行列で表現する話

有木　進

1　１日め

1.1　序

日本語とは便利なものでありまして,「行列で表現する話」というように,目的語を書かなくても文章が成り立ちます．しかし，やはり「何を行列で表現するのか？」という話から始めるべきでしょう．ここでは,

「関係式を行列で表現したい」

というのが目的です．関係式を行列で表現するとは，たとえば，$X^2 = 1$ という関係式をみたす行列を全部求めなさい，というような問題を考えることを意味しています．一般に，関係式

$$(\sharp) \qquad f_1(X_1, \ldots, X_n) = 0, \ldots, f_r(X_1, \ldots, X_n) = 0$$

をみたす行列の組，$X = (X_1, \ldots, X_n)$，を求めることを関係式 $(\sharp)$ を行列で表現する，といいます．ただし $X_1, \ldots, X_n$ は同じサイズの正方行列で，関係式 $f_1, \ldots, f_r$ は非可換多項式環の元です．つまり係数はスカラー（たとえば複素数）であって，係数も非可換な関係式，たとえば，現代制御理論で出てくる

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C^T QC = O$$

という形の X の２次方程式はいまの枠組みには含まれません.

1.2　なぜ，行列で表現したいのか

この問いにはいろいろな答えがあり得ます．たとえば変数 $X_1, \ldots, X_n$ が単なる数だったらこの問題は連立方程式の解を見つけることにほかなりませんから，連立方程式の自然な拡張ともいえるわけです.

他の答えとしては，物理に自然に出てくる問題だから，というのもあります．実際,

$$\begin{gathered} X_i X_j - X_j X_i = 0, \quad P_i P_j - P_j P_i = 0, \\ X_i P_j - P_j X_i = \sqrt{-1}\frac{h}{2\pi}\delta_{ij} \end{gathered} \tag{1}$$

という関係式を表現したいという問いは，量子力学，とくに不確定性原理と深くかかわっていることはご存知でしょう．残念ながら，この関係式は有限サイズの行列では表現できませんが. [1] しかし，

$$L_1 = X_2P_3 - X_3P_2, \quad L_2 = X_3P_1 - X_1P_3,$$
$$L_3 = X_1P_2 - X_2P_1$$

とおくと，L_1, L_2, L_3 は関係式

$$\begin{cases} L_1L_2 - L_2L_1 = \sqrt{-1}\dfrac{h}{2\pi}L_3, \\ L_2L_3 - L_3L_2 = \sqrt{-1}\dfrac{h}{2\pi}L_1, \\ L_3L_1 - L_1L_3 = \sqrt{-1}\dfrac{h}{2\pi}L_2, \end{cases}$$

をみたし，これは有限サイズの行列で表現できます．話を見やすくするため，

$$X = \frac{2\pi}{h}\left(L_1 + \sqrt{-1}L_2\right),\ Y = \frac{2\pi}{h}\left(L_1 - \sqrt{-1}L_2\right),\ H = \frac{4\pi}{h}L_3$$

とおいてみましょう．すると，

$$\begin{cases} HX - XH &= 2X, \\ HY - YH &= -2Y, \\ XY - YX &= H, \end{cases} \tag{2}$$

が成り立ちます. [2] この関係式は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすれば実現できますが，他にも無限にあります．答えを書いてみましょう．

定理 1. $X, Y, H \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ が上の関係式 (2) をみたしているとする．すると，可逆行列 P が存在して $P^{-1}XP, P^{-1}YP, P^{-1}HP$ は同時ブロック対角化可能で，これを

$$\begin{cases} P^{-1}XP = diag(X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}), \\ P^{-1}YP = diag(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(s)}), \\ P^{-1}HP = diag(H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}), \end{cases}$$

[1] 同じサイズの行列とは，同じベクトル空間（たとえば $\mathbb{C}^n$）上の線形作用素ですから，無限次元の空間（たとえば $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$）を考え，$X_i = x_i, P_i = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}$ とおけば，この関係式を無限サイズの行列で表現できます.

[2] この関係式で定まる代数を $U(sl_2)$ とかきます.

と書いたとき，各ブロック $(X^{(i)}, Y^{(i)}, H^{(i)})$ $(1 \leq i \leq s)$ は以下で与えたもののどれかに等しい．しかも，このようなブロック対角行列はブロックの並べかたを除いてただ一通りに決まる．

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \ell & & & & \\ & 0 & \ell-1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \ell-1 & 0 & \\ & & & & \ell & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \ell & & & & & \\ & \ell-2 & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & -\ell+2 & \\ & & & & & -\ell \end{pmatrix}$$

上の定理で与えた，$X, Y, H \in \mathrm{Mat}(\ell+1, \ell+1, \mathbb{C})$ が作用するベクトル空間 $\mathbb{C}^{\ell+1}$ を V_ℓ と書いて，最高ウエイト $\ell/2$ の既約 sl_2–加群と呼びます．

水素原子のように Hamiltonian が空間回転対称性をもつと，エネルギー固有値 E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ごとに，電子の波動関数の空間がスピン自由度の空間 V_1 と空間の自由度の空間 V_ℓ のテンソル積の直和で与えられます．ℓ の動く範囲は $\ell \in \{0, 2, \ldots, 2n-2\}$ です．$\ell/2$ を方位量子数と呼び，$\ell/2 = 0, 1, 2, \ldots$ に対して s 軌道，p 軌道，... と呼ぶのでした．(sharp, principal, ...)

1.3 Lie 代数の行列表現

変数 $X_1, \ldots, X_n$ のあいだに $X_iX_j - X_jX_i = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k X_k$ という形の関係式を考えるとき，これを Lie 代数の（普遍包絡環の）表現といいます．ただし，係数 a_{ij}^k は勝手な数ではだめで，たとえば,

$$X_iX_j - X_jX_i = -(X_jX_i - X_iX_j)$$

ですから，$a_{ij}^k + a_{ji}^k = 0$ である必要がありますし,

$$\begin{aligned} X_i(X_jX_k - X_kX_j) - (X_jX_k - X_kX_j)X_i \\ + X_j(X_kX_i - X_iX_k) - (X_kX_i - X_iX_k)X_j \\ + X_k(X_iX_j - X_jX_i) - (X_iX_j - X_jX_i)X_k = 0 \end{aligned}$$

ですから，$X_1, \dots, X_n$ が線形独立であるならば

$$\sum_{p=1}^{n}\left(a_{jk}^{p}a_{ip}^{q}+a_{ki}^{p}a_{jp}^{q}+a_{ij}^{p}a_{kp}^{q}\right)=0$$

もみたす必要があります．[3]

この講義では有限個の変数しか考えませんが，実は変数を取り換えて無限個の変数で書き表したりするほうが便利なこともあります．また，この講義では有限サイズの行列しか考えませんが，同じ無限次元ベクトル空間上の作用素たちのみたす関係式と思って，無限サイズの行列で表現することも重要です．現代数学では，無限次元代数の無限次元表現を扱うことが中心的なテーマのひとつです.

そのような例として，数理物理に現れる関係式を紹介しましょう．場の理論に出てくる生成・消滅演算子を考えます．変数は $\{\psi_i^\dagger, \psi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ で，これらの変数のみたすべき関係式は以下の通りです.[4]

$$\begin{gathered}\psi_i\psi_j+\psi_j\psi_i=0,\ \ \psi_i^\dagger\psi_j^\dagger+\psi_j^\dagger\psi_i^\dagger=0\\ \psi_i\psi_j^\dagger+\psi_j^\dagger\psi_i=\delta_{ij}\end{gathered}\tag{3}$$

さて,“ 真空 ”$|vac\rangle$ に生成・消滅演算子を掛けていくことにより生成されるベクトル空間が重要で，これを（Fermion）Fock 空間といい，第２量子化された波動関数の作用する状態ベクトルの空間として使われます．ここで生成・消滅演算子の真空への作用は,

$$\psi_i|vac\rangle=0\ (i<0),\ \ \psi_i^\dagger|vac\rangle=0\ (i\geq 0)$$

で与えられ, これをもとに Fock 空間全体への生成・消滅演算子の作用を定めます．次に,

$$H_n=\sum_{i\in\mathbb{Z}}:\psi_i\psi_{i+n}^\dagger:=-\sum_{i<0}\psi_{i+n}^\dagger\psi_i+\sum_{i\geq 0}\psi_i\psi_{i+n}^\dagger$$

とおきましょう．ここで，：　：は正規積とよばれる記号です．すると，これらの H_n $(n\in\mathbb{Z})$ は

$$H_mH_n-H_nH_m=m\delta_{m+n,0}$$

をみたします.[5] さらに，いろいろな（affine Kac Moody）Lie 代数が Fock 空間上の作用素として表現されます．すると，菅原構成というものにより

[3]この条件を Jacobi 律といいます.

[4]これは，自然な内積の入った２次元空間 $\mathbb{C}\psi_i^\dagger\oplus\mathbb{C}\psi_i$ の無限直和から作られる無限変数 Clifford 代数の関係式にほかなりません.

[5]左辺を変形するとき，つねに作用素が意味をもつように気をつけながら変形する必要があります．ここを間違えると，$\infty-\infty$ の不定形が出てきてしまいます.

ちなみに，$i\geq 1$ に対して $X_i=\frac{1}{i}H_{-i}$，$P_i=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{h}{2\pi}H_i$ とおくと，$H_0X_i=X_iH_0$, $H_0P_i=P_iH_0$ で，X_i と P_i は関係式 (1) をみたします.

Virasoro Lie 代数も Fock 空間上の作用素として表現されます. [6] こうして, 話は Wess-Zumino-Witten モデルという場の理論（共形場理論）の話につながっていきます.

物理に現れる代数（関係式）としては，ノーベル物理学賞受賞者 C. N. Yang の名前をとった Yangian というものがありますし，上で紹介した $U(sl_2)$ の関係式にパラメータをいれて変形した量子群もあります．たとえば，[F], [GRS], [JM] をみるとどんな感じで現れてくるかがわかります.

物理は正解がただひとつの世界です．つまり，自然を律している原理こそが求めるものであってその他のいろいろな可能性は最終的には排除されるべきものです．しかしながら,（ここが神の深遠なるところですが,）全能の神は（やおろずの神かな？）ひとがもっとも自然に考える理論を真とするのではなく，より抽象的なそして直感と離れたものをこそ真とする宇宙をお作りになりました．20 世紀は，相対論，場の理論など，まさにこれを実感させる理論の進展のあった世紀でした．そして，まずは現象論からある程度離れて理論の世界に遊び，いろいろな数学モデルで考えた上でないと正しい理論に到達できない人間というものもまた神のお作りになったものであるのです.

上ではその発展の流れの中に現れた代数系の話のさわりだけを紹介したにすぎませんが，それにしても，数学をなりわいとしている者としては，このようなかたちで数学が役立つという事実には不思議な気持ちにさせられます.

さて，今度は目を数学内部に転じてみましょう．たとえば，群環や Hecke 環，量子群とよばれる関係式の集合があります．量子群（の表現）とは Lie 代数の表現にパラメータをいれたもので，これは Lie 代数の表現の親戚ですが，群環や Hecke 環，もっと一般に有限次元代数とよばれている結合的代数の表現はまた別の世界を作っています． 2 日めは線形代数に現れる 2 つの標準形を話のまくらに，この世界に分け入っていきましょう.

2 2日め

2.1 線形代数の復習から

$A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ とします．このとき，2 つの可逆な行列 $P \in \mathrm{Mat}(m, m, \mathbb{C})$ と $Q \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ が存在して，$P^{-1}AQ = E_{11} + \cdots + E_{rr}$ とかけます．ここで，E_{ij} は行列単位で，(i, j) 成分が 1 で残りのすべての成分が 0 の行列です．r は P, Q のとりかたによらず A のみから決まります．この r を A の階数とよび，$\mathrm{rank}\, A$ と書くのでした.

---

[6] Virasoro Lie 代数は，変数が L_n $(n \in \mathbb{Z})$ で，関係式が

$$L_m L_n - L_n L_m = (m-n) L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0}$$

です.

行列 A に対し，このようにして得られた対角に 1 が r 個並ぶ行列を，A の簡約形とか，掃き出し法による A の標準形，などと呼びます．あまり呼びかたが定まってないようですから，ここでは A の階数標準形と呼ぶことにしましょう．

次に A を正方行列としましょう．$A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ に対し，ある可逆な行列 $P \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ が存在して，$P^{-1}AP = diag(J_1, \ldots, J_s)$ とブロック対角化できて，各 J_i は次の形をしています．

$$J(k, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(k, k, \mathbb{C})$$

この形の行列を Jordan ブロックといいます．しかも，$J_1, \ldots, J_s$ は並びかたを除けば，P の取りかたによらずただ一通りに決まります．そこで，こうして得られた行列を A の Jordan 標準形と呼びます．

2.2 まずは１変数の場合でウオーミングアップ

変数が 1 個の場合を考えましょう．関係式が $f_1(X) = 0, \ldots, f_r(X) = 0$ だとします．$f_1, \ldots, f_r$ の最大公約式を f とすれば，

$$f(X) = O \quad \Longleftrightarrow \quad f_1(X) = O,\ \ldots,\ f_r(X) = O$$

ですから，最初から関係式が 1 個として一般性を失いません．この関係式をみたす行列 X を求めることは簡単です．なぜなら，$f(X) = O \Longleftrightarrow f(P^{-1}XP) = O$ ですから，X が Jordan 標準形であるとして，この関係式をみたすものを探せばよいからです．例をやってみます．

例 2. $(X - 2I)^2(X + 3I) = O$ をみたす行列を求めよ．

（解）X を Jordan 標準形としてこの関係式をみたすものを探すと，$\lambda = -3, 2$ しかあり得ず，$\lambda = -3$ なら $X - 2I$ は可逆なので $X = -3I$，これをみたす Jordan 標準形はサイズが 1 の行列 (-3) のみ．$\lambda = 2$ なら $X + 3I$ は可逆で，$(X - 2I)^2 = O$．これをみたす Jordan 標準形は (2) または $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$．よって，解の集合は $J = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ として

$$\left\{ X = P^{-1} diag(-3, \cdots, -3, 2, \cdots, 2, J, \cdots, J)P \;\middle|\; P：\text{可逆.} \right\} \quad \cdots \text{（答）.}$$

2.3　有限次元代数の行列表現

みなさんは環というものをご存知でしょう．環とは，４則演算のうち，割り算だけが欠けているもので，足し算，引き算，掛け算に関しては，

> 加法の交換法則と結合法則，乗法の結合法則，左分配法則，右分配法則

が成り立つものです．注意すべきは乗法の交換法則が仮定されていないことで，そのため，分配法則も $a(b+c)=ab+ac$ と $(a+b)c=ac+bc$ と左右それぞれに用意する必要があります．これが左分配法則と右分配法則です．

一般に，$f(X)$ が n 次多項式のとき，$A=\mathbb{C}1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}X^{n-1}$ に加法・減法を普通の多項式の加法・減法として定め，また $a(X)\in A$ と $b(X)\in A$ の積を $a(X)b(X) \pmod{f(X)}$ とすることにより A の乗法を定めれば A は環で，この A を $\mathbb{C}[X]/(f)$ と書きます．

専門家の言葉では，$f(X)=O$ をみたす行列 X を求めることを，環 $\mathbb{C}[X]/(f)$ の表現を求める，といいます．同様に，ここで考えている問題，つまり

$$(\sharp)\qquad f_1(X_1,\dots,X_n)=0,\dots,f_r(X_1,\dots,X_n)=0$$

をみたす複素行列の組 $X=(X_1,\dots,X_n)$ を求める問題を，専門家の言葉では

$$\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle/(f_1,\dots,f_r)$$

の表現を求める，といいます．[7]

特別な場合として，関係式が $X_iX_j=\sum_{k=1}^n a_{ij}^k X_k$ のときを考えます．Lie 代数のときと同様に，係数 a_{ij}^k は勝手ではだめで，$(X_iX_j)X_k=X_i(X_jX_k)$ ですから，$X_1,\dots,X_n$ が線形独立であるならば

$$\sum_{p=1}^n a_{ij}^p a_{pk}^q=\sum_{p=1}^n a_{jk}^p a_{ip}^q$$

をみたす必要があります．また，普通は $I=\sum c_iX_i$ という元（単位元）があって，

$$IX_i=X_iI=X_i\quad(1\le i\le n)$$

となっています．このように，変数 $X_1,\dots,X_n$ のあいだに関係式 $X_iX_j=\sum_{k=1}^n a_{ij}^k X_k$ を考えるとき，これを $A=\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{C}X_i$ に $X_iX_j=\sum_{k=1}^n a_{ij}^kX_k$ で乗法を定めた環の表現といいます．なぜなら，

$$A=\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle\Big/\Big(X_iX_j-\sum_{k=1}^n a_{ij}^kX_k|1\le i,j\le n\Big)$$

[7] $\mathbb{C}\langle X_1,\dots,X_n\rangle$ は複素係数の n 変数非可換多項式環．

になるからです. [8]

この考えかたに慣れるため，今度は先に環を与えてみましょう．A を２行２列の上三角複素行列全体とします．すると，行列の加法・減法・乗法により A は環になります.

そこで，A の基底として $E_1 = E_{11}, F = E_{12}, E_2 = E_{22}$ をとりましょう．すると次の関係式が成り立ちます.

$$E_iE_j = \delta_{ij}E_i,\ E_1+E_2 = I,\ E_iF = \delta_{i1}F,\ FE_j = \delta_{2j}F,\ F^2 = O \tag{4}$$

ゆえに，A の表現を求めるとは，すなわち，関係式 (4) をみたす行列の組 (E_1, E_2, F) を求める問題であることがわかりました.

実は，この問題は $X^2 = O$ をみたす行列を求める問題とほぼ同じなのです.

2.4　いつも Jordan 標準形では芸がない

さて，$X^2 = O$ をみたす行列を求めなさい，といわれると普通の人は，素直に Jordan 標準形に直して，答えは

$$X = P\, diag(0, \cdots, 0, J, \cdots, J)P^{-1}$$

ただし，$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ かつ P は任意の可逆行列，と答えるでしょう.

でも別解もあるのです．$X \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ とし，部分空間 $V \subset \mathbb{C}^n$ を

$$V = \mathrm{Ker}\, X = \{v | Xv = 0\}$$

で定めます．$X^2 = O$ なので $\mathrm{Im}\, X \subset V$ です．V の基底をとり，$\{e_1, \ldots, e_l\}$ としましょう．基底の延長定理より，$e_{l+1}, \ldots, e_n$ を適当にとれば $\{e_1, \ldots, e_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になります．列ベクトルが $e_1, \ldots, e_n$ の行列を $T = (e_1, \ldots, e_n)$ とします．$\{e_1, \ldots, e_n\}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底なので，T は可逆行列です.

XT を計算しましょう．$1 \leq i \leq l$ のときは V の定義より $Xe_i = 0$ です．$l+1 \leq i \leq n$ のときは $Xe_i \in V$ ですから，適当な係数 a_{ij} を用いて $Xe_i = a_{11}e_1 + \cdots + a_{l1}e_l$ とかけます．このことから，$A \in \mathrm{Mat}(l, n-l, \mathbb{C})$ を $A = (a_{ij})$ で定めると,

$$XT = (Xe_1, \ldots, Xe_n) = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}$$

とかけることがわかります．つまり $T^{-1}XT = \left(\begin{smallmatrix} O & A \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ です．さらに座標変換することを考えます．$T' = \left(\begin{smallmatrix} P & O \\ O & Q \end{smallmatrix}\right)$ の形のものをとりましょう．すると,

$$(TT')^{-1}X(TT') = \begin{pmatrix} O & P^{-1}AQ \\ O & O \end{pmatrix}$$

[8] 右辺を B とおき，B の部分空間 $V = \mathbb{C}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}X_n$ に対し $X_iV \subset V$ を示せばよい．すると，$1 \in V$ より $V = B$ であるから，次元をみれば B から A への自然な全射が同型になることがわかる.

ですから，これを標準形にもっていくのは，Jordan 標準形ではなく，階数標準形です．こうして，もうひとつの答え

$$X = P\begin{pmatrix} O & E_{11}+\cdots+E_{rr} \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$$

が得られます．ここで，$r = \dim(\operatorname{Im} X) = n - \dim(\operatorname{Ker} X) = n - l \le l$ です．[9]

2.5 Jordan 標準形による答えと Kostant の定理

$X \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ が $X^n = O$ をみたすとき，X をべき零行列といいます．次の定理が Kostant の定理（の特別な場合）です．

定理 3. X がべき零行列ならば，行列 H, Y が存在して，関係式 (2) をみたす．

この定理と定理 1 を用いれば，$X^2 = O$ の Jordan 標準形による答えを得ることができます．このように，単に $X^2 = O$ を考えるのではなく，X を，行列の組 (X, Y, H) に埋めこむことにより分類する手法は，いまの場合はあまりご利益が感じられないかもしれませんが，実は任意の半単純 Lie 代数に適用できるという利点があります．

2.6 階数標準形による答えと２行２列上三角行列の環

２行２列上三角複素行列全体のなす環を $T(2, \mathbb{C})$ と書くことにします．$X^2 = O$ の解と $T(2, \mathbb{C})$ の表現との関係を説明しましょう．環 $T(2, \mathbb{C})$ の表現を考えることは関係式 (4)，すなわち

$$E_iE_j = \delta_{ij}E_i,\ E_1+E_2 = I,\ E_iF = \delta_{i1}F,\ FE_j = \delta_{2j}F,\ F^2 = O$$

をみたす複素行列の組 (E_1, E_2, F) を求めることと同じでした．$X^2 = O$ の解に対し，2.4 節のように基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を定め，行列 $E_1, E_2 \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ を線形変換

$$E_1 : \sum_{i=1}^{n} c_ie_i \mapsto \sum_{i=1}^{l} c_ie_i, \quad E_2 : \sum_{i=1}^{n} c_ie_i \mapsto \sum_{i=l+1}^{n} c_ie_i,$$

により定義しましょう．つまり $T^{-1}E_1T = \left(\begin{smallmatrix} I & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$, $T^{-1}E_2T = \left(\begin{smallmatrix} O & O \\ O & I \end{smallmatrix}\right)$ です．すると，$F = X$ とおけば行列の組 (E_1, E_2, F) は題意の関係式 (4) をみたし，$T(2, \mathbb{C})$ の表現を与えます．[10] つまり，先ほどは X を $U(sl_2)$ の関係式の中に埋めこみましたが，今回は X を $T(2, \mathbb{C})$ の関係式の中に埋めこむのです．

$T(2, \mathbb{C})$ の表現に関しては次の定理が成り立ちます．

[9] $X^2 = O$ より $\operatorname{Im} X \subset \operatorname{Ker} X$ なので $n - l \le l$ になります．

[10] $\operatorname{rank} X = n - l$ の条件より $F : \operatorname{Im} E_2 \to \operatorname{Im} E_1$ は単射です．

定理 4. (E_1, E_2, F) が関係式 (4) をみたすとき，$V = \operatorname{Im} E_1$，$W = \operatorname{Im} E_2$ とおく．

(1) $V = \operatorname{Ker} E_2$，$W = \operatorname{Ker} E_1$，$\mathbb{C}^n = V \bigoplus W$.

(2) $FW \subset V$ であって，V の基底 $\{e_1, \dots, e_l\}$ と W の基底 $\{f_1, \dots, f_{n-l}\}$ を適当にとれば，V の基底に関しては $Fe_i = 0$ $(1 \le i \le l)$ で，W の基底に関しては

$$F(f_1, \dots, f_{n-l}) = (e_1, \dots, e_l)A$$

かつ $A = E_{11} + \dots + E_{rr}$ とできる．[11]　つまり，$V \bigoplus W$ 上で F は

$$F(e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_{n-l}) = (e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_{n-l}) \begin{pmatrix} O & E_{11} + \dots + E_{rr} \\ O & O \end{pmatrix}$$

と行列表示される．

ここで，$F|_W$ が単射[12] とすれば $\operatorname{Ker} F = V$ になります．[13]

この定理の内容をいいかえると，任意の $T(2, \mathbb{C})$ の表現が，

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

の直和であるともいえます．これは，有向グラフ $\circ \longrightarrow \circ$ の頂点にベクトル空間を，辺に線形写像を対応させることにより，$T(2, \mathbb{C})$ の表現を記述できることを示しています．

ここで，もっと一般の有向グラフを考えることにより，$X^2 = O$ の解を $T(2, \mathbb{C})$ に埋めこむ手法は道代数の表現論という考えかたにつながります．こうして，先ほどの Lie 代数の表現論とは別の方向へ大きな一般化が得られるのです．[14]

3　３日め

3.1　直既約表現と既約表現

ここで，言葉を準備しておきましょう．考える問題は昨日までと同じで，関係式を行列で表現すること，つまり

$$(\sharp) \qquad f_1(X_1, \dots, X_n) = 0, \dots, f_r(X_1, \dots, X_n) = 0$$

[11] $\mathbb{C}^n$ を部分空間の直和に分解して，部分空間ごとに分けて記述すれば

$$\begin{cases} \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}f_i \ (1 \le i \le r) \text{ 上で } Ff_i = e_i,\ Fe_i = 0, \text{ これを } \mathbb{C}f_i \xrightarrow{F} \mathbb{C}e_i \text{ とかく.} \\ \mathbb{C}f_i \ (r < i \le n-l) \text{ 上で } Ff_i = 0, \text{ これを } \mathbb{C}f_i \xrightarrow{F} 0 \text{ とかく.} \\ \mathbb{C}e_i \ (r < i \le l) \text{ 上で } Fe_i = 0,\ \text{ これを } 0 \xrightarrow{F} \mathbb{C}e_i \text{ とかく.} \end{cases}$$

[12] つまり，A の列ベクトルが１次独立.

[13] 一般には $\operatorname{Ker} F \supset V$ です.

[14] $T(2, \mathbb{C})$ は有向グラフ $\circ \longrightarrow \circ$ の道代数です.

をみたす行列の組，$X = (X_1, \ldots, X_n)$，を求めることです．

定義 5. どんな可逆行列 P をとっても $P^{-1}X_iP$ を同時ブロック対角化できないとする．すなわち，どんな可逆行列 P をとっても

$$P^{-1}X_iP = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} & O \\ O & X_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \le i \le n)$$

の形にできないとする．このとき，この行列表現は直既約である，という．

定義 6. どんな可逆行列 P をとっても $P^{-1}X_iP$ を同時ブロック三角化できないとする．すなわち，どんな可逆行列 P をとっても

$$P^{-1}X_iP = \begin{pmatrix} X_i^{(1)} & Y_i \\ O & X_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1 \le i \le n)$$

の形にできないとする．このとき，この行列表現は既約である，という．

定理 1 の場合は，直既約であることと既約であることが同値で，定理 1 で与えた行列表現が，既約なものをすべて尽くします．しかし，一般には直既約な表現で既約でないものがあるのが普通です．たとえば定理 4 をみてみましょう．2 次元表現

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は $T(2, \mathbb{C})$ の既約な行列表現ではありません．三角化されているからです．しかし，この表現は直既約な行列表現です．なぜならこれ以上同時ブロック対角化しようとすると全部を一斉に対角行列にするしかないですが，F は固有ベクトルを 1 次元しかもたないので，これは不可能だからです．$T(2, \mathbb{C})$ の場合，この 2 次元表現と 2 つの 1 次元表現

$$E_1 = (1),\ E_2 = (0),\ F = (0), \quad E_1 = (0),\ E_2 = (1),\ F = (0),$$

の，全部で 3 つの直既約表現があります．ここで記号を導入しましょう．

定義 7. 関係式 ($\sharp$) を行列で表現せよ，という問題が与えられたとき，対応する環

$$\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle / (f_1, \ldots, f_r)$$

を A とかき，A の直既約表現の集合を $\mathrm{Ind}(A)$ とかく．ただし，座標変換で移りあうものは同じとみなす．[15]

直既約な表現が全部わかれば，与えられた関係式を行列表現する問題は完全に解けた，といってよいでしょう．座標変換したとき同時ブロック対角化され，その各ブロック行列のかたちが全部わかるわけですから．

[15] 専門家の言葉では，$\mathrm{Ind}(A)$ を直既約 A–加群の同型類のなす集合とする，といういいかたになる．

3.2 $X^2 = O$ の解の与える $T(2,\mathbb{C})$ の表現を直既約表現に分解すると？

$X^2 = O$ の階数標準形による答えと Jordan 標準形による答えの関係を見てみます．$J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ として，Jordan 標準形による答えは，

$$X = P\, diag(0, \cdots, 0, J, \cdots, J) P^{-1}$$

でした．$P = (e_1, \ldots, e_n)$ とし，J が r 個並んでいるとしましょう．すると，$V = \operatorname{Ker} X$ は

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2r} \mathbb{C} e_i \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathbb{C} e_{n-1-2j} \right)$$

となります．V の基底として，

$$\{e_1, \ldots, e_{n-2r}, e_{n-2r+1}, e_{n-2r+3}, \ldots, e_{n-1}\}$$

をとり，$\{e_{n-2r+2}, \ldots, e_n\}$ を補充してこの基底を $\mathbb{C}^n$ の基底に延長しましょう．すると，これらの基底ベクトル e_{n-2j} $(0 \le j \le r-1)$ は $Xe_{n-2j} = e_{n-1-2j}$ をみたしますから，

$$f_i = \begin{cases} e_{2i+n-2r-1} & (1 \le i \le r) \\ e_{i-r} & (r < i \le n-r) \\ e_{2i-n} & (n-r < i \le n) \end{cases}$$

とおくと，$1 \le i \le n-r$ のとき $Xf_i = 0$ で，$n-r < i \le n$ のとき $i = n-r+j$ $(1 \le j \le r)$ とおけば

$$Xf_{n-r+j} = Xe_{n-2(r-j)} = e_{n-1-2(r-j)} = f_j$$

ですから，$Q = (f_1, \ldots, f_n)$ とおけば $Q^{-1}XQ$ が階数標準形になることがわかります．

つまり，Jordan 標準形を与える基底を並べかえた基底をとれば階数標準形が得られるわけです．

逆方向に考えれば，階数標準形を与える基底を並べかえた基底をとれば Jordan 標準形が得られるわけですが，これは $X^2 = O$ の解の与える $T(2,\mathbb{C})$ の表現を直既約表現

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

の直和へ分解することになっています．なぜなら，同じ直和成分に入る基底元が隣り同士になるように並べかえると，得られる直和分解は（$X|_W$ の単射性を仮定すると，２番めの成分は現れないことに注意すると）

$$(0 \longrightarrow \mathbb{C})^{\oplus(n-2r)} \bigoplus \left(\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathbb{C} \right)^{\oplus r}$$