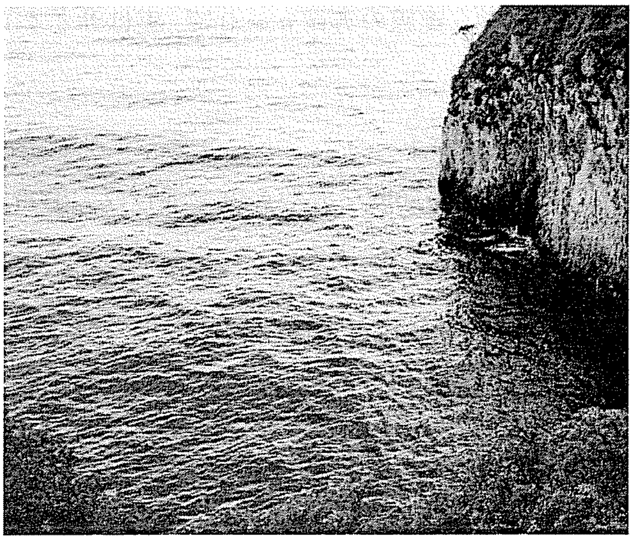

図 4: 海の波. イタリア, カプリ島の「青の洞窟」周辺. 撮影 岡本 久.

4　厳密に解ける場合

定常進行波の中で厳密に解ける場合がいくつか知られている. その代表的なものが Gerstner のトロコイド波や Crapper の表面張力波である ([3, 4]). これらの波形は空間座標 x について周期的である. Gerstner のトロコイド波は, 波の形がトロコイドという簡単な曲線で描けるのでよく引用されるものである. 波形は, b を定数として,

$$x = s + \frac{e^{2\pi b}}{2\pi}\sin(2\pi(s+0.5)), \quad y = b - \frac{e^{2\pi b}}{2\pi}\cos(2\pi(s+0.5)) \qquad (-0.5 < s < 0.5)$$

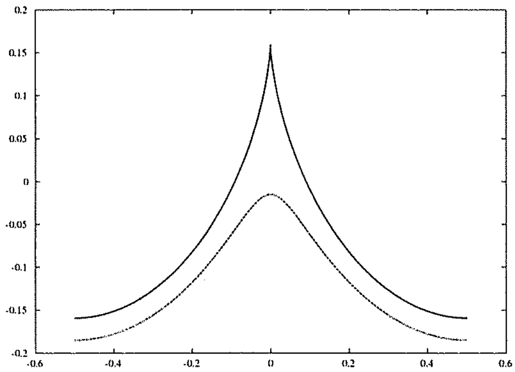

図 5: Gerstner のトロコイド波. 実線の方は $b=0$ で, 実はサイクロイドである. 破線の方は $b=-0.1$ の場合である.

で与えられる. 図 5にその波形を記す.

Crapper の表面張力波とは, 周期的な波形を持つ進行波の厳密解で, 次の方程式の解として定義できる.

$$q\frac{du}{d\sigma} = -\sinh(Hu) \qquad (0 \le \sigma \le 2\pi) \tag{1}$$

ここで, H は Hilbert 変換で, 関数 $f(\sigma)$ に

$$Hf(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\sigma-\rho}{2}\right) f(\rho)d\rho$$

を対応させる変換のことである. q は表面張力係数に比例する無次元のパラメーターである. ここでは正定数であると仮定する. この方程式は $v = Hu$ とおくと,

$$qv(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\sin\frac{\sigma-\rho}{2}\right| \sinh v(\rho)d\rho$$

と書き直すことができる. $u \equiv 0$ あるいは $v \equiv 0$ は明らかに方程式を満たすが, これは平坦な波形を表す解であり, 何ら興味を引くものではない. そこで, 我々のやるべきことは恒等的にゼロではない解を求めることになる. 解は表面張力係数の大きさに応じて定まるが, そのうち, 1 波長の中に山が 1 個あって谷も 1 個であるものを探すと, 実は, 解は初等関数で表され, $1 < q < \infty$ に解があることがわかる. 波長を L とすると, 波形はパラメーター $\sigma \in [0, 2\pi)$ によって

$$\frac{2\pi x}{L} = -\sigma + \frac{4A\sin\sigma}{1+A^2+2A\cos\sigma}, \qquad \frac{2\pi y}{L} = \frac{2(1-A^2)}{1+A^2+2A\cos\sigma} \tag{2}$$

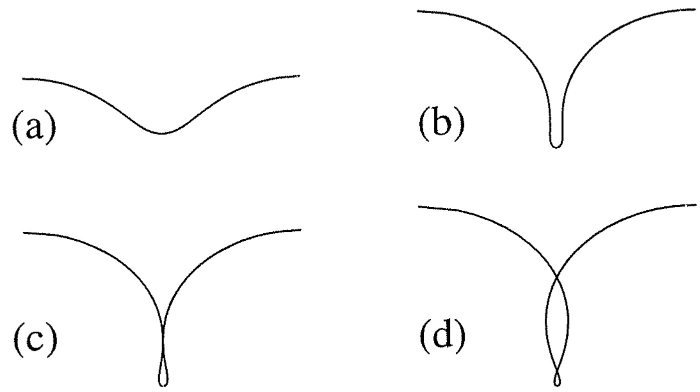

図 6: Crapper の波形 (の 1 周期分). $q = (1 + A^2)/(1 - A^2)$. A は (a), (b), (c), (d) に対してそれぞれ $-0.2, -0.42, -0.45467, -0.5$.

と書き表される. ここで, パラメーター A は $q = (1 + A^2)/(1 - A^2), -1 < A < 1$ で定まる. 波形のいくつかを図 6に記す ([5] 参照). 図 6からわかるように, (2) の解は $|A| > 0.45467\cdots$ のときに自己交差する非物理的な波を表してしまう.

5 重力波

本節と次節で扱う波は具体的な関数で書き表すことはできない. しかし, これらは比較的取り扱いが簡単な積分方程式で厳密に書き下すことができる. その解は (うまくアルゴリズムを選べば) 相当精密に数値計算することができるので理解し易い. 数学的な解の存在証明は可能であるが, 見かけからは想像もできないくらいの頁数を必要とする ([5]).

重力波とは重力だけが働いており, 表面張力が無視できる波をさして言う. 特に, その波形が周期的であるとすると, 波形は Nekrasov の方程式と呼ばれる積分方程式

$$\theta(\sigma) = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} G(\sigma,\gamma)\frac{\sin(\theta(\gamma))}{\kappa + \int_0^{\gamma}\sin(\theta(\xi))d\xi}d\gamma. \qquad (0 < \sigma < \pi) \tag{3}$$

を解くことによって決定できることが知られている ([5]). ここで κ は実パラメーターであり, 重力加速度 g と波の進行速度から決まる. 積分核 G は

$$G(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\sigma+\gamma}{2}}{\sin\frac{\sigma-\gamma}{2}}\right|$$

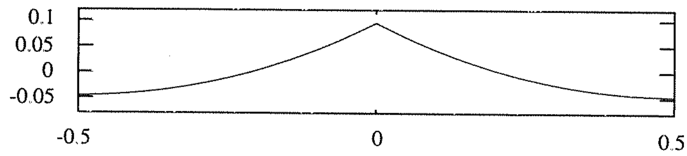

図 7: Stokes の極限波 ($\kappa = 0$ の時の (3) の解). 波長を 1 にしてある.

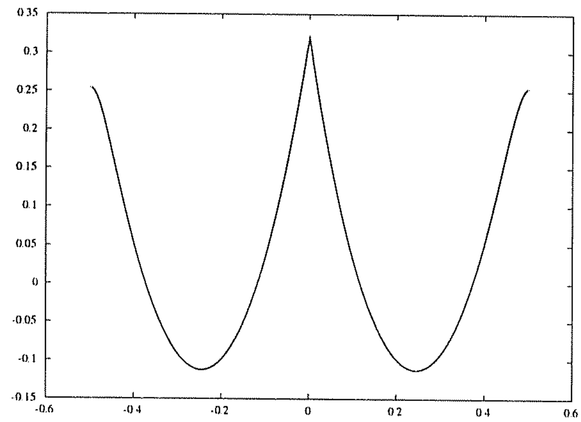

図 8: 尖った山と丸い山が交互に繰り返す波

で与えられる. 未知関数 θ は波の接線と x 軸とがなす角度を表す. もちろん $\theta \equiv 0$ は解であるが, これは完全に平坦な水面を表すので, 考察からはずしてよい.

さて, 自明でない解が $0 \leq \kappa < 1/3$ で存在することが知られている. $\kappa \to 1/3$ のとき解は $\theta \equiv 0$ に近づき, 波は水平な直線に近づく. $\kappa < 1/3$ がそれほど小さくなければ波は三角関数でよく近似できる. しかし, κ がどんどん小さくなってゆくと波の谷の部分が広がり, 山の部分が狭くなる. そして $\kappa = 0$ のときには波形は山の頂点で角を持ち, その角の角度は 120° であることがわかっている ([5], 図 7). この波を Stokes の極限波と呼ぶ.

$\kappa = 0$ のときに図 7の解だけが解なのであろうか？山がひとつで谷もひとつなら解はこれしかないと信じられているがその証明は見つかっていない. 一方, 山がいくつもあるものを許すと多くの解が存在することが知られている. 図 8は尖った山と丸い山が交互に現れる解である. この他にも, ひとつの尖った山と二つの丸い山が繰り返すもの, ふたつの尖った山とひとつの丸い山が繰り返すものなど, 多くの解が知られている. しかしこれらはすべて数値計算によって見つかったものばかりである ([5]).

6 孤立波

今まで考察してきた波は周期的なものばかりである. 波長が無限大に近づくとき, 波は孤立波と呼ばれるものになる. 孤立波の波形が $y = h(x)$ で表されるとき, h は偶関数で, $x \to \pm\infty$ のとき, $h(x) \to$ 定数 となる. 孤立波を計算するには次の積分方程式を解けばよいことが知られている.

$$\theta(t) = \frac{1}{6\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t-s)}{1-\cos(t-s)}\left\{\Theta(t) - \Theta(s)\right\} ds, \qquad (-\pi \leq t \leq \pi) \tag{4}$$

ここで,

$$\Theta(s) = \log\left(\kappa + \int_0^s \frac{\theta(\sigma)}{\cos(\sigma/2)} d\sigma\right).$$

方程式 (4) は山田彦兒が 1957 年に発見したもの ([9]) と同値である. $\kappa = 0.00001$ のときの解を図 9にしるす.

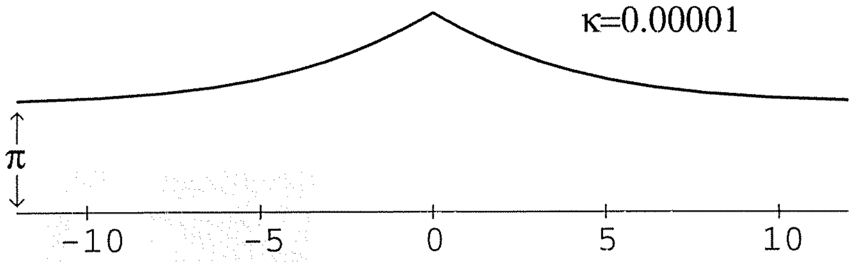

図 9: 表面張力が無視できるときの孤立波の形 (京都大学数理解析研究所大学院生 小林健太 氏の計算)

これとは反対に重力が無視でき, 表面張力がある場合には波は盛り上がるのではなくへこんだ形になる. 図 10にその例を示す.

7 Navier-Stokes 方程式の解の存在と一意性

話を変えて, Navier-Stokes 方程式を論じよう. Navier-Stokes 方程式は非圧縮粘性流体を支配する偏微分方程式である. この方程式を最初に見いだしたのはフランスの技術者である Navier であるが, その導き方には事実にそぐわないところがあり, Poisson などに鋭く批判された. つまり結果は正しいけれど導き方に根拠がないというわ

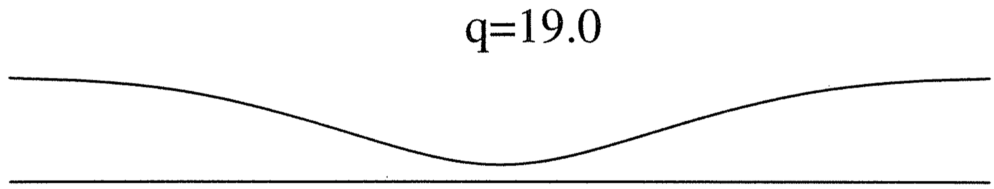

図 10: 重力が無視できるときの孤立波の形

けである．1820 年代から 1830 年代のことである．これが原因で Poisson と Navier は不倶戴天の敵となり，Poisson は自分の理論が正しいのだからこの方程式の発見は自分の業績であると主張し，Navier は自分の先取権を主張して譲らなかったと言われている．にもかかわらず，連続体という概念は両者になく，連続体を用いて上記方程式を導いたのは Stokes なのである (1845 年)．Stokes はアイルランドに生まれ，ケンブリッジ大学で教育を受けた数学者・物理学者であり，Stokes の定理などで著名である．また，上で述べた重力波の極限波の発見者としても著名である．現在の目で見てみると，真実をつかんだのは Stokes であって，Navier の理論も Poisson の理論も事実とは違うものであると判断されている．この故に方程式は Navier-Stokes 方程式と呼ばれるようになったのである．

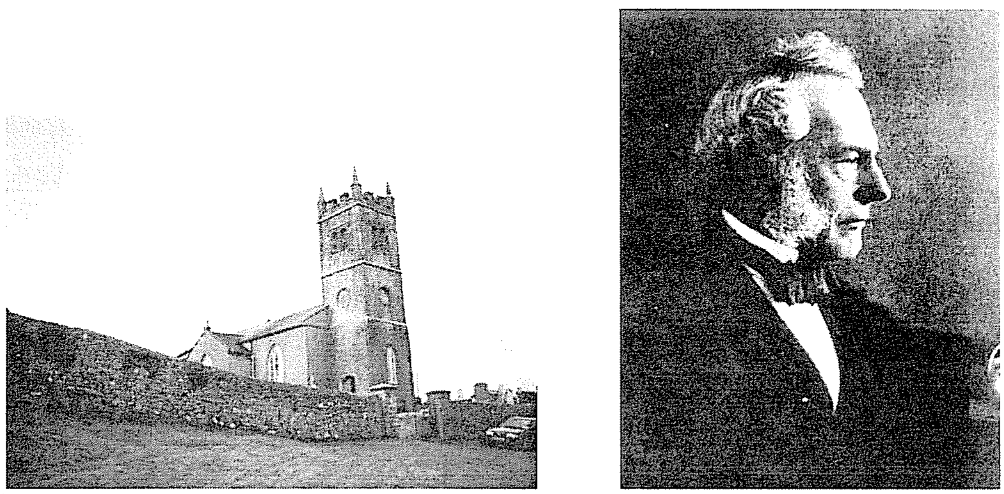

図 11: G. G. Stokes (右) の父親はアイルランドの田舎で司祭をしていた．その教会が左である．彼は Cambridge 大学の Lucasian Professor of Mathematics であった．

この方程式が発見されてからすでに１７０年以上の年月が過ぎている．にもかか

わらず, 「この方程式は物理的に自然な状況の下でただひとつ解をもつのか?」という基本的な疑問に解答が与えられていないのである.

野球などのスポーツの解説では, 「勝利の方程式」という言葉が使われる. 「この手をうってあの手をうって最後にこれをすれば間違いなく勝てる」といった方策のことを意味するようである. こういった言葉使いをする背景には, 方程式はいつも正しい答えを持っている, ということのみならず, 確実に予想通りのところへ導いてくれる, という信仰に近いものが見て取れる. だが, 方程式の解が, 人間の浅はかさをあざ笑うかのように, 全く予想もしないところへ我々を導くことがある, ということを知っておくべきであろう. Navier-Stokes 方程式はその 1 例を与えてくれる.

話の都合上, まず微分方程式の適切性について定義する必要がある. ある物理量 $u(t,x)$ の時間発展を記述する (偏) 微分方程式は, 初期条件と境界条件を適当に[1] 与えると, それに対応する解もただ一つ存在して, しかも初期条件や境界条件を少しずらしても解は少ししかずれない, という性質を満たすのが当然であろう. こうした条件が満たされている場合にその初期値境界値問題は “適切である” (well-posed) と呼ばれる. そうでない場合には “非適切である” (ill-posed) と呼ばれる.

“適正な推論で法則化された物理法則を表す微分方程式は当然適切である” と盲目的に信じられていることがままあるが, 実は適切性は法則の導入とは別に検証されるべきものなのである. 微分方程式の導入に際して, 様々な要因のうち「これは重要でない」とかいった判断で無視したものが必ず存在するので, 完全無欠の法則などというものは期待できない. 方程式の適切性が検証できれば, そのような “無視” が妥当であったということなるが, 逆に, 適切でなかったとすると, それは妥当ではないことを意味する. 少なくとも, その微分方程式の適用に際してはあまり直感的な議論を適用することは危険である, ということができる.

非適切な方程式としては, 非粘性非圧縮流体の中の渦層の時間発展を記述する Birkhoff-Rott 方程式が有名である. 粘性と表面張力を無視したときの Rayleigh-Taylor 不安定性も非適切な物理現象である. 適切な問題を考える場合には直感的な推論はたいていの場合に許されることが多いが, 非適切な場合には細心の注意が必要である. 実際, 非適切な問題では極めて小さなノイズが極短時間の間に有意義な大きさに成長するので, ありきたりの方法では数値計算も破綻するし, 有用な情報を得ることは難しい.

もういちど繰り返すと, ある物理量の時間発展を記述する法則が方程式の形で与えられても, それが適切な問題を導くのかそれとも非適切な問題に導くのかを把握しないととんでもない間違いを犯す可能性がある. このため, 多くの数学者は適切性の証明

[1]つまり初期関数が微分可能であるとか, 非圧縮流体の場合には初期速度場がやはり非圧縮であるとか, 当然満たしてなくてはならない条件を満たしていることを仮定する.

を何よりも重要なものであると見做し，物理学や工学に現れる諸問題の適切性を証明しようと心血を注いできた．そのための人的エネルギーは莫大なものであるが，にもかかわらず，Navier-Stokes 方程式という基礎方程式の適切性が現在でも証明されていないというのは皮肉なことである．

世紀の変わり目を記念して様々な催しが行われたが，その中で多くの未解決問題が提示された．アメリカの Clay 財団が７つの未解決問題を提示してそのうちのどれでもひとつ解決できれば１００万ドルを進呈すると発表したのはつとに有名であるが，その中に Navier-Stokes 方程式の解の存在が入っている．詳しくは

http://www.claymath.org/

を参照していただきたい．ちなみにおのおのの問題は次のようになっている．

Millennium Prize Problems

- P versus NP
- The Hodge Conjecture
- The Poincaré Conjecture
- The Riemann Hypothesis
- Yang-Mills Existence and Mass Gap
- Navier-Stokes Existence and Smoothness
- The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Navier-Stokes 方程式の問題はつぎのような情緒的な言葉で説明されている：

Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.

問題は方程式に解がただひとつ存在することを証明することである．約７０年ほど前に J. Leray が Navier-Stokes 方程式の理論に関して画期的な成果をあげた．この中で彼はある種の解が存在することを証明したのである．が，解（それはある関数である）の一意性が証明できなかった．その関数がある程度性質のよいものであれば一意であることを彼は理解していたが，彼の作った解は自乗可積分といった程度の関数で，連続かどうかすらわからなかった．ちなみに彼の作った解が実は連続関数である，ということを証明できれば，一意であることも証明できる（従って１００万ドルがもらえる）．このように，解の一意性と解の滑らかさが密接に関連しているので Clay 財団のリストには Navier-Stokes Existence and Smoothness となっているのである．

この問題は７０年以上にわたって多くの数学者を魅了してきたが，解決の糸口が見つかっていない．最近２０年だけに制限しても，２度ほど「解決した」と称するアナウンスがあったけれども，証明が間違っていることがしばらくして判明している．多くの数学者が「極めて難しい問題である」ということでは意見の一致を見ている．上記 Clay 財団の解説文で C. Fefferman (1978 年度 Fields 賞受賞者) は次のように述べている：

Let me end with a few words about the significance of the problems posed here. Fluids are important and hard to understand. There are many fascinating problems and conjectures about the behavior of solutions of the Euler and Navier-Stokes equations. (中略) Since we don't even know whether these solutions exist, our understanding is at a very primitive level. Standard methods from PDE (岡本注； Partial Differential Equation のこと) appear inadequate to settle the problem. Instead, we probably need some deep, new ideas.

8 最後に

ヨーロッパの大学では数学教室で流体力学を教えることも多い．イギリスなどでは応用数学のかなりの部分を流体力学周辺で占めていることもある．日本では，数学プロパーの研究者と流体物理学の研究者が協力あるいは競争するという傾向はこれまであまりなかった．だが，面白い数学的問題を流体力学ほど長期間にわたって供給している学問分野は他には見当たらないのである．従って，数学と他の分野の交流はもっと盛んになって欲しいと思っている．また，数学を勉強しようとしている若い人々には応用科学にもっと目を向けてほしいと願うものである．

最後に，Euler, Navier, Stokes といった先駆けの仕事をした人々の伝記をよむのは楽しいものである．

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/
には簡単な伝記があるのでお勧めしたい.

参考文献

[1] 福本康秀, 大木谷耕司, 小川知之, 岡本 久, 特集「流体の非線形波動」, 数学の楽しみ, 第 25 巻, (2001).

[2] 今井 功, 等角写像とその応用, 岩波書店 (1979)

[3] H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge University Press, 邦訳「流体力学」, 第 2 巻, (今井 功・橋本英典訳), 東京図書 (1981)

[4] 岡本　久, Navier-Stokes 方程式の未解決問題, 数理科学, 2001 年 5 月号

[5] H. Okamoto and M. Shōji, The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves, World Scientific 社より, 近日刊行

[6] 日本流体力学会編, 流体力学ハンドブック (第 2 版), 丸善, (1998)

[7] 佐野 理, 連続体の力学, 裳華房 (2000).

[8] 巽　友正, 流体力学, 培風館 (1982).

[9] H. Yamada, On the highest solitary wave, Report Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ., vol. 5 (1957), pp. 53–67.

[10] M. Van Dyke, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press (1982).