

# 3次元多様体のトポロジー

葉廣和夫

## 1 多様体とは?

### 1.1 位相空間と位相多様体

簡単に言うと、多様体とは、各点の近くではユークリッド空間と同一視できるような図形のことです。

まずは、(位相)多様体の厳密な定義を理解することを目標とします。いったん定義を説明したあとは直感的な説明で進めるので、完全に理解できなくても心配ありません。

定義 1. 位相空間  $(X, \mathcal{O})$  とは集合  $X$  と  $X$  の部分集合族 (つまり、 $X$  の部分集合からなる集合)  $\mathcal{O}$  との組で以下を満たすものとします。

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ .
2.  $U, V \in \mathcal{O}$  ならば  $U \cap V \in \mathcal{O}$  がなりたつ。
3.  $\mathcal{O}$  の元の族  $U_\lambda \in \mathcal{O}, \lambda \in \Lambda$ , が与えられたとき、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ .

$X$  の元を、点と呼び、 $\mathcal{O}$  の元を  $(X, \mathcal{O})$  の (または、 $X$  の) 開集合と呼びます。

$\mathcal{O}$  を集合  $X$  の位相と呼びます。集合  $X$  の位相を決めるには「 $X$  の開集合」の概念を決めれば良いことになります。考えている位相  $\mathcal{O}$  があきらかなときは、 $(X, \mathcal{O})$  のかわりに  $X$  と書くこともあります。

以下では、常に  $n \geq 1$  とします。また、 $R$  で実数全体の集合を表します。

例 1.  $n$  次元ユークリッド空間  $R^n$  とは  $n$  個の実数の組  $(x_1, \dots, x_n)$  の全体からなる集合です。  $x = (x_1, \dots, x_n)$  のノルム  $|x|$  を

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

で定義します。 $R^n$  内の2点  $x, y$  の距離は

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で定義されます(ただし、 $y = (y_1, \dots, y_n)$ )。

$R^n$  の位相を次のように定めます。 $R^n$  の部分集合  $U$  が開集合であるとは、「任意の  $p \in U$  に対しある実数  $\epsilon > 0$  が存在して、 $R^n$  内の  $p$  を中心とする半径  $\epsilon$  の開球体

$$\overset{\circ}{B}^n(\epsilon, p) = \{x \in R^n \mid |x - p| < \epsilon\}$$

は  $U$  に含まれる」ことを言います。つまり、 $U$  のどのような点  $p$  をとっても、それに十分近い点たちは全て  $U$  に入っているということです。

例 2. 実数直線  $R$  (1次元ユークリッド空間  $R^1$ ) 内の部分集合  $\{x \in R \mid x > 0\}$  は  $R$  内の開集合ですが、 $\{x \in R \mid x \geq 0\}$  はそうではありません。(点 0 において条件をみたしていない。)

定義 2.  $(X, \mathcal{O})$  が位相空間とします。部分集合  $A \subset X$  の位相  $\mathcal{O}_A$  を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$$

により定義し、 $(A, \mathcal{O}_A)$  を  $(X, \mathcal{O}_X)$  の部分空間と呼びます。位相空間の部分集合には通常、部分空間としての位相を入れ、位相空間とみなします。

定義 3.  $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$  を位相空間とします。全単射  $f: X \rightarrow X'$  が  $X$  から  $X'$  の上への同相写像であるとは、

$$\mathcal{O}' = \{f(U) \mid U \in \mathcal{O}\}$$

が成り立つことを言います。このとき、 $(X, \mathcal{O})$  と  $(X', \mathcal{O}')$  は互いに同相であるといい、 $(X, \mathcal{O}) \cong (X', \mathcal{O}')$  または  $X \cong X'$  と表します。

例 3.  $R^n$  は  $n$  次元開球体  $\overset{\circ}{B}^n = \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$  (前の記号では  $\overset{\circ}{B}^n(0, 1)$ ) と同相です。

同相でない例としては、つぎのようなものがあります。

- $m \neq n$  のとき、 $R^m$  と  $R^n$  は同相ではありません。
- $R^n$  は  $R^n$  から原点を除いて得られる部分空間  $R^n \setminus \{0\}$  と同相ではありません。

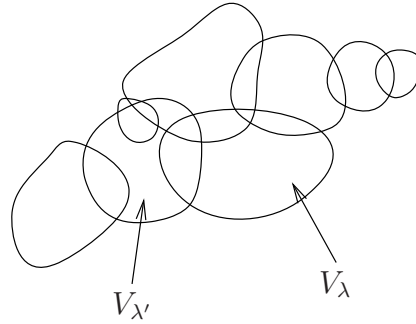


図 1: 多様体が  $R^n$  に同相な開集合たちによって覆われている様子。

これらは予備知識なしにすぐに証明することはできません。しかし例えば直線  $R^1$  と平面  $R^2$  が同相でない<sup>1</sup>ことは「直観的にはあきらか」です。

定義 4. 位相空間  $(M, \mathcal{O})$  が、 $n$  次元位相多様体であるとは、

1. (Hausdorff 性)  $M$  の相異なる 2 点  $p, q$  は、開集合で分離されます。(つまり、 $p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$  なる開集合  $U, V$  が存在します。)
2.  $M$  は、 $R^n$  に同相な開集合たちで覆われます。(つまり、 $R^n$  に同相な  $M$  の開集合たち  $V_\lambda \in \mathcal{O}, \lambda \in \Lambda$ , が存在して、 $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  が成り立ちます。)

以下では、位相多様体のことを単に多様体と呼ぶことにします。

上の定義より、 $n$  次元多様体は、 $R^n$  のコピーを張り合わせることに得られることがわかります。(図 1 参照)

例 4. (1)  $R^n$  は  $n$  次元多様体です。なぜなら、 $R^n$  と同相な開集合  $R^n$  自身で覆われるからです。

(2)  $U$  を  $R^n$  の開集合とします。このとき、 $U$  は  $n$  次元多様体です。なぜなら、開集合の定義により、 $U$  の各点  $p$  を含む開球体が  $U$  に含まれ、開球体は  $R^n$  に同相だからです。

(3)  $S^n = \{x \in R^{n+1} \mid |x| = 1\}$  は、 $n$  次元多様体です。

<sup>1</sup>これを証明するには、例えば次のような議論をします。 $R^1$  と  $R^2$  が同相であると仮定します(背理法)。 $f: R^1 \xrightarrow{\cong} R^2$  という同相写像があります。 $R^1$  から原点  $0 \in R^1$  を除いた部分空間  $R^1 \setminus \{0\}$  と、 $R^2$  から  $f(0) \in R^2$  を除いた部分空間  $R^2 \setminus \{f(0)\}$  とが同相であることが結論できます。ここで、 $R^2 \setminus \{f(0)\}$  は弧状連結 (§1.2 参照) ですが、 $R^1 \setminus \{0\}$  はそうでないことが結論できます。弧状連結性が同相によって不変な性質であることに矛盾します。よって  $R^1$  と  $R^2$  は同相ではありません。

$R^n$  の部分空間  $R_+^n$  を

$$R_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_n \geq 0\}$$

で定義します。

定義 5. 位相空間  $(M, \mathcal{O})$  が、境界つき  $n$  次元多様体であるとは、

1. (Hausdorff 性)  $M$  の相異なる 2 点  $p, q$  は、開集合で分離されます。
2.  $M$  は、 $R^n$  または  $R_+^n$  に同相な開集合たちで覆われます。

$M$  が  $n$  次元境界つき多様体であるとき、 $M$  内の  $R^n$  に同相なすべての開集合の和を  $M$  の内部といい、 $\text{int } M$  で表します。 $\partial M = M \setminus \text{int } M$  とおき、 $M$  の境界とよびます。 $\text{int } M$  は、(境界を持たない)  $n$  次元多様体であり、 $\partial M$  は、(境界を持たない)  $(n-1)$  次元多様体となります。(境界を持たない) 多様体の概念は、境界が空であるような境界つき多様体の概念と一致します。

例 5. (1)  $R_+^n$  は、境界つき  $n$  次元多様体であり、

$$\partial R_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in R\}$$

は  $R^{n-1}$  に同相です。

(2)  $n$  次元円盤 (または  $n$  次元球体)

$$D^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$$

は、境界つき  $n$  次元多様体であり、 $\partial D^n = S^{n-1}$  となります。

## 1.2 連結性

以上のような調子で進めていると時間がいくらあっても足りないので、ここから先は厳密性を犠牲にして直感に頼ることにします。

定義 6.  $[0, 1]$  で閉区間  $\{t \in R \mid 0 \leq t \leq 1\}$  を表します。

位相空間  $(X, \mathcal{O})$  における点  $p \in X$  から点  $q \in X$  への道とは、連続な写像  $f: [0, 1] \rightarrow X$  で  $f(0) = p$ ,  $f(1) = q$  を満たすもののことを言います (図 2)。(位相空間の間の写像  $f$  が「連続」であるとは、 $f$  が近い 2 点を近くの 2 点にうつっていて、飛躍がないことです。<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> 正確な定義によると、 $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}')$  が連続であるとは、任意の  $V \in \mathcal{O}'$  に対して  $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$  となることです。

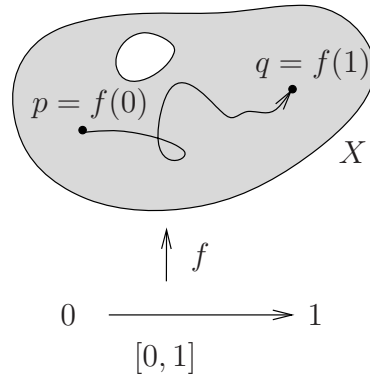


図 2:

定義 7. 位相空間  $(X, \mathcal{O})$  が弧状連結 であるとは、任意の 2 点  $p, q \in X$  に  
 対し、 $p$  から  $q$  への道が存在することを言います。

例 6.  $R^n, S^n$  は弧状連結です。

以下では、多様体が弧状連結であるとき単に連結 であると言います。<sup>3</sup>

### 1.3 コンパクト性

定義 8.  $M$  を  $n$  次元多様体 (境界を持って持たなくても良い) としま  
 す。  $M$  がコンパクト<sup>4</sup> であるとは、 $n$  次元球体  $D^n$  に同相な有限個の部  
 分空間の和集合となっていることをいいます。

例 7. (1)  $R^n$  ( $n \geq 1$ ) の空でない開集合はコンパクトではありません。  
 (2)  $S^n, D^n$  は、コンパクトな  $n$  次元多様体です。

以下では、「(境界つき)多様体」といったときには、「コンパクトな(境  
 界つき)多様体」を意味するものとします。(コンパクトで)境界のない  
 多様体を閉多様体と呼びます。

<sup>3</sup>連結性は一般の位相空間に対して定義されますが、多様体に対しては、弧状連結性  
 と一致します。

<sup>4</sup>通常、コンパクト性は任意の位相空間に定義されていて、ここでの定義とは異なり  
 ます。

## 1.4 向き

$\text{id} : R^n \rightarrow R^n, x \mapsto x$  を恒等写像とします。また、 $\rho : R^n \rightarrow R^n$  を

$$\rho(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

と定義します。 $\text{id}, \rho$  は同相写像です。 $\rho$  がユークリッド空間  $R^n$  をそれ自身に「裏返し」に写していることに、注意してください。

定義 9. 位相空間の間の写像  $f : X \rightarrow Y$  が  $X$  中への同相写像 であるとは、 $f$  が  $X$  と  $f$  の像  $f(X) \subset Y$  との間の同相写像になっていることをいいます。

定義 10. 位相空間  $X$  から位相空間  $Y$  の中への同相写像が互いにイソトピックであるとは、 $f$  を連続的に変形させていって  $g$  を得ることができることを言います。ただし途中の段階で常に  $X$  から  $Y$  の中への同相写像になっていなければなりません。そのような変形のさせかたをイソトピーとよびます。もう少し詳しくいうと、 $f$  と  $g$  の間のイソトピーとは  $t \in [0, 1]$  に対して連続的に定義された同相写像の族  $\{f_t \mid t \in [0, 1]\}$  で、 $f_0 = f, f_1 = g$  をみたすもののことです。

定義 11. 連結な  $n$  次元多様体  $M$  が向き付け可能であるとは、 $M$  中への同相写像  $i : R^n \rightarrow M$  に対して、 $i$  と合成  $i \circ \rho : R^n \rightarrow M$  がイソトピックでないことを言います。(ある  $i$  に対してこの条件が成り立つとき、他の  $i$  に対してもこの条件は成り立ちます。)  $M$  が向き付け可能であるとき、 $M$  の向きとは、 $M$  中への同相写像  $i : R^n \rightarrow M$  のイソトピー類のことです。 $M$  が向き付け可能であるとき、 $M$  にはちょうど2個の向きが存在します。組  $(M, i)$  を向き付けられた多様体または有向多様体と呼びます。(単に、「向き付けられた多様体  $M$ 」と言うこともあります。)

たとえば、 $R^n, S^n$  は向き付け可能です。

定義 12.  $(M, i), (Y, j)$  を向き付けられた  $n$  次元多様体とします。同相写像  $f : M \rightarrow Y$  が向きを保つとは、 $f \circ i : R^n \rightarrow Y$  と  $g : R^n \rightarrow Y$  がイソトピックであることをいいます。

## 1.5 連結和

連結  $n$  次元多様体  $M, M'$  が与えられているとします。 $M$  内の  $n$  次元球体  $B$  と  $M'$  内の  $n$  次元球体  $B'$  を選び  $M$  から  $B$  の内部を除いて得

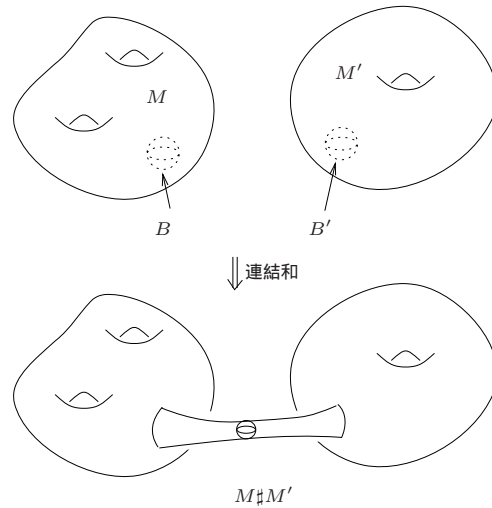


図 3: (上) 2 個の多様体  $M$  と  $M'$ . (下) その連結和  $M\#M'$ .

られる多様体  $M \setminus \text{int } B$  と  $M'$  から  $B'$  の内部を除いて得られる多様体  $M' \setminus \text{int } B'$  とを、境界の  $n-1$  次元球面  $\partial B, \partial B'$  に沿って張り合わせて得られる多様体を、 $M\#M'$  で表し、 $M$  と  $M'$  の連結和と呼びます (図 3 参照)。

境界については

$$\partial(M\#M') = \partial M \sqcup \partial M'$$

が成り立ちます。ただし、 $\sqcup$  は非交和 (共通部分を持たない和) を表します。とくに、 $M, M'$  がともに閉であるときは、 $M\#M'$  も閉となります。

$M$  と  $M'$  がともに向き付け可能であるときは、 $\partial B$  と  $\partial B'$  の張り合わせ写像 (イソトピックなものと同じとみなして、ちょうど 2 個ある) に依存して、高々 2 個の  $M\#M'$  の同相類があることとなります。 $M$  と  $M'$  がともに向き付けられているときは、 $M$  の向きと  $M'$  の向きが適合的になるように  $\partial B$  と  $\partial B'$  の張り合わせ写像を選んで、 $M\#M'$  に標準的な向きを入れることができます。つまり、 $M$  と  $M'$  が向き付けられているときには、「連結和  $M\#M'$ 」はこのように定義されて、一意的に定まる向き付けられた多様体のことを意味することにします。

$M$  または  $M'$  のすくなくとも一方が向き付け不可能であるとき、 $M\#M'$  は同相を除いて一意的に定まることがわかります。

向き付けられた連結  $n$  次元多様体に対して、次が成り立ちます。

1. 可換律 :  $M\#M' \cong M'\#M$ .

2. 結合律 :  $M \sharp (M' \sharp M'') \cong (M \sharp M') \sharp M''$ .
3. 単位元 :  $S^n \sharp M \cong M$ .

つまり、連結和は可換かつ結合的な二項演算で、 $n$ 次元球面  $S^n$  がその単位元となります。

## 2 1次元、2次元多様体の分類

多様体論のひとつの重要な問題は、多様体を同相という概念によって分類することです。連結でない多様体は、連結な多様体の非交和として得られるので、連結な多様体を分類すれば良いことがわかります。

### 2.1 1次元

1次元連結多様体は、円周  $S^1$  と区間  $[0, 1]$  のいずれかと同相です。このうち、 $S^1$  は閉であり、 $[0, 1]$  は2点からなる境界  $\{0, 1\}$  を持ちます。

$S^1$ ,  $[0, 1]$  とともに、向き付け可能です。

### 2.2 2次元

2次元多様体のことを曲面と呼びます。

直積  $S^1 \times S^1 = \{(x, y) \mid x, y \in S^1\}$  には、 $S^1$  の位相から定まる自然な「直積位相」<sup>5</sup>が定義されて、向き付け可能な連結2次元閉多様体となります。これを(2次元)トーラスとよび  $T^2$  で表します(図4)。

トーラス  $T^2$  を  $g$  個連結和して得られる曲面を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面といい、 $F_g$  で表すことにします(図5)。ただし、 $F_0 = S^2$ ,  $F_1 = T^2$  です。

実射影平面  $RP^2$  とは、2次元球面  $S^2 = \{x \in R^3 \mid |x| = 1\}$  において、点  $x$  と点  $-x$  を同一視して得られる曲面のことです(図6)。

実射影平面  $RP^2$  を  $g$  個 ( $g \geq 1$ ) 連結和して得られる曲面を種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面といい、 $\tilde{F}_g$  で表すことにします(図5)。ただし、 $\tilde{F}_1 = RP^2$  です。

**定理 1 (連結閉曲面の分類定理).** 連結閉曲面は次のいずれかと同相です。

<sup>5</sup>この予稿では定義しませんが、講義では時間が許せば簡単に説明する予定です。



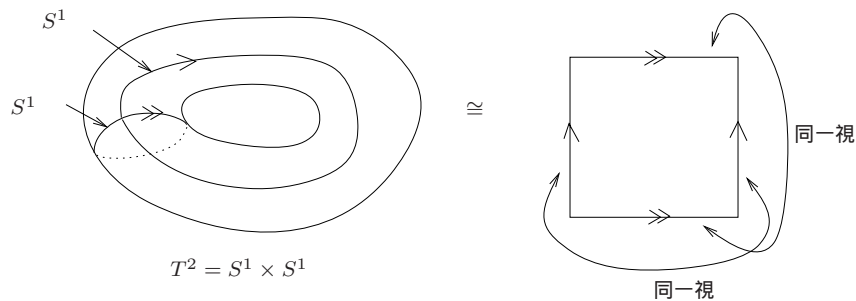


図 4: トーラス  $T^2$  の 2 通りの見方。(左) 3 次元空間のなかの「ドーナツの表面」。(右) 正方形の 2 組の対辺を同一視して得られる曲面。

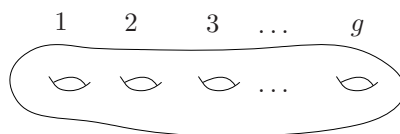


図 5: 種数  $g$  の向き付け可能閉曲面。  $g$  個の穴が開いています。

- 種数  $g$  の向き付け可能閉曲面  $F_g$  ( $g \geq 0$ )。
- 種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面  $\tilde{F}_g$  ( $g \geq 1$ )。

紙数と時間の都合により、ここでは定理 1 の証明を与えることはできません。

定理 1 は 3 次元多様体の研究においても、重要な意味を持ちます。たとえば、コンパクトな 3 次元多様体の境界は閉曲面であるから、定理 1 に挙げられた曲面のコピーの有限個の非交和となります。

### 3 3 次元多様体の連結和分解

3 次元多様体論における重要な問題は、定理 1 に相当するような、向き付けられた閉 3 次元多様体の分類定理を得ることです。

定義 13. 連結有向閉 3 次元多様体  $M$  が素であるとは、

1.  $M$  は  $S^3$  に同相でなく、<sup>6</sup>

<sup>6</sup>この条件を考えない場合もあります。

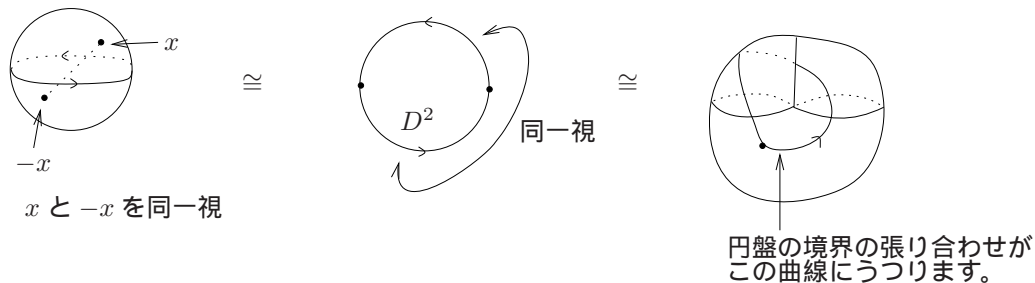


図 6: 実射影平面  $RP^2$ . (左) 球面の対蹠点を同一視します。(中) 円盤の境界の対蹠点どうしを同一視します。(右)  $RP^2$  を 4 次元空間に埋め込んで、3 次元空間に射影した図。

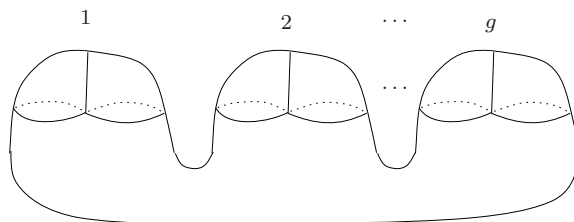


図 7: 種数  $g$  の向き付け不可能閉曲面。

2.  $M$  を  $M \cong M_1 \# M_2$  のように連結和に分解したとき、 $M_1, M_2$  の少なくとも一方が  $S^3$  に同相になる

ことをいいます。

次の結果により、閉 3 次元多様体の分類問題を素な 3 次元多様体の場合に帰着することができます。

定理 2. 連結有向閉 3 次元多様体  $M$  は、一意的な連結和分解をもちます。すなわち、次が成り立ちます。

1. 素な連結有向閉 3 次元多様体  $M_1, \dots, M_r$  ( $r \geq 0$ ) が存在して  $M \cong M_1 \# \dots \# M_r$  が成り立ちます。
2.  $M \cong M_1 \# \dots \# M_r \cong M'_1 \# \dots \# M'_{r'}$  で、 $M_1, \dots, M_r, M'_1, \dots, M'_{r'}$  ( $r, r' \geq 0$ ) が素であるとしします。このとき、 $r = r'$  が成り立ち、 $M'_1, \dots, M'_{r'}$  を適当に並び替えると、 $M_i \cong M'_i, i = 1, \dots, r,$  が成り立ちます。

定理 2 と自然数の素因数分解定理「任意の自然数は素数の積として一意的に表される」との類似性はあきらかだとおもいます。

定理 2 により、連結有向閉 3 次元多様体の同相類の分類は、素な多様体の同相類の分類に帰着されます。

注意 1. (1) 2次元の場合にも定理 2 と同様な定理は成り立っています。この場合の「素な多様体」はトーラス  $T^2$  のみです。3次元の場合には、素な多様体は後でみるように無限個あります。

(2) 向き付け不可能な 3次元連結閉多様体に対しては、定理 2 のようなことは(そのままの形では)成り立ちません。

定理 2 からわかることは、3次元有向閉多様体は連結和に関して「丈夫」であることです。つまり  $M, M_1, M_2$  が連結有向閉 3次元多様体であるとき、 $M \# M_1 \cong M \# M_2$  であれば、 $M$  をはずして  $M_1 \cong M_2$  が成り立ちます。このようなことは、4次元以上の多様体では成り立ちません。

## 4 Heegaard 分解と 3 次元多様体の種数

以下では、「3次元多様体」といったときには、特にことわらないかぎり、向き付け可能なコンパクト連結 3次元多様体を意味するものとします。

### 4.1 ハンドルボディ

3次元球体  $B^3$  は、3次元多様体であり、境界は  $S^2$  に同相です。

ソリッドトーラス  $V_1$  を、円板  $D$  を  $D$  を含む平面内にある  $D$  と交わらない直線  $l$  を軸として回転させて得られる回転体と定義します(図 8 参照)。  $V_1$  は 3次元多様体で境界はトーラス  $T^2$  に同相であることがわかります。  $T^2$  と違って、  $V_1$  には中身がつまっていることに注意しましょう。

$g \geq 2$  に対して、  $V_g$  を、  $n$  個の  $V_1$  のコピーを横に並べて、隣同士のコピーを円板に沿って貼り合せて得られる 3次元多様体とします。(図 9 参照)。簡単にわかるように、  $V_g$  の境界は種数  $g$  の閉曲面  $F_g$  に同相です。

$V_0 = B^3$  とおきます。  $g \geq 0$  に対して、  $V_g$  を種数  $g$  のハンドルボディと呼びます。

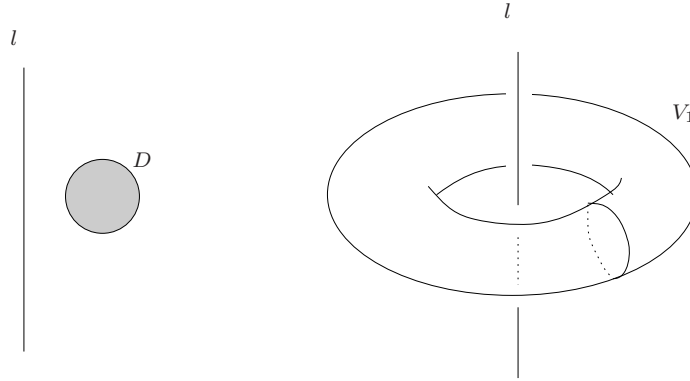


図 8: (左) 直線  $l$  と円板  $D$ . (右) 直線  $l$  とソリッドトーラス  $V_1$ .

## 4.2 Heegaard 分解

$g = 0$  とします。  $V_g$  の 2 個のコピー  $V$  と  $V'$  を考えます。 あきらかに、  $V$  の境界  $\partial V$  と  $V'$  の境界  $\partial V'$  は同相です。 しかし、  $g = 1$  のとき、  $\partial V$  と  $\partial V'$  の間の同相写像はイソトピックなものと同じとみなしても一意的でなく、たくさん (無限個) あります。

$f : \partial V \xrightarrow{\cong} \partial V'$  を同相写像とします。 各点  $x \in \partial V$  を  $f(x) \in \partial V'$  と同一視することにより、  $V$  と  $V'$  から得られる集合を  $V \cup_f V'$  で表します。 つまり、  $V \cup_f V'$  は  $V$  と  $V'$  をそれらの境界に沿って、同相写像  $f$  を使って貼り合せて得られる集合です。 このとき、  $V \cup_f V'$  は閉 3 次元多様体となります。

閉 3 次元多様体  $M$  に対し、 上のような  $g, V, V', f$  と同相写像  $g : M \xrightarrow{\cong} V \cup_f V'$  があるとき、 組  $(V, V', f, g)$  を  $M$  の種数  $g$  の Heegaard 分解といいます。

**定理 3.** 任意の閉 3 次元多様体  $M$  に対し、 ある  $g = 0$  が存在して、  $M$  の種数  $g$  の Heegaard 分解が存在します。

**例 8.**  $g = 0$  とし種数  $g$  のハンドルボディ  $V_g$  が、 図 9 のように 3 次元ユークリッド空間  $R^3$  のなかに「素直に埋め込まれている」とします。  $R^3$  に「無限遠点」を付け加えることにより、 3 次元球面  $S^3$  (に同相な多様体) を得ることができますが、  $S^3$  から、  $V_g$  の内部を除いたもの  $V'$  は、  $V_g$  に同相であることがわかります。 よって、  $S^3 = V_g \cup V'$  は  $S^3$  の種数  $g$  の Heegaard 分解を与えます。

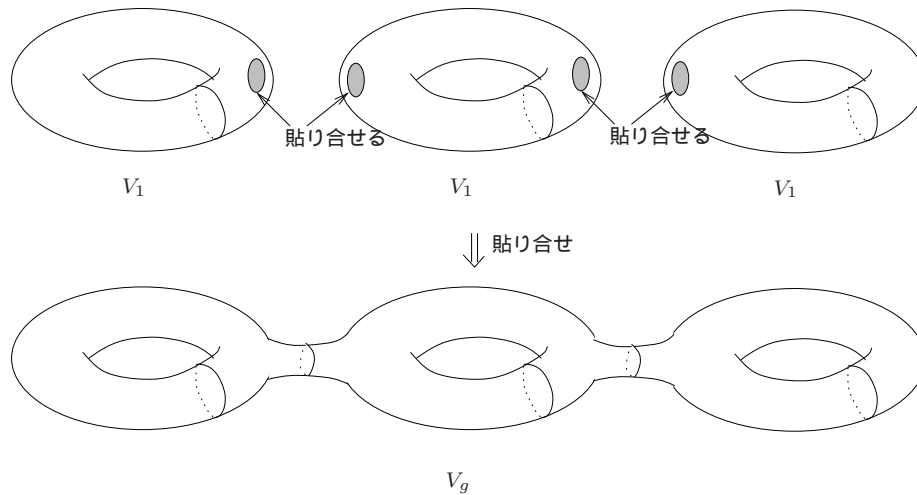


図 9:

定義 14. 閉3次元多様体  $M$  に対し、 $g(M)$  を 種数  $g(M)$  の Heegaard 分解が存在するような最小の整数と定義し、 $M$  の種数と呼びます。

閉3次元多様体の種数は、多様体の「複雑さ」をはかる一つの尺度だとかんがえることができます。

例 9. 例 8 で、 $g = 0$  の場合  $S^3 = V_0 \cup V' = B^3 \cup B^3$  により、 $g(S^3) = 0$  がなりたちます。 $B^3$  の 2 個のコピーを境界にそって貼り合せると、常に  $S^3$  に同相な多様体を得ます。よって、 $S^3$  は種数が 0 であるような唯一の閉3次元多様体であることがわかります。

### 4.3 種数 1

次に種数 1 の場合をかんがえましょう。 $M$  は ソリッドトーラス  $V_1$  の 2 個のコピー  $V, W$  の境界を貼り合せて得られるとします。図 10 の様に、 $a, b, D, p, q, E$  を決めます。つまり、 $D$  は、 $V$  内の円盤で、それに沿って  $V$  を切開くことにより  $B^3$  に同相な多様体を得るようなもの、 $a \subset \partial V$  は  $D$  の境界、 $b \subset \partial V$  は閉曲線で  $a$  とただ一度だけ交わるようなものとし、同様に  $p, q, E$  もきめます。

同相写像  $f: \partial V \xrightarrow{\cong} \partial W$  があたえられていて、貼り合せにより、閉3次元多様体  $M_f = V \cup_f W$  が得られるとします。 $f$  をイソトピーでかえても、貼り合せでできる閉3次元多様体は同相なものが得られます。です

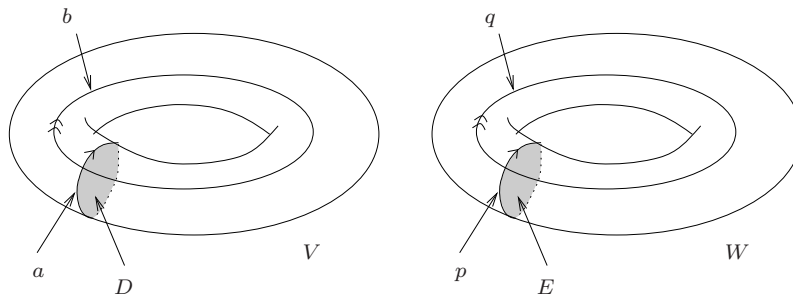


図 10:

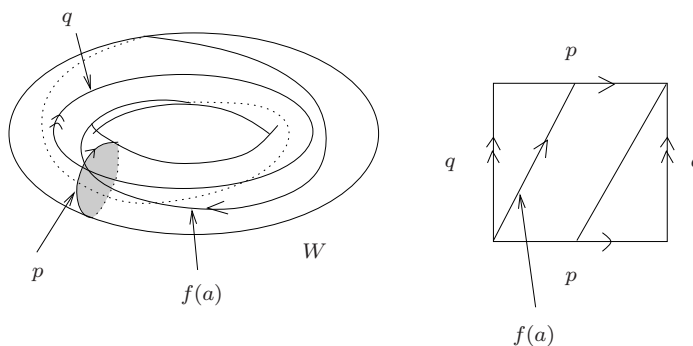


図 11: (左)  $f$  による  $a$  の行先  $f(a) \subset \partial W$ . (右)  $\partial W$  を  $p, q$  で切りひらいたときの  $f(a)$ .

から、すべての種数 1 の閉 3 次元多様体を列挙するためには、同相写像  $f: \partial V \xrightarrow{\cong} \partial W$  の同相類をすべて列挙して、それに対応する  $M_f$  のどれが同相になっているかをしらべればよいことになります。

$f$  のイソトピー類を指定するためには、 $f$  の  $a \cup b$  への制限  $f|_{a \cup b}: a \cup b \rightarrow \partial W$  のイソトピー類を指定してやればよいことがわかります。さらに、 $a$  の行先だけ指定してやれば、どのように  $b$  の行先を選んでも  $M_f$  の同相類は変わらないことがわかります。 $a$  の行先を指定するためには、 $f(a)$  が  $p, q$  とそれぞれ何回交わるかを決めればよいこともわかります。(ここで、 $a, p, q$  には図の様に向きをいれておき、 $f(a)$  と  $p, q$  との交わりの個数は符号つきで考えることにします。) 例えば  $f(a)$  が  $p$  と 2 回、 $q$  と  $-1$  回交わっているとすると、図 11 のようになります。 $f(a)$  が  $p$  と  $r$  回、 $q$  と  $s$  回交わっているときの  $M_f$  を  $L(r, s)$  と書き、レンズ空間とよびます。ただし、 $r, s$  は整数で、互いに素になっていなければなりません。

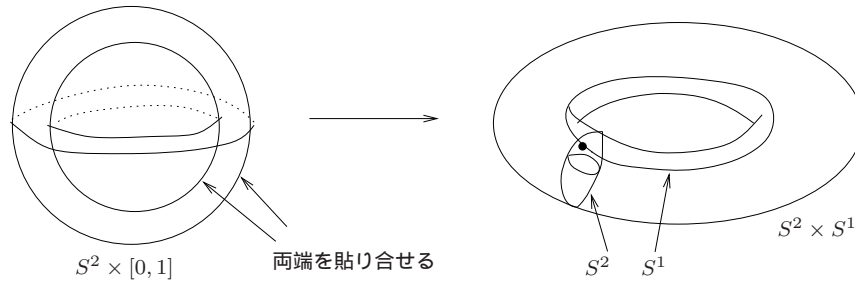


図 12: (左)  $S^2 \times [0, 1]$ . (2 個の球面とそれらにはさまれた領域からなります。)(右)  $S^2 \times S^1$  (イメージ図)。

一般に  $L(r, s) \cong L(-r, -q)$  が成り立つので、レンズ空間の同相による分類を考えるには  $r \geq 0$  として十分です。

定理 4.  $(r, s), (r', s')$  は互いに素な整数の組であって、 $r, r' \geq 0$  が成り立つとします。このとき、 $L(r, s)$  と  $L(r', s')$  が同相であるための必要十分条件は  $r = r'$  であって、しかも  $s \equiv \pm s' \pmod{r}$  または  $ss' \equiv \pm 1 \pmod{r}$  のいずれかが成り立つことです。<sup>7</sup>

上の定理で、十分性を示すためには、具体的に同相写像を構成してやればよいですが、必要性(ある 2 個の多様体が同相でないこと)を示すのは余り簡単ではありません。このためには、なんらかの「不変量」がつかわれます。3次元多様体の不変量とは、3次元多様体に対して定義される量(例えば整数、複素数など)で同相な多様体に対して同じ値を与えるもののことです。(同相でない多様体に対しては、同じ値を与えるかもしれないし、そうでないかもしれません。)定理 4 が初めて証明されたときには、「Reidemeister トーション」とよばれる不変量が用いられました。ここでは「Reidemeister トーション」の説明はできません。

$L(0, \pm 1)$  は  $S^2 \times S^1$  という「直積多様体」になります(図 12)。これは、「厚みをつけた  $S^2$ 」 $S^2 \times [0, 1]$  の両端の  $S^2$  を貼り合せて得ることができます。

$L(\pm 1, s)$  ( $s$  は任意の整数) は  $S^3$  と同相になります。

<sup>7</sup> $L(r, s)$  には自然な向きがはいります。向き付けられた多様体  $L(r, s)$  と  $L(r', s')$  が、向きを保って同相であるための必要十分条件は  $r = r'$  であって、しかも  $s \equiv s' \pmod{r}$  または  $ss' \equiv 1 \pmod{r}$  のいずれかが成り立つことです。

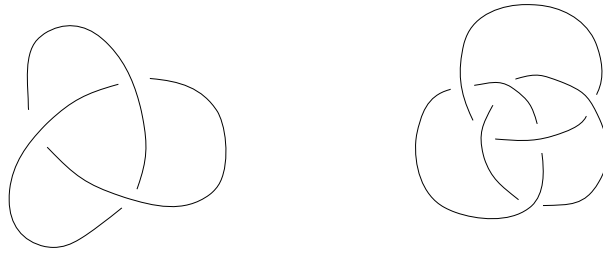


図 13: (左) 結び目の例 (右) 3 成分をもつ絡み目の例

#### 4.4 種数 2 以上

種数 2 以上の閉 3 次元多様体は完全には分類されていません。種数 1 のときは整数の組により多様体を指定してやることができましたが、種数 2 以上の場合にはこのように単純には記述できません。 $\partial V_g \cong F_g$  の自己同相写像のイソトピー類を記述するための方法が必要になります。この「 $\partial V_g \cong F_g$  の自己同相写像のイソトピー類」の全体は  $F_g$  の写像類群という群<sup>8</sup>をなし、それ自体としても興味深い対象です。時間があれば、これについても少し説明したいとおもいます。

### 5 絡み目に沿った Dehn 手術

ここでは、全ての閉 3 次元多様体を構成することのできるもう一つの方法である「絡み目に沿った Dehn 手術」について説明します。

結び目とは、円周  $S^1$  が  $S^3$  に埋め込まれたものです。絡み目とは、結び目の有限個の交わらない和です (図 13 参照)。絡み目に含まれる各結び目を絡み目の成分とよびます。

結び目と絡み目上の定義は、実はこれからやることのためには不便なので、次のように定義をやりなおします。図 10 の左側のように、ソリッドトラス  $V$ 、曲線  $a, b \subset \partial V$ 、円板  $D$  が与えられているとします。

定義 15. 太い結び目<sup>9</sup>とは埋め込み

$$K : V \rightarrow S^3$$

のことです (図 14 参照)。太い絡み目とは、有限個の太い結び目の交わ

<sup>8</sup>群とは、乗法という二項演算が定義された集合で単位元と逆元を持つものです。

<sup>9</sup>これは一般的に使われている用語ではないようなので、注意してください。







