大気と海の流体力学

山田 道夫

1　はじめに —大きなスケールの流体現象—

ここでは大気や海の運動を対象として、それらの記述の基礎となる流体力学についてお話しします。大気や海の運動が、日常目にする流体運動とはかなり違った性質を持つことに触れたいと思います[1]。

地球を覆う大気の運動や海洋における海水の運動は、空気や水が流体であるため、流体力学の法則に従います。その意味では、大気や海の運動も、車のまわりの気流やプールの水の動きと、基本的には何も変わるところがありません。一括して流体力学という名前で呼ばれている分野の運動の一例に過ぎない、と言うこともできるでしょう。

もともと流体力学は、身の回りの空気や水の流れを理解しようとするところから始まりました。学校で習わなくても、我々は、流体の運動について、日々の経験を通して非常に多くのことを知っています。泳いだり模型ボートを作ったりすることで、利用することさえ少なくありません。そのため流体力学では、提起される問題が、知っていることをどうやって説明するか、という形になる場合が少なくありません。ミクロの物理学では現象そのものをほとんど見ることができない、というのとは大違いです。

しかし残念なことに、あるいは面白いことに、現象そのものを良く知っているにもかかわらず、基礎方程式から論理的に説明する、ということになると、意外に不完全なことしかできない、というのも、現在の流体力学の性格の一つです。一番簡単な例はおそらく、水道管の中の水の流れをきちんと数式で記述する、という問題でしょう。我々は、水の流れを記述する方程式を知っています。それはナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式と呼ばれる偏微分方程式で、１００年以上も前に発見されたものです。この方程式については、これまで膨大な実験的／数値的検証が行われ、現在のところ、ある程度自然で基本的と考えられる流体の運動なら、この方程式が高精度の記述を与えると考えられています。その意味で、この方程式には深刻な欠陥はない、と言えます[2]。ここでそのナビエ・ストークス

[1] ここではカオスには触れません。むしろ明瞭な流れパターンを話題にします。

[2] 本当を言うと、深刻な欠陥が残っている数学的可能性はゼロではありません。この方程式に対するなめらかな解の大域存在は証明されていません（クレイ研究所の百万ドル問題です）。

方程式を書いておきましょう。記号の意味は後で述べます。

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

さて、例えば水道管の中では、流れが速くなると、激しい乱れが発生するようになります。この乱れた状態は乱流と呼ばれ、蛇口に近い水道管の中などは、ほとんどの場合この乱流状態になっています。しかし、我々はこの乱流状態の性質を、ナビエ・ストークス方程式から出発して論理的飛躍なしに導くことができません[3]。例えば、理論的にも実用的にも重要な、乱流速度の平均（平均流）や低次モーメント（平均的な運動量輸送）をきちんと求める手段はまだ見つかっていません。現在の自然科学／数学の水準ではまだまだ不可能なのかもしれません。いずれにせよ、方程式は知っているけれど、その解の性質、特に、複雑な解の性質（平均的性質）をどのようにして導いたらよいのか分からない、というのがこの分野の現状で、膨大な研究と状況証拠にもかかわらず、乱流現象の論理的記述方法の開発は２１世紀の問題として残されています。

水道管内の流れは、断面が円形ということもあり、流体運動では最も簡単な部類に属します。しかし、そのような流れでさえも記述不能ということであれば、ほとんどすべての流れは記述不可能、ということになります。実際、ここで話題にしようとしている大気や海の中の流れなどは、その全てが乱流状態と言ってもよく、そうである以上、基礎方程式から出発する厳密で論理的な記述は殆ど絶望的、といっても間違いではありません。

しかし奇妙なことに、現実には方程式を用いた記述がある程度可能で、実際、天気の数値予報や津波の予報が行われ、実用に供されています。このことは少し説明が必要でしょう。

数値予報や波浪予報が対象にするのは、大きなスケールでみた時の流れです。大気も海も乱流になっていて、非常に小さなスケール（1mm 程度まで）の運動が共存しています。このスケールから地球を覆う 1 万 km のスケールの運動までを一挙に扱おうとするなら、上に書いたナビエ・ストークス方程式を使えばOKです。方程式に未知な部分はありません。しかしこのような記述は、事実上不可能です。厚さ 10km の大気ではこの運動の自由度はおよそ $(1\text{万 km}/1\text{mm})^2 \times (10\text{km}/1\text{mm}) = 10^{27}$ と見積もられ、テラ（10^{12}）バイトのメモリをテラの個数分用意しても、まだ足りません。しかし、この場合我々が知りたいのは、1mm スケールの細かな運動などではなく、10km～1 万 km のスケールの大きな流れの様子です。ちょうど統計力学や熱力学で、個々の分子の運動などではなく、物質全体としての性質を知りたいの

[3]方程式を数値的に解いて乱流解を得ることはできますが、これは実験と同じことです。乱流解の性質を理論的に導くことは、未だ誰も成功していません。

と同じことです。我々の場合には、まずは、平均的な流れを知ることが目標です。

そこで、細かな運動までを記述するナビエ・ストークス方程式を「平均化」して、平均流に対する方程式を作ります。いわば乱流の細かな振る舞いを塗りつぶしてしまった方程式です。平均量を $\overline{\mathbf{u}}, \overline{p}$ と書くと、この方程式は

$$\rho(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}) = -\nabla \overline{p} + \mu \Delta \overline{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{R} \tag{2}$$

となります（面倒なので「密度」ρ は一定としました）。元の Navier-Stokes 方程式と異なるのは右辺の最後の項だけですが、これがすべての困難の原因であり、どのような性質を持つ項なのか、現在のところ理論的に導くことができません。しかしそうはいっても、理工学の広い分野においてこの方程式を解くことが要求されているため、この項を「適当に仮定」することが日常的に行われています。

例えば、ある最も簡単な仮定の場合には、方程式の形は結局元の (1) 式と同じでパラメータ μ の値を（何桁も！）大きくしたものが得られるのですが、面白いことに、このような方程式でも本当の平均流をなんとなく再現することが出来ます[4]。つまり、乱流の効果といってもこの場合は単に１つの係数の値に帰着されてしまうのです。もちろん、もっと精密に合わそうとして複雑な仮定を導入することも多く行われ、その場合は、乱流の性質をうまく再現するように何個もの係数の値が調整されます[5]。例えば、毎日の天気の予想に使われる数値予報には、このようなパラメータがいくつも入っていて、微妙な調節が行われているわけです。数値予報の場合この調節は、もちろん、「地球の気象現象を再現するように」行われていますが、そのため、少なくともそのままでは、例えば火星の天気の予報には使えません。計算に用いる方程式が「理論式＋経験則」という組み合わせで作られているためです。

とはいえ、たとえ乱流になっていても、難しい部分は方程式のごく一部分（例えばある種の係数の値など）に凝縮することができるため方程式の形は元の (1) 式に近い、ということは重要です。このことは、大気や海の運動の少なくともおおまかな部分は、流れがあたかも乱流ではないように考えてもよい、ということを示唆するからです。また、このことは、大気や海の流れの特徴を、室内実験によって再現できる、という可能性も示唆しています。ここでお話しする内容や数式は、このような事情の上に立って用いることになります。

大気や海の運動について、もう一つの性格を確認しておきます。先に、流体力

[4] これは「なんとなく」に過ぎずちゃんとした工学的な要求を満たそうとするような場合にはお勧めできません。

[5] たくさんの係数を導入すればいくらでも精密に合わせられる、ということはありますが、工学的には、できるだけ少ない係数でたくさんの流れを正しく再現することや、「仮定」のもっともらしさ、が問題になります。実際にはこのような方法は高度に発達していて多くの工学的用途に用いられています。基礎方程式から完全に論理的に導かれるわけではありませんが、多くの実験や経験によってそれなりに妥当な係数値が選ばれているわけです。

学は、日常経験で知っていることの説明、という性格が強い、と書きました。しかし、これは大気や海の運動についてはあまり正しくない、ということも強調したいと思います。大気や海の運動は、日常生活の中の流体運動とは異なり、自分の目で見る、という経験が実は最近までほとんどありませんでした。もちろん、目の前の海水や空気の動きを見ることはできます。しかし、何百キロ、何千キロという大きなスケールで見たとき、大気や海の運動がどのように見えるのか、というのは、もはや直観的には捕らえがたい領域に属します。近年、気象衛星が打ち上げられるようになって、雲の動きを通して大気運動の様子が分かるようになってきましたが、それでも、運動が何週間、何ヶ月もの時間をかけて変化していく、というような現象は、日常的に親しんでいるとはとてもいえません。大気や海の運動は、むしろ、日常経験では知らない流体運動、と言った方が良いでしょう。ここでは、そのような大規模スケールの流体運動についてお話ししたいと思います。

2 Navier-Stokes 方程式

とにかくも流体運動の基礎方程式です。

時刻 t で $\mathbf{x} = (x, y, z)$ という点における流体の状態は、各点における流体の密度、速度（３成分)、圧力の合計５つの量を指定することで決まります。従って、流体運動の方程式はこれらの量の時間変化を記述するもので、通常、質量、運動量、エネルギー、の３つの保存則から導かれます。

流体の密度を $\rho(t, \mathbf{x})$、速度を $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x}), w(t, \mathbf{x}))$、圧力を $p(t, \mathbf{x})$ とします（以下ではしばしば t や $\mathbf{x}$ の一方あるいは両方を省略することがあります)。これらの量を用いると、質量保存則は連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{3}$$

運動量保存則は Navier-Stokes 方程式

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{4}$$

になります。ここで $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$、$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ です。この Navier-Stokes 方程式に現れる係数 μ を粘性係数と呼びます。以下では、簡単のため密度 ρ が一定の場合を中心に扱うので、エネルギー方程式は考えないことにします。

上の方程式は慣性系における流体の運動方程式です。座標系が、慣性系ではなく、地球のように（あまり大きくない）回転角速度ベクトル Ω で一定回転している場合には、方程式が次のように少し変形されます。

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \tag{5}$$

この $2\Omega \times \mathbf{u}$ の項はコリオリ力を表しています。

3　薄い流体層が回る

大気や海の特徴は、まず、とにかく非常に薄いことです。大気（対流圏）ならばおよそ 10km、海ならば平均海深は 4km 弱に過ぎません。一方、横の広がりは、地球一周が 4 万 km、太平洋の幅でも約 1 万 km。幅と深さの比が 1m 対 1mm 程度の非常に薄い層です。このような薄い層の中の運動なので、殆ど横方向だけの２次元運動 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u(x,y), v(x,y))$ と考えることにします。簡単のため密度 ρ も一定とおきますが、層の厚さ H は変化し得るので、連続方程式は、流体が集まると層が厚くなる、という方程式になります。また運動方程式は、線形部分のみを考え、粘性を無視します。（なお、これらの方程式は本当は球座標で書くべきですが、以下概念的な話なので平面座標で書くことにします。）

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g\nabla H \tag{7}$$

さて問題は、流体の運動がこの方程式に従って時間発展すると何が起こるか、です。このような方程式は、フーリエ変換（フーリエ級数展開）を使う、という一般的処方がありますので、ここでもそれに従います。簡単に行うには平均の深さを H_0 として

$$H = H_0 + \hat{h}(\mathbf{k}) \exp(i(\mathbf{kx} - \omega t)), \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \exp(i(\mathbf{kx} - \omega t)) \tag{8}$$

とおき、方程式に代入すると、次の式（分散関係式）が得られます。

$$\omega(\omega^2 - f^2 - gH_0(k_x^2 + k_y^2)) = 0 \tag{9}$$

この式は、振動数 ω として

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm\sqrt{f^2 + gH_0(k_x^2 + k_y^2)} \tag{10}$$

の２種類のものがあることを示しています。この意味はとても重要です。なぜなら、波数 $\mathbf{k}$ がゼロでない解は、時間が経つと波動として遠くへ飛び去っていく、と期待されるからです。この結果、後に残されるものは、

- $\mathbf{k} = 0$ で振動数が $\pm f$ の運動
- 振動数がゼロの運動

の2種類です。前者の運動は、全体が系の回転角速度と同じ角速度で一様に回転する運動で「慣性振動」と呼ばれます。$\mathbf{k}=0$ なので構造は持ちません。ところが後者の運動は、あらゆる波数 $\mathbf{k}$ を持つため、構造を持つことができます。この運動は、

$$f\mathbf{k}\times\mathbf{u} = -g\nabla H \tag{11}$$

すなわち

$$u = -\frac{g}{f}\frac{\partial H}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f}\frac{\partial H}{\partial x} \tag{12}$$

と関係を満たしていて、コリオリ力と気圧傾度力が釣り合った形をしています。これを地衡風平衡といいます。

つまり、回転系の薄い一様な流体層は、最初かき乱されいても、時間とともにこの地衡風平衡に近づく、という基本的性質を持っています。天気図に等圧線が書かれ、天気を「気圧配置」で解説するのはこのため、つまり、回転系の薄い流体層では地衡風平衡が運動の第一近似だからです。これは回転していない系とは大きく違う点です。

実際の気象現象は、この地衡風平衡の周辺をうろうろしながら時間変化しているわけです。一方、地衡風平衡の方程式は、大変便利なのですが、時間微分を含まず、従って、現象の時間発展を記述することはできません。といって、もとの「フルセット」の方程式は複雑すぎて扱いが面倒です。そこで、「地衡風平衡から少しだけはずれた現象の時間発展を記述するのに便利な方程式」が望まれるわけです。もとの「フルセット」の方程式からそのような方程式を得るためには、現象の中にある小さな量（それを ϵ と書くことにします）に着目し、速度などの変数を ϵ で展開します。この小さな量は、現象の非線形性を特徴づける量、すなわち非線形項 $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ の大きさとコリオリ項 $f\mathbf{k}\times\mathbf{u}$ の大きさの比を選びます。代表的な長さ L、代表的な速度の大きさ U を用いるとこの比は

$$\epsilon = \frac{|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|}{|f\mathbf{k}\times\mathbf{u}|} \sim \frac{U}{fL} \equiv R_o \tag{13}$$

となり、重要な量であるためロスビー (Rossby) 数という名前がついています。すべてをこの R_o で展開する、というのが基本的思想です。しかしその前に、地球は丸い、ということをちゃんと考慮しておかなければなりません。

4　地球は丸い

地球が球形であることの効果は、まず表面積が有限であること、つぎに地球自転の影響の強さが緯度によって異なることです。北極や南極では自転の効果は明

瞭ですが、赤道上ではコリオリ力はゼロになります。しかしこのことは、赤道上では自転効果が全くない、ということになりません。むしろその逆であるとも言える、というのがこの節の話です。

地球自転効果を反映するコリオリ項 $f\mathbf{k}\times\mathbf{u}$ の係数 f の緯度依存性を、最も簡単な形で考慮するには、y 軸を南北方向に取って、$f=f_0+\beta y$ とおくことです。もちろん、これでは「球形」であることを正しく反映できませんが、とにかくも f が緯度によって変化することが何をもたらすかを、少なくとも定性的に見ることができます。このような近似はベータ面近似と呼ばれます。

方程式 (6)(7) にこの近似を適用し、速度 $\mathbf{u}$ が小さい、と仮定すると、次のような近似解が得られます。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(\mathbf{k}) \\ \hat{v}(\mathbf{k}) \\ \hat{h}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)], \quad \omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2+k_y^2+(1/\lambda^2)} \tag{14}$$

ここで $\lambda=\sqrt{gH_0}/f_0$ とおきました（ロスビーの変形半径）。この解は、ロスビー波と呼ばれ、$\beta>0$ ならば x 方向に負の位相速度を持つ波を表しています。

ロスビー波が面白いのは $\beta=0$ では存在しないこと、つまり、一様回転では存在しない波だという点です。また β は、コリオリ効果が消滅する赤道において最も大きな値をとることにも注意してください。回転効果そのものではなく、回転効果の位置依存性がロスビー波の原因となっています。またロスビー波は、その他の波と異なり、流体層の表面にふたをしても（つまり表面変位がゼロであっても）波が存在し得ることです。このときロスビー波の分散関係式はより簡単な式になります。

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2+k_y^2} \tag{15}$$

一般に波動現象が重要なのは、波動は流れによりも速く遠くにエネルギーや運動量を運んでゆくからです。ロスビー波も例外ではありません。そのため地球規模の流体運動を考えるときには、ロスビー波、つまり回転効果の緯度による変化を無視することはできません。

このようなロスビー波によって流れはどうなるのでしょうか。実際の地球大気や海洋では、ロスビー波以外にもさまざまな事が起こっているため、現象を解剖することが容易ではありません。そこで、波としてはロスビー波しかない、という状況を作ってやれば、話は単純になります。極端な例は、一定回転する球面上に２次元の流体が乗っている、という場合です。このような「大気」では厚さがな

いので、ふたをしたのと同じことになり、ロスビー波だけが生き残っています[6]。

このように簡単な状況でも、どんな「大気」の流れが実現されるのかを理論的に知ることは、現在のところ、殆ど不可能です。不可能の原因はいくつかありますが、一番大きなものは、基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式が散逸系の非線形方程式であり、解を求めるための一般的処方が存在しないことにあります。現在の段階でなんとか理論的に扱えるのは、せいぜい、線形現象（これも場合によっては大変難しいものですが）か弱非線形現象（非線形相互作用の「最低次」のみ考慮する）に限られ、強い非線形性を伴う現象については有効な手段が存在しません。従って、解の様子を調べるためには、コンピュータで方程式を数値的に解く、という方法しかないのが実情です。

数値的方法は実験と同じです。多くの場合を試してみれば、大体の見取り図を作ることが出来ますが、理論的な検討なしでは、大事な場合を落としている危険が常につきまといます。とはいえ、一つの実験／数値実験が理論よりもずっと多くのことを教えてくれる場合も、しばしば起こります。解を具体的に見る、ということは、それ自身面白いものでもあり、アイデアの源にもなります。それまで予想していなかった結果を得ることさえ、まれではありません。

そこで、ここでも数値実験をしてみます。回転球面上に２次元流体を乗せて、流れを十分かき回して乱しておいてからスタートさせます。平面上の２次元流体運動では、このような場合、だんだんと大きな渦が発達していくことが知られています。これは、３次元流体の場合、渦がどんどん壊れてたくさんの小さな渦になってゆくのとは対照的です。さて回転する球面上では流れはどのようになると思われますか？

5　海岸の効果

前節で述べたことは、流体が球面上全部を動くことができるとき、つまり「大気」のような場合に相当しています。もし「岸」があったら、つまり「海」のような場合は、流れはどうなるのでしょうか。「岸」つまり境界では、流れはなくなる、つまり $\mathbf{u} = 0$ という条件を満たさなければなりません（ナビエ・ストークス方程式の境界条件）。この条件は、第一に、流れに境界を越えることはできない、という制約をもたらします。いわば幾何学的な制約です。

最も簡単な形の境界として、ちょうど回転球面の縦半分が「海」であるような場

[6]実を言うと、この「大気」では球面調和関数＝ロスビー波となるため、「大気運動」はすべてロスビー波から出来ています。なお、ここでは直観的にイメージするため「大気」という言葉を使っていますが、このような流れと本当の大気の隔たりは相当大きいことは注意しておきます。そもそも大気運動の重要な要素である熱が、ここでは全く考慮されていません。