クンツ環の話

阿部光雄

1　はじめに

クンツ環は C^* 環 (作用素環のひとつ) の例として J. Cuntz によって 1977 年に考案されました．しかし，C^* 環としての作用素の位相 (すなわち，極限や連続性などに関連する性質) の問題を離れて，その稠密な部分環に関する代数的な側面を見るだけでも興味深い性質を持っています．これらの性質はクンツ環の生成元が満たす簡単な関係式から導かれるもので，線形代数の基本的な知識だけでほとんど計算出来ます．無限次元の非可換な環であるにもかかわらず扱いやすいクンツ環の世界に親しんで下さい．

2　クンツ環とは

2.1　$*$環と C^* 環

まず，クンツ環が属する$*$環と C^* 環についてまとめておきます．定義ばかりですので，2.2 節から読み始めて必要に応じて参照してもよいでしょう．

定義 2.1 次の性質をもつ集合 $\mathcal{A}$ を$*$環といいます．

(i) $\mathcal{A}$ は $\boldsymbol{C}$(複素数全体) 上の環である．すなわち，

$$\begin{aligned} A_1,\, A_2 \in \mathcal{A},\ c_1,\, c_2 \in \boldsymbol{C} \quad &\Rightarrow \quad c_1A_1 + c_2A_2 \in \mathcal{A}, \\ A_1,\, A_2 \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \quad A_1A_2 \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

(ii) $\mathcal{A}$ 上に次を満たす$*$演算という全単写 $A \mapsto A^*$ が定義されている．

$$\begin{aligned} (c_1A_1 + c_2A_2)^* &= \bar{c}_1A_1^* + \bar{c}_2A_2^*, \\ (A_1A_2)^* &= A_2^*A_1^*, \\ (A^*)^* &= A. \end{aligned}$$

ただし，$A_i,\, A \in \mathcal{A},\, c_i \in \boldsymbol{C},\, \bar{c}_i$ は c_i の複素共役．
また，$*$環 $\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ がまた$*$環になるとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の$*$部分環といいます．

定義 2.2 $*$環 $\mathcal{A}$ が単位元 I を持つとき，単位的$*$環といいます．ここで単位元 I とは，任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $AI = IA = A$ を満たす元のことです．

注意 2.3 $*$環 $\mathcal{A}$ が単位元 I を持てば，$I^* = I$ が成り立ちます．

例 2.4 $\mathcal{A} = \boldsymbol{C}I \equiv \{c\,I \mid c \in \boldsymbol{C}\}$ は自明な単位的$*$環です．

例 2.5 $\mathcal{A} = M_n(\boldsymbol{C}) \equiv \{\boldsymbol{C}$ 上の $(n \times n)$ 行列全体 $\}$ は単位的*環です．ただし $A \in \mathcal{A}$ に対し，A^* は A の随伴行列 (A の転置と複素共役をとって得られる行列) で定義されます．$M_n(\boldsymbol{C})$ やそのテンソル積 (後述) のように行列で記述出来る$*$環を総じて行列環と呼ぶことにします．

以下では単位的$*$環のみを扱うので，省略して単に$*$環と呼ぶことにします．

定義 2.6 $\mathcal{A}$ を$*$環，$S, U \in \mathcal{A}$ とします．このとき，

(i) S が $S^*S = I$ を満たすとき，等長作用素 (isometry) といいます．

(ii) U が $U^*U = UU^* = I$ を満たすとき，ユニタリといいます．

注意 2.7 $M_n(\boldsymbol{C})$ では等長作用素はすべてユニタリになりますが，一般の (無限次元の) $*$環では異なります．

次に，参考のために，C^* 環についての定義を簡単に与えておきますが，後でこれを具体的に使うことはありません．

定義 2.8 集合 $\mathcal{A}$ が次を満たすとき C^* 環といいます．

(i) $\mathcal{A}$ は$*$環である．

(ii) $\mathcal{A}$ 上に定義されたノルム $||A||$ $(A \in \mathcal{A})$ に関して完備である．

(iii) ノルムは次の性質 (C^* ノルムの性質) を持つ:

$$||A^*A|| = ||A||^2.$$

注意 2.9 ノルムとは $\mathcal{A}$ の各元に対して与えられた負でない実数で，次の基本性質をもちます $(A_i, A \in \mathcal{A},\ c \in \boldsymbol{C})$：

$$\begin{aligned} ||A|| &\geqq 0, \qquad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0, \\ ||c\,A|| &= |c| \cdot ||A||, \\ ||A_1 + A_2|| &\leqq ||A_1|| + ||A_2||. \end{aligned}$$

注意 2.10 $\mathcal{A}$がノルムに関して完備であるとは，列$\{A_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ ($\boldsymbol{N}$は自然数全体) がコーシー列(すなわち$\lim\limits_{m,n\to\infty}||A_m - A_n|| = 0$)ならば収束する($\lim\limits_{n\to\infty}||A_n - A|| = 0$ を満たす$A\in\mathcal{A}$が存在する)ことです．

注意 2.11 C^*ノルムは次を満たします：

$$||I|| = 1, \quad ||A^*|| = ||A||, \quad ||A_1A_2|| \leqq ||A_1||\,||A_2||.$$

最後に，$*$環の間の関係を見るために必要な用語をまとめておきます．

定義 2.12 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$を$*$環とします．写像$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$が$*$準同型であるとは，次を満たすことです($A_i$, $A \in \mathcal{A}$, $c_i \in \boldsymbol{C}$ とする)：

$$\varphi(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1\varphi(A_1) + c_2\varphi(A_2), \tag{E-1}$$

$$\varphi(A_1A_2) = \varphi(A_1)\varphi(A_2), \tag{E-2}$$

$$\varphi(A^*) = \varphi(A)^*. \tag{E-3}$$

定義 2.13 $*$準同型$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$が全単写であるとき，$*$同型といいます．また，$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$への$*$同型が存在するとき，$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$は同型であるといい，$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$のように表します．

定義 2.14 $*$準同型$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$が単写で$\varphi(I_\mathcal{A}) = I_\mathcal{B}$ ($I_\mathcal{A}, I_\mathcal{B}$はそれぞれ$\mathcal{A}, \mathcal{B}$の単位元) を満たすとき，$\varphi$を埋め込みといいます．$\mathcal{A}$から$\mathcal{B}$への埋め込み$\varphi$が存在するとき，$\mathcal{A}$は$\mathcal{B}$に埋め込み可能であるといい，$\varphi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$のように表します．

定義 2.15 $*$環$\mathcal{A}$からそれ自身への埋め込みを自己準同型といいます．また，全単写の自己準同型を自己同型といいます．

注意 2.16 $*$準同型$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$における$\mathcal{A}$の像$\varphi(\mathcal{A})$は$\mathcal{B}$の$*$部分環になります．また，$*$準同型の合成は$*$準同型です．$*$同型の逆写像も$*$同型です．

注意 2.17 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ならば，$\mathcal{A}$と$\mathcal{B}$は互いに埋め込み可能です．

注意 2.18 $\mathcal{A}$が$\mathcal{B}$に埋め込み可能であっても，その埋め込みは一般に一意的ではありません．

2.2 クンツ環

さて，いよいよクンツ環を定義します．

定義 2.19 クンツ環 $\mathcal{O}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ とは，次の関係式を満たす $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ で生成される C^* 環です：

$$s_j^* s_k = \delta_{jk} I, \qquad j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{$\mathcal{O}_n$-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j s_j^* = I. \tag{$\mathcal{O}_n$-2}$$

ただし，δ_{jk}(クロネッカーのデルタ) は $j = k$ のとき 1，$j \neq k$ のとき 0 を表します．

注意 2.20 ここでは生成元 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ の数が有限個のクンツ環を考えますが，生成元が無限個ある $\mathcal{O}_\infty$ というクンツ環もあります．

注意 2.21 関係式 ($\mathcal{O}_n$-1) は $s_j (j = 1, \ldots, n)$ が等長作用素であること示し，関係式 ($\mathcal{O}_n$-2) はそれがユニタリでは無いことを示しています．$M_n(\boldsymbol{C})$ 等，有限次元の $*$ 環では等長作用素はすべてユニタリになるので，クンツ環は本質的に無限次元であることが分かります．

注意 2.22 s_j, s_k $(j \neq k)$ は非可換です．なぜなら，もし可換であるとすると，関係式 ($\mathcal{O}_n$-1) から，$I = s_k^* s_j^* s_j s_k = s_k^* s_j^* s_k s_j = 0$ となり矛盾を生じるからです．

注意 2.23 「$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ で生成される」とは，これらの元に線形結合，積，$*$ 演算を自由に施して得られるもの全体からなる集合 $\mathcal{O}_n^{(0)}$ を考え，更にそれを C^* ノルムについて完備化したものが $\mathcal{O}_n$ であるということです．本講義では完備性に関する議論はしないので，実際に扱うのは $\mathcal{O}_n$ ではなく，その稠密な $*$ 部分環である $\mathcal{O}_n^{(0)}$ です．

それでは，$\mathcal{O}_n^{(0)}$ についてもう少し詳しく見てみましょう．
集合 $\{s_1, \ldots, s_n, s_1^*, \ldots, s_n^*\}$ の元の任意の積を考えると，関係式 ($\mathcal{O}_n$-1) より，積の表式の中で s_j^* が s_k の左隣に来るものは簡単化することが出来て，積は最終的には 0 か I か $s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_\ell} s_{k_1}^* s_{k_2}^* \cdots s_{k_m}^*$ のような形 (* 無しのものがすべて左に，* 付きのものがすべて右に来る形) に書き直すことが出来ます．ただし，$j_1, \ldots, j_\ell, k_1, \ldots, k_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ で， 特に積が $s_{j_1} \cdots s_{j_\ell}$ や $s_{k_1}^* \cdots s_{k_m}^*$ にな

る場合も考慮すると，$\ell + m \geqq 1$ です．これらの積に線形結合を施して得られるもの全体 (複素線形空間) が $\mathcal{O}_n^{(0)}$ です．

本講義では稠密な $*$ 部分環のみに着目しているとの了解の下で，表記の簡単化のため，$\mathcal{O}_n^{(0)}$ という記号の代わりに $\mathcal{O}_n$ と略記ことにします．

以下の節では，クンツ環と他の $*$ 環との関係やクンツ環同士の関係を見て行きます．

2.3　クンツ環と行列環

まず，$\mathcal{O}_n$ の部分集合で，$\{s_j s_k^* \,|\, j,\, k \in \{1, \ldots, n\}\}$ で生成される複素線形空間 $\mathcal{M}_{n,1}$ に着目します．$\mathcal{M}_{n,1}$ の生成元 $s_j s_k^*$ は

$$(s_j s_k^*)(s_p s_q^*) = \delta_{k\,p}\,(s_j s_q^*), \qquad (s_j s_k^*)^* = s_k s_j^*$$

を満たし，$\mathcal{M}_{n,1}$ は積と $*$ 演算で閉じていることが分かります．従って，$\mathcal{M}_{n,1}$ は $\mathcal{O}_n$ の $*$ 部分環です．一方，$M_n(\boldsymbol{C})$ の生成元 $e_{j\,k}$ [(j,k) 成分が 1 で，他はすべて 0 の $(n \times n)$ 行列] については

$$e_{j\,k} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & \overbrace{k\text{列}} & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{c} \\ \\ (j\text{行}, \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$e_{j_1\,k_1}\, e_{j_2\,k_2} = \delta_{k_1 j_2} e_{j_1\,k_2}, \qquad (e_{j\,k})^* = e_{k\,j}$$

となるので，$s_j s_k^*$ と $e_{j\,k}$ が全単写で対応していることが分かります．以上から，$M_n(\boldsymbol{C}) \simeq \mathcal{M}_{n,1}$ であり，$M_n(\boldsymbol{C})$ から $\mathcal{O}_n$ への埋め込み φ は生成元の対応

$$\varphi(e_{j\,k}) = s_j s_k^*$$

によって与えることが出来ます．$M_n(\boldsymbol{C})$ の一般の元の φ による像は，φ が満たすべき埋め込みの性質 (今必要なのは線形性のみ) から自動的に決まります．

では，$\mathcal{O}_n$ の部分集合で，$\{s_{j_1} s_{j_2} s_{k_2}^* s_{k_1}^* \,|\, j_i, k_i \in \{1, \ldots, n\}\}$ によって生成される複素線形空間 $\mathcal{M}_{n,2}$ についてはどうなるでしょうか？　生成元の積と $*$ 演

算は

$$(s_{j_1}s_{j_2}s_{k_2}^*s_{k_1}^*)(s_{p_1}s_{p_2}s_{q_2}^*s_{q_1}^*) = \delta_{k_1p_1}\delta_{k_2p_2}(s_{j_1}s_{j_2}s_{q_2}^*s_{q_1}^*),$$
$$(s_{j_1}s_{j_2}s_{k_2}^*s_{k_1}^*)^* = s_{k_1}s_{k_2}s_{j_2}^*s_{j_1}^*$$

で与えられ，$\mathcal{M}_{n,2}$ も $\mathcal{O}_n$ の $*$ 部分環になります．行列でこれに対応するものは 2 個の $M_n(\boldsymbol{C})$ のテンソル積 $M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_n(\boldsymbol{C})$ です．それでは，$*$ 環のテンソル積について簡単に紹介しておきましょう．

$*$ 環 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ のテンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ とは，以下の性質で特徴づけられます $(A_i, A \in \mathcal{A},\ B_i, B \in \mathcal{B},\ c_i \in \boldsymbol{C})$：

$$\begin{aligned}
&(c_1A_1 + c_2A_2) \otimes B = c_1(A_1 \otimes B) + c_2(A_2 \otimes B),\\
&A \otimes (c_1B_1 + c_2B_2) = c_1(A \otimes B_1) + c_2(A \otimes B_2),\\
&(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2),\\
&(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.
\end{aligned}$$

従って，$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ も $*$ 環になります．$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ の単位元は，$I_{\mathcal{A}} \otimes I_{\mathcal{B}}$ で与えられます．

行列環の場合のテンソル積は，行列の成分に行列に代入することで直感的に理解出来ます．$M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_m(\boldsymbol{C})$ の元は，$A \in M_n(\boldsymbol{C}),\ B = (b_{jk}) \in M_m(\boldsymbol{C})$ として，

$$M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_m(\boldsymbol{C}) \ni A \otimes B \ \longleftrightarrow \ \begin{pmatrix} Ab_{11} & \cdots & Ab_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{m1} & \cdots & Ab_{mm} \end{pmatrix} \in M_{nm}(\boldsymbol{C})$$

のように対応させます [代入の仕方を逆にしてもテンソル積の性質は満たします]．これにより，$M_n(\boldsymbol{C}), M_m(\boldsymbol{C}), M_{nm}(\boldsymbol{C})$ の生成元をそれぞれ $e_{j\,k}$ $(j, k \in \{1, \ldots, n\})$，$e'_{p\,q}$ $(p, q \in \{1, \ldots, m\})$，$e''_{r\,t}$ $(r, t \in \{1, \ldots, nm\})$ として，

$$e_{j\,k} \otimes e'_{p\,q} \ \longleftrightarrow \ e''_{j+(p-1)n,\,k+(q-1)n} \tag{MT-1}$$

のように全単写で対応させることが出来るので，

$$M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_m(\boldsymbol{C}) \simeq M_{nm}(\boldsymbol{C}) \tag{MT-2}$$

が成り立ちます．$M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_n(\boldsymbol{C})$ の生成元の積と $*$ 演算は

$$\begin{aligned}
(e_{j_1\,k_1} \otimes e_{j_2\,k_2})(e_{p_1\,q_1} \otimes e_{p_2\,q_2}) &= (e_{j_1\,k_1}e_{p_1\,q_1}) \otimes (e_{j_2\,k_2}e_{p_2\,q_2})\\
&= \delta_{k_1p_1}\delta_{k_2p_2}(e_{j_1\,q_1} \otimes e_{j_2\,q_2}),\\
(e_{j_1\,k_1} \otimes e_{j_2\,k_2})^* &= (e_{j_1\,k_1})^* \otimes (e_{j_2\,k_2})^*\\
&= e_{k_1\,j_1} \otimes e_{k_2\,j_2}
\end{aligned}$$

となり，前の $s_{j_1}s_{j_2}s_{k_2}^*s_{k_1}^*$ の式と比較すれば，$M_n(\boldsymbol{C})\otimes M_n(\boldsymbol{C})\simeq \mathcal{M}_{n,2}$ であることがわかります．同様にして，$\{s_{j_1}\cdots s_{j_p}s_{k_p}^*\cdots s_{k_1}^*\,|\,j_i,\,k_i\in\{1,\dots,n\}\}$ で生成される $\mathcal{O}_n$ の＊部分環 $\mathcal{M}_{n,p}$ は，p 個の $M_n(\boldsymbol{C})$ のテンソル積 $M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes p}$ と同型になります．

ところで，($\mathcal{O}_n$-2) から

$$\sum_{j_2=1}^{n} s_{j_1}s_{j_2}s_{j_2}^*s_{k_1}^* = s_{j_1}Is_{k_1}^* = s_{j_1}s_{k_1}^*$$

が得られるので，$\mathcal{O}_n$ の＊部分環の列 $\{\mathcal{M}_{n,p}\}_{p=1}^{\infty}$ について

$$\mathcal{M}_{n,1}\subset\mathcal{M}_{n,2}\subset\mathcal{M}_{n,3}\subset\cdots\subset\mathcal{M}_{n,p}\subset\cdots$$

が成り立ちます．すなわち，$\{\mathcal{M}_{n,p}\}_{p=1}^{\infty}$ は単調増大列になっています．一方，$M_n(\boldsymbol{C}),\,M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes 2},\,M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes 3},\,\dots$ については，それぞれ異なるサイズの行列に対応する集合ですから単純な包含関係は成り立ちません．しかし，$A\in M_n(\boldsymbol{C})$ に対して (I_n は $(n\times n)$ の単位行列)

$$A\ \longleftrightarrow\ A\otimes I_n\ \longleftrightarrow\ \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$$

のような対応関係で $M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes 2}$ の元と同一視すれば，$M_n(\boldsymbol{C})\subset M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes 2}\subset M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes 3}\subset\cdots$ の包含関係が成り立つと考えることが出来ます．このような行列環の単調増大列に対して，その帰納極限 $\bigcup_{p=1}^{\infty} M_n(\boldsymbol{C})^{\otimes p}$ で定義される＊環を UHF(Uniformly Hyperfinite) 環といいます．今の場合，より正確には n^{∞} 型の UHF 環といい，記号 UHF_n で表します．以上の議論から次の定理が得られます．

定理 2.24 UHF_n は $\mathcal{O}_n$ に埋め込み可能で，その埋め込み φ は

$$\varphi: UHF_n\hookrightarrow\mathcal{O}_n,$$
$$\varphi(e_{j_1,k_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p,k_p}\otimes I\otimes\cdots)=s_{j_1}\cdots s_{j_p}s_{k_p}^*\cdots s_{k_1}^*$$

で与えられる．ただし，$j_i,k_i\in\{1,2,\dots,n\}$，$p\in\boldsymbol{N}$.

特に，$n=2$ の場合，UHF_2 は CAR(Canonical Anticommutation Relation) 環と同型であることが知られています．CAR 環とは，物理学の量子論に登場するフェルミ粒子の生成消滅演算子から生成される＊環 (C^* 環) で，生成元は

次の関係式を満たします.

$$a_m a_n^* + a_n^* a_m = \delta_{mn} I,$$
$$a_m a_n + a_n a_m = 0, \qquad a_m^* a_n^* + a_n^* a_m^* = 0.$$

ただし，$m, n \in \boldsymbol{N}$で，a_n を消滅演算子，a_n^* を生成演算子と呼びます.

CAR 環と UHF_2 が同型であることは，次のように示すことが出来ます.

まず，(2×2) 行列で

$$A \equiv e_{1\,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と置くと，

$$A^* = e_{2\,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AA^* = e_{1\,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*A = e_{2\,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，A から $*$ 環 $M_2(\boldsymbol{C})$ が生成されることが分かります．更に，I_2 を (2×2) の単位行列として，

$$AA^* + A^*A = I_2, \qquad AA = A^*A^* = 0.$$

が成り立つことから，$a_1 \leftrightarrow A,\ I \leftrightarrow I_2$ のように対応させることで，a_1 から生成される CAR 環の $*$ 部分環は $M_2(\boldsymbol{C})$ と同型であることが得られます．次に，

$$J \equiv AA^* - A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と置くと，$AJ + JA = 0,\ J^* = J,\ J^2 = I_2$ を満たすことから

$$\begin{aligned}
&(A \otimes I_2)(A \otimes I_2)^* + (A \otimes I_2)^*(A \otimes I_2) = (I_2 \otimes I_2), \\
&(A \otimes I_2)(A \otimes I_2) = (A \otimes I_2)^*(A \otimes I_2)^* = 0; \\
&(X \otimes I_2)(J \otimes Y) + (J \otimes Y)(X \otimes I_2) = 0, \qquad X, Y = A, A^*; \\
&(J \otimes A)(J \otimes A)^* + (J \otimes A)^*(J \otimes A) = (I_2 \otimes I_2), \\
&(J \otimes A)(J \otimes A) = (J \otimes A)^*(J \otimes A)^* = 0
\end{aligned}$$

が成り立ち，$a_1 \leftrightarrow A \otimes I_2,\ a_2 \leftrightarrow J \otimes A,\ I \leftrightarrow I_2 \otimes I_2$ のように対応させることが出来ます．また，$I_2 \otimes A = (J \otimes I_2)(J \otimes A)$ を考慮すれば，$\{A \otimes I_2,\ J \otimes A\}$ から $*$ 環 $M_2(\boldsymbol{C}) \otimes M_2(\boldsymbol{C})$ が生成されることも分かります．従って，$\{a_1,\ a_2\}$ から生成される CAR 環の $*$ 部分環は $M_2(\boldsymbol{C}) \otimes M_2(\boldsymbol{C})$ と同型になります．以

下同様に考えれば，CAR 環から UHF_2 への $*$ 同型 ψ は次で与えることが出来ます：

$$\begin{aligned}\psi(a_1) &= A \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots,\\ \psi(a_2) &= J \otimes A \otimes I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots,\\ \psi(a_3) &= J \otimes J \otimes A \otimes I_2 \otimes \cdots,\\ &\vdots\end{aligned}$$

2.4　クンツ環の間の関係

まず，クンツ環の間の関係として次の定理があります．

定理 2.25 $\mathcal{O}_m$ が $\mathcal{O}_n$ に埋め込み可能であるための必要十分条件は，$m-1=k(n-1)$ を満たす $k \in \boldsymbol{N}$ が存在すること．

この定理と注意 2.17 から次の系が得られます．

系 2.26 $m \neq n$ ならば，$\mathcal{O}_m$ と $\mathcal{O}_n$ は同型ではない．

定理の十分条件については，埋め込みを具体的に作ることで容易に確かめられます．まず，埋め込み $\varphi : \mathcal{O}_m \hookrightarrow \mathcal{O}_n$ が存在するとしましょう．$\mathcal{O}_m$ の生成元を $\{S_1, \ldots, S_m\}$ とすると，関係式 ($\mathcal{O}_m$-1) と ($\mathcal{O}_m$-2)，φ が $*$ 準同型であること，$\varphi(I_{\mathcal{O}_m}) = I_{\mathcal{O}_n}$ を用いると

$$\varphi(S_j)^* \varphi(S_k) = \delta_{jk} I_{\mathcal{O}_n},$$
$$\sum_{j=1}^{m} \varphi(S_j)\varphi(S_j)^* = I_{\mathcal{O}_n}$$

が得られます．つまり，$\mathcal{O}_n$ の m 個の元 $\{\varphi(S_1), \ldots, \varphi(S_m)\}$ は $\mathcal{O}_m$ の生成元と同じ関係式 (単位元 I については読み替えが必要) を満たしています．逆に，$\mathcal{O}_n$ の m 個の元 $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ で $\mathcal{O}_m$ の生成元と同じ関係式を満たすものを見つけることが出来れば，$\varphi(S_j) = t_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ と置くことにより，埋め込み $\varphi : \mathcal{O}_m \hookrightarrow \mathcal{O}_n$ が作れます．実際，生成元の像が与えられれば，一般の元の像については φ がもつ埋め込みの性質から自動的に決まります．

具体的に $n = 2$ の場合について見てみましょう．生成元は $\{s_1, s_2\}$ で，その関係式は次のようになります：

$$s_1^* s_1 = s_2^* s_2 = I, \quad s_1^* s_2 = s_2^* s_1 = 0, \qquad (\mathcal{O}_2\text{-}1)$$
$$s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = I. \qquad (\mathcal{O}_2\text{-}2)$$

さて，$t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{O}_2$ を次のようにとってみましょう．

$$t_1 \equiv s_1, \quad t_2 \equiv s_2 s_1, \quad t_3 \equiv s_2 s_2.$$

このとき，$\{t_1, t_2, t_3\}$ は $\mathcal{O}_3$ の生成元 $\{S_1, S_2, S_3\}$ と同じ関係式を満たすことが分かります．($\mathcal{O}_3$-1) の確認は容易ですから，($\mathcal{O}_3$-2) を確認しましょう：

$$\begin{aligned} t_1 t_1^* + t_2 t_2^* + t_3 t_3^* &= s_1 s_1^* + s_2 s_1 s_1^* s_2^* + s_2 s_2 s_2^* s_2^* \\ &= s_1 s_1^* + s_2 (s_1 s_1^* + s_2 s_2^*) s_2^* \\ &= s_1 s_1^* + s_2 s_2^* \\ &= I. \end{aligned}$$

ただし，3 番目と 4 番目の等号で，($\mathcal{O}_2$-2) を使いました．従って，$\mathcal{O}_3$ は $\mathcal{O}_2$ へ埋め込み可能で，埋め込み φ として $\varphi(S_i) = t_i$ $(i = 1, 2, 3)$ となるものがとれることがわかりました．

同様にして，

$$t_1 \equiv s_1, \quad t_2 \equiv s_2 s_1, \quad t_3 \equiv (s_2)^2 s_1, \quad t_4 \equiv (s_2)^3$$

と置くと，$\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ は $\mathcal{O}_4$ の生成元と同じ関係式を満たすので，$\mathcal{O}_4$ から $\mathcal{O}_2$ への埋め込みが作れます．

一般に，$t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathcal{O}_2$ $(m \geqq 2)$ を

$$t_1 \equiv s_1, \quad t_2 \equiv s_2 s_1, \quad t_3 \equiv (s_2)^2 s_1, \quad \ldots, \quad t_{m-1} \equiv (s_2)^{m-2} s_1, \quad t_m \equiv (s_2)^{m-1}$$

のようにとることで，$\mathcal{O}_m$ は $\mathcal{O}_2$ へ埋め込み可能であることが分かります．

埋め込みは一意的ではないことに注意しましょう．例えば，$\mathcal{O}_4$ から $\mathcal{O}_2$ への埋め込みとして上記のものの他に

$$t_1 \equiv s_1 s_1, \quad t_2 \equiv s_1 s_2, \quad t_3 \equiv s_2 s_1, \quad t_4 \equiv s_2 s_2$$

のようにとることも出来ます．

$n \geqq 3$ の場合も同様です．$\mathcal{O}_n$ の生成元を $\{s_1, \ldots, s_n\}$ とし，例えば，

$$\begin{aligned} &t_1 = s_1, \qquad t_2 = s_2, \qquad \ldots, \qquad t_{n-1} = s_{n-1}, \\ &t_n = s_n s_1, \quad t_{n+1} = s_n s_2, \quad \ldots, \quad t_{2(n-1)} = s_n s_{n-1}, \quad t_{2(n-1)+1} = s_n s_n \end{aligned}$$

と置くと，$\{t_1, \ldots, t_{2(n-1)+1}\}$ は $\mathcal{O}_{2(n-1)+1}$ の生成元 $\{S_1, \ldots, S_{2(n-1)+1}\}$ と同じ関係式を満たし，$\mathcal{O}_{2(n-1)+1}$ は $\mathcal{O}_n$ へ埋め込み可能であることが分かります．

3　クンツ環の自己準同型と自己同型

$\mathcal{O}_n$ の自己準同型について，一般的に成り立つことがあります．

定理 3.1 $\mathcal{O}_n$ の自己準同型 φ と $\mathcal{O}_n$ のユニタリ u $(u \in \mathcal{O}_n,\ u^*u = uu^* = I)$ は次の式で 1 対 1 に対応する：

$$\varphi(s_j) = u\,s_j, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{EU-1}$$

$$u = \sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)s_j^*. \tag{EU-2}$$

証明)　まず，u をユニタリとして，(EU-1) で定義される φ が自己準同型になることを示します．これは φ が生成元の関係式を保つことをいえば十分です．

$$\varphi(s_j)^*\varphi(s_k) = (us_j)^*(us_k) = s_j^*u^*us_k = s_j^*Is_k = s_j^*s_k = \delta_{jk}I,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)\varphi(s_j)^* = \sum_{j=1}^{n} us_js_j^*u^* = u\left(\sum_{j=1}^{n} s_js_j^*\right)u^* = uIu^* = uu^* = I.$$

次に，φ を自己準同型として，(EU-2) で定義される u がユニタリになることを示します．

$$\begin{aligned}
u^*u &= \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)s_j^*\right)^*\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)s_k^*\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} s_j\varphi(s_j)^*\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)s_k^*\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_j(\delta_{jk}I)s_k^* = \sum_{j=1}^{n} s_js_j^* = I,\\
uu^* &= \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)s_j^*\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)s_k^*\right)^* = \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)s_j^*\right)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\varphi(s_k)^*\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_j)(\delta_{jk}I)\varphi(s_k)^* = \sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)\varphi(s_j)^* = I.
\end{aligned}$$

最後に，(EU-1) と (EU-2) が両立することを示します．

$$us_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)s_k^*\right)s_j = \sum_{k=1}^{n} \varphi(s_k)\delta_{kj}I = \varphi(s_j),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j)s_j^* = \sum_{j=1}^{n} (us_j)s_j^* = u\left(\sum_{j=1}^{n} s_js_j^*\right) = uI = u. \qquad \square$$

定理 (3.1) により，$\mathcal{O}_n$ のユニタリ u が具体的に作れれば，それに対応した自己準同型も作れます．簡単な例を作ってみましょう．

例 3.2 絶対値 1 の複素数 z と $\mathcal{O}_n$ の単位元 I を用いて

$$u = z\,I$$

と置くと，u は $\mathcal{O}_n$ のユニタリです．実際，$u^* = \bar{z}\,I$ ($\bar{z}$ は z の複素共役) ですから，$u^*u = uu^* = |z|^2\,I = I$ が成り立ちます．対応する自己準同型 φ_z は

$$\begin{aligned}\varphi_z(s_j) &= u\,s_j \\ &= z\,s_j, \quad z \in \boldsymbol{C},\ |z| = 1\end{aligned}$$

です．絶対値 1 の複素数全体の集合は積について閉じていて，積に関する単位元 1 を含み，更に任意の元 z に対してその逆 $z^{-1} = \bar{z}$ も含みます．すなわち，群になっています．この群を $U(1)$ と書きます．$z,\ w \in U(1) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1\}$ に対して，φ_z と φ_w の合成 $\varphi_z \circ \varphi_w$ は

$$\begin{aligned}(\varphi_z \circ \varphi_w)(s_j) &= \varphi_z(\varphi_w(s_j)) \\ &= \varphi_z(w\,s_j) = w\,\varphi_z(s_j) = zw\,s_j \\ &= \varphi_{zw}(s_j), \\ \therefore\ \varphi_z \circ \varphi_w &= \varphi_{zw}\end{aligned}$$

で与えられます．また，φ_1 は $\mathcal{O}_n$ の恒等写像 ι ($\iota(s_j) = s_j$) に等しく，$\varphi_{\bar{z}} \circ \varphi_z = \varphi_1 = \iota$ から，$\varphi_z^{-1} = \varphi_{\bar{z}}$ が得られます．従って，φ_z は自己同型です．$U(1)$ が群であったことを引き継ぐように，自己同型の集合 $Aut(\mathcal{O}_n, U(1)) \equiv \{\varphi_z \mid z \in U(1)\}$ も積 (合成) に関して群になり，これを $U(1)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用といいます．

例 3.3 n 次のユニタリ行列 $U = (u_{jk})$ [$U^*U = UU^* = I_n$, I_n は n 次の単位行列, U^* の (j,k) 成分は $u^*_{jk} = \bar{u}_{kj}$] を用いて

$$u = \sum_{j,k=1}^{n} u_{jk} s_j s_k^*$$

と置くと，u は $\mathcal{O}_n$ のユニタリになります．これは，2.3 節で見たように，$s_j s_k^*$ は $M_n(\boldsymbol{C})$ の生成元 $e_{j\,k}$ [(j,k) 成分が 1 で，他はすべて 0 の $(n \times n)$ 行列] と同じ形の関係式を満たすためです．ユニタリ u に対応する自己準同型 φ_U は

$$\begin{aligned}\varphi_U(s_j) &= u\,s_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} s_k u_{kj}\end{aligned}$$

となります．n 次のユニタリ行列全体を $U(n)$ として，$U, V \in U(n)$ に対応する自己準同型の合成は

$$\varphi_U \circ \varphi_V = \varphi_{UV},$$

となり，$\varphi_{I_n} = \iota$ であることから，$\varphi_U^{-1} = \varphi_{U^{-1}} = \varphi_{U^*}$ が得られ，φ_U も実は自己同型であることが分かります．$U(n)$ が群であることに対応して，自己同型の集合 $Aut(\mathcal{O}_n, U(n)) \equiv \{\varphi_U \,|\, U \in U(n)\}$ も積 (合成) に関して群になり，これを $U(n)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用といいます．$U(n)$ の元として $U = zI_n$ $(z \in U(1))$ をとると，$\varphi_U = \varphi_z$ となり，$Aut(\mathcal{O}_n, U(1)) \subset Aut(\mathcal{O}_n, U(n))$ が成り立ちます．

$Aut(\mathcal{O}_n, U(n))$ は $\mathcal{O}_n$ の n 個の生成元を線形変換として $U(n)$ で回しているだけですから，比較的簡単な自己同型といえるかもしれません．それでは，$m > n$ として $U(m)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用のようなものはあるのでしょうか？　この問題については，後で触れることにします．

例 3.4 クンツ環に限らず一般の $*$ 環 $\mathcal{A}$ での自己同型の例として，次の形のものがあります：

$$\varphi(A) = u\,A\,u^*, \quad A,\, u \in \mathcal{A},\ u^*u = uu^* = I.$$

ただし，ユニタリ u は 1 個固定して考えています．この φ が自己準同型であることを確認するのは容易ですので，演習問題とします [示すことは，φ が (E-1) ～(E-3) を満たすこと，単写であること (すなわち，$\varphi(A) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$)，$\varphi(I) = I$ が成り立つことです]．

自己同型 (全写) であることは，$\varphi(u) = uuu^* = u$ により，

$$A = \varphi(u^*)\varphi(A)\varphi(u)$$

と書けることから分かります．この形の自己同型は内部自己同型と呼ばれています．それに対して，内部自己同型でない自己同型を外部自己同型といいます．上であげた φ_z, φ_U は $z \neq 1, U \neq I_n$ ならば，外部自己同型です．

以上の例はいずれも自己同型でしたが，自己同型でない自己準同型の例をあげましょう．

例 3.5 正準自己準同型として知られているものは次式で与えられます．

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} s_k A s_k^*, \quad A \in \mathcal{O}_n.$$

これが自己準同型になることを確認しておきます [(E-1), (E-3) は省略]：

$$\begin{aligned}\varphi(A_1)\varphi(A_2) &= \left(\sum_{k=1}^{n} s_k A_1 s_k^*\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} s_\ell A_2 s_\ell^*\right) \\ &= \sum_{k,\ell=1}^{n} s_k A_1(\delta_{k\ell} I) A_2 s_\ell^* = \sum_{k=1}^{n} s_k A_1 A_2 s_k^* \\ &= \varphi(A_1 A_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(A) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = s_\ell^* \varphi(A) s_\ell &= s_\ell^* \left(\sum_{k=1}^{n} s_k A s_k^*\right) s_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{\ell k} I A \delta_{k\ell} I = A,\end{aligned}$$

$$\varphi(I) = \sum_{k=1}^{n} s_k I s_k^* = \sum_{k=1}^{n} s_k s_k^* = I.$$

自己同型 (全写) でないことは，s_j が $\varphi(\mathcal{O}_n)$ に含まれないことから分かります．実際，もし，$\varphi(A) = s_j$ を満たす $A \in \mathcal{O}_n$ が存在したとすると，$I = s_j^* s_j = s_j^* \varphi(A) = A s_j^*$ となります．従って，$\ell \neq j$ として，$s_\ell = I s_\ell = A s_j^* s_\ell = 0$ となり矛盾します．

正準自己準同型に対応するユニタリ u は

$$u = \sum_{j=1}^{n} \varphi(s_j) s_j^* = \sum_{j,k=1}^{n} s_k s_j s_k^* s_j^*$$

で与えられます．

例 3.6 $U = (u_{r\,t}) \in U(n^2) \subset M_{n^2}(\boldsymbol{C})$ に対して，同型 (MT-2) により $M_n(\boldsymbol{C}) \otimes M_n(\boldsymbol{C})$ の元が (MT-1) から決まります．具体的には

$$\sum_{j,k,p,q=1}^{n} u_{j+(p-1)n,\,k+(q-1)n} (e_{j\,k} \otimes e_{p\,q})$$

と表されます．ここで，$(e_{j\,k} \otimes e_{p\,q})$ と $s_j s_p s_q^* s_k^*$ は同じ形の関係式をみたすので，

$$u = \sum_{j,k,p,q=1}^{n} u_{j+(p-1)n,\,k+(q-1)n}\, s_j s_p s_q^* s_k^*$$

と置くと，u は $\mathcal{O}_n$ のユニタリになります．従って，(EU-1) より u に対応する自己準同型 φ_u が決まります：

$$\varphi_u(s_j) = u\, s_j = \sum_{k,p,q=1}^{n} u_{k+(p-1)n,\,j+(q-1)n}\, s_k s_p s_q^*.$$

これを (2 次の) 斉次多項式型自己準同型と呼びます (ただし，これは $U(n^2)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用にはなっていません).

特に，$U\,(\in U(n^2))$ として，I_{n^2} の n^2 個の行を置換したものを考えましょう．$\{1,2,\ldots,m\}$ の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_m$ と書くことにします [$\mathfrak{S}_m$ は群になり，m 次の対称群 (または置換群) と呼ばれています]．$\sigma\in\mathfrak{S}_{n^2}$ として，この σ で $I_{n^2}=(\delta_{r\,s})$ の行を置換した行列は $U_\sigma=(\delta_{\sigma(r)\,s})$ のように表されます．容易に確認出来るように $U_\sigma\in U(n^2)$ です．この U_σ に対応する $\mathcal{O}_n$ の自己準同型 φ_σ は

$$\varphi_\sigma(s_j)=\sum_{k,p,q=1}^{n}\delta_{\sigma(k+(p-1)n),\,j+(q-1)n}\,s_ks_ps_q^*$$

となり，これを (2 次の) 置換自己準同型と呼びます (これも $\mathfrak{S}_{n^2}$ の $\mathcal{O}_n$ への作用にはなっていません).

特に，$\rho\in\mathfrak{S}_{n^2}$, $\rho(k+(p-1)n)=p+(k-1)n$ に対する置換自己準同型は

$$\begin{aligned}\varphi_\rho(s_j)&=\sum_{k,p,q=1}^{n}\delta_{p+(k-1)n,\,j+(q-1)n}\,s_ks_ps_q^*=\sum_{k,p,q=1}^{n}\delta_{p\,j}\delta_{k\,q}\,s_ks_ps_q^*\\&=\sum_{k=1}^{n}s_ks_js_k^*\end{aligned}$$

となり，正準自己準同型を再現します.

ここまでは，定理 3.1 に基づいてユニタリとの対応で自己準同型を見てきましたが，クンツ環の間の埋め込みとの関連から自己準同型を見ることも出来ます．一般の $\mathcal{O}_n$ では式が複雑になりますので，簡単のため $\mathcal{O}_2$ について考えます．まず，任意の $n\,(\geqq 2)$ で $\mathcal{O}_n$ は $\mathcal{O}_2$ に埋め込み可能で，埋め込みは生成元の像を与えることで定まることを思い出しましょう．そこで，以下では埋め込みを表すのに写像の代わりに，生成元の像を書くことにします.

定理 3.7 $\mathcal{O}_n$ $(n\geqq 2)$ から $\mathcal{O}_2$ への埋め込みを $\{T_1,\ldots,T_n\}$ とするとき，$\mathcal{O}_2$ の自己準同型 φ と $\mathcal{O}_{n+1}$ から $\mathcal{O}_2$ への埋め込み $\{S_1,\ldots,S_{n+1}\}$ は次の式で 1 対 1 に対応する:

$$\begin{cases}\varphi(s_1)&=&S_1,\\ \varphi(s_2)&=&\displaystyle\sum_{j=1}^{n}S_{j+1}T_j^*;\end{cases}$$

$$S_j=\begin{cases}\varphi(s_1), & j=1,\\ \varphi(s_2)\,T_{j-1}, & j\in\{2,3,\ldots,n+1\}.\end{cases}$$

証明は演習問題とします．定理 3.1 の証明法に習ってやってみて下さい．

例 3.8 $n=2$ のとき，$\{T_1=s_1,\, T_2=s_2\}$，$\{S_1=s_2s_1,\, S_2=(s_2)^2,\, S_3=s_1\}$ とすると，

$$\varphi(s_1)=s_2s_1, \qquad \varphi(s_2)=(s_2)^2s_1^*+s_1s_2^*$$

が得られます．前の自己準同型の例とは一見して形が異なることが分かると思います．

例 3.9 $n=3$ のとき，$\{T_1=s_2s_1,\, T_2=s_1,\, T_3=(s_2)^2\}$, $\{S_1=s_2s_1,\, S_2=s_1,\, S_3=(s_2)^2s_1,\, S_4=(s_2)^3\}$ とすれば，

$$\begin{cases} \varphi(s_1) &= s_2s_1, \\ \varphi(s_2) &= s_1s_1^*s_2^*+(s_2)^2s_1s_1^*+(s_2)^3(s_2^*)^2 \end{cases}$$

が得られますが，この φ は自己同型です．なぜなら，$\varphi\circ\varphi=\iota$ (ι は恒等写像) となるので $\varphi^{-1}=\varphi$ が成り立つからです．言い換えると，φ は $\boldsymbol{Z}_2$ (位数 2 の巡回群) の $\mathcal{O}_2$ への作用になっています．

例 3.10 $n=4$ の場合，$\mathfrak{S}_3$ の $\mathcal{O}_2$ への作用となる自己同型が作れます．

まず，$\{T_1,\,\ldots,\,T_4\}$, $\{S_1,\,\ldots,\,S_5\}$ を

$$\{T_1=s_1, \quad T_2=s_2s_1, \quad T_3=(s_2)^2s_1, \quad T_4=(s_2)^3\},$$
$$\{S_1=T_1, \quad S_2=T_2, \quad S_3=T_3, \quad S_4=s_2T_3, \quad S_5=s_2T_4\}.$$

のようにとります．次に，$\{1,\,2,\,3\}$ の置換全体を $\mathfrak{S}_3$ とし，$\sigma\in\mathfrak{S}_3$ を用いて定理 3.7 の式における $\{T_1,T_2,T_3\}$ と $\{S_1,S_2,S_3\}$ を置換した式で自己準同型 φ_σ を定義します：

$$\begin{cases} \varphi_\sigma(s_1) &= S_{\sigma(1)} \\ &= T_{\sigma(1)}, \\ \varphi_\sigma(s_2) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{2} S_{\sigma(k+1)}T_{\sigma(k)}^*+S_4T_{\sigma(3)}^*+S_5T_4^* \\ &= \displaystyle\sum_{k=1}^{2} T_{\sigma(k+1)}T_{\sigma(k)}^*+s_2(T_3T_{\sigma(3)}^*+T_4T_4^*). \end{cases}$$

このとき，φ_σ は $\mathfrak{S}_3$ の $\mathcal{O}_2$ への作用 (自己同型) になります：

$$\varphi_\sigma\circ\varphi_\tau=\varphi_{\sigma\circ\tau}, \qquad \sigma,\,\tau\in\mathfrak{S}_3,$$
$$\varphi_\varepsilon=\iota, \qquad \varepsilon\ :\ \text{恒等置換}.$$

証明は，$\varphi_\sigma(T_j) = T_{\sigma(j)}$ $(j \in \{1,2,3\})$, $\varphi_\sigma(T_4T_4^*) = T_4T_4^*$ を用いれば容易です．

これを一般の $n = m+1$ の場合に拡張すれば，$\mathfrak{S}_m$ の $\mathcal{O}_2$ への作用も同様に作ることが出来ます．

例 3.11 前の例で，$\mathfrak{S}_3$ を $U(3)$ へ拡張することも容易です．$U = (u_{jk}) \in U(3)$ として $T_{\sigma(k)}$ を $T_{u(k)} \equiv \sum_{j=1}^{3} T_j u_{jk}$ に置き換えることで φ_u を定義すれば，$\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_{uv}$ が得られます．更に，一般の $U(m)$ の $\mathcal{O}_2$ への作用も作ることが出来ます．

$\mathcal{O}_2$ への作用を $\mathcal{O}_n$ への作用に拡張するには，定理 2.25 に基づいて考えます．そうすれば，$U(k(n-1))$ $(k \geqq 3)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用も同様に作ることが出来ます．$m \leqq k(n-1)$ のとき，

$$U(m) \ni U \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{k(n-1)-m} \end{pmatrix} \in U(k(n-1))$$

の対応で $U(m)$ は $U(k(n-1))$ の部分群と見なせるので，$U(m)$ $(m > n)$ の $\mathcal{O}_n$ への作用が作れます ($n=2$ のときは $k \geqq 3$，$n \geqq 3$ のときは $k \geqq 2$ で考えます)．これが例 3.3 の最後に述べた問いへの答えです．

4 クンツ環の表現

これまでクンツ環を抽象的な $*$ 環として見てきましたが，この節では具体的な作用素のなす $*$ 環として表してみましょう．これは正確に言うと，クンツ環からヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体のなす集合 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$ 準同型 π を与えることです．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と準同型 π の組を表現と呼び，$(\mathcal{H}, \pi)$ のように表します．$\mathcal{H}$ は表現空間ともいいます．

以下では $\mathcal{H}$ として，複素数列のつくる ℓ_2 空間と呼ばれものをとります：

$$\ell_2 \equiv \left\{ \Phi = \{\Phi_k\}_{k \in \boldsymbol{N}},\ \Phi_k \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; \sum_{k \in \boldsymbol{N}} |\Phi_k|^2 < \infty \right\}.$$

ℓ_2 の元に対する線形結合は次のように定義されます．

$$c\Phi + d\Psi = \{c\Phi_k + d\Psi_k\}_{k \in \boldsymbol{N}}, \qquad c,\, d \in \boldsymbol{C}.$$

また，内積は

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{k \in \boldsymbol{N}} \overline{\Phi_k} \Psi_k, \qquad\qquad \overline{\Phi_k} \text{ は } \Phi_k \text{ の複素共役}$$

で定義され，その性質は次の通りです：

$$\langle \varPhi,\, c\varPsi_1 + d\varPsi_2\rangle = c\,\langle \varPhi,\, \varPsi_1\rangle + d\,\langle \varPhi,\, \varPsi_2\rangle, \qquad c,\, d \in \boldsymbol{C},$$
$$\overline{\langle \varPhi,\, \varPsi\rangle} = \langle \varPsi,\, \varPhi\rangle,$$
$$\langle \varPhi,\, \varPhi\rangle \geqq 0, \qquad \langle \varPhi,\, \varPhi\rangle = 0 \Leftrightarrow \varPhi = 0.$$

内積からノムル $||\varPhi|| \equiv \Big(\sum_{k\in\boldsymbol{N}} |\varPhi_k|^2\Big)^{1/2}$ が定められます．ℓ_2 はこのノルムについて完備ですが，クンツ環同様，完備性については深入りしません．ℓ_2 の標準的な正規直交基底 $\{e_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ の e_k は，k 番目が 1 で他がすべて 0 である数列として定義されます．

$*$準同型 π は，次のように線形結合，積，$*$演算を保存します：

$$\pi(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1\pi(A_1) + c_2\pi(A_2),$$
$$\pi(A_1A_2) = \pi(A_1)\pi(A_2),$$
$$\pi(A^*) = \pi(A)^*.$$

ただし，$\pi(A)^*$ は $\pi(A)$ のエルミート共役で，任意の $\varPhi, \varPsi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle \pi(A)^*\,\varPhi,\, \varPsi\rangle = \langle \varPhi,\, \pi(A)\,\varPsi\rangle$$

を満たします．

さて，$\mathcal{O}_n$ の表現 $(\ell_2,\, \pi)$ を作ってみましょう．$\mathcal{O}_n$ の生成元の像 $\{\pi(s_j)\}_{j=1}^{n}$ が ℓ_2 の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ にどのように作用するかを示せば十分です．

例 4.1 $\pi(s_1)$ が固有値 1 の固有ベクトル e_1 をもつ表現の例です．

$$\pi(s_j)\,e_k = e_{n(k-1)+j}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \boldsymbol{N}. \tag{R-1}$$

実際，$j = k = 1$ を代入すると，

$$\pi(s_1)\,e_1 = e_1$$

が得られます．これが $\mathcal{O}_n$ の表現になっていること，すなわち，$\mathcal{O}_n$ の生成元の間の関係式 ($\mathcal{O}_n$-1), ($\mathcal{O}_n$-2) が保たれていることを確認しましょう．そのために，まず，$\pi(s_j^*) = \pi(s_j)^*$ の作用をエルミート共役の定義に従って求めます．

$$\begin{aligned}\langle \pi(s_j)^*\,e_{n(k-1)+h},\, e_\ell\rangle &\equiv \langle e_{n(k-1)+h},\, \pi(s_j)\,e_\ell\rangle \\ &= \langle e_{n(k-1)+h},\, e_{n(\ell-1)+j}\rangle = \delta_{k\,\ell}\,\delta_{h\,j} \\ &= \delta_{j\,h}\,\langle e_k,\, e_\ell\rangle, \\ \therefore\ \pi(s_j)^*\,e_{n(k-1)+h} &= \delta_{j\,h}e_k.\end{aligned}$$

これにより，ℓ_2 上の恒等写像を $\hat{I}$ として，次が得られます．

$$\pi(s_j)^*\pi(s_k)\,e_\ell = \pi(s_j)^*\,e_{n(\ell-1)+k} = \delta_{j\,k}\,e_\ell,$$
$$\therefore\ \pi(s_j)^*\pi(s_k) = \delta_{j\,k}\hat{I},$$
$$\sum_{j=1}^{n}\pi(s_j)\pi(s_j)^*\,e_{n(k-1)+\ell} = \sum_{j=1}^{n}\pi(s_j)\delta_{j\,\ell}\,e_k = \pi(s_\ell)\,e_k = e_{n(k-1)+\ell},$$
$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n}\pi(s_j)\pi(s_j)^* = \hat{I}.$$

例 4.2 $\pi(s_1s_2)$ が固有値 1 の固有ベクトル e_1 をもつ表現の例です．

$$\begin{cases} \pi(s_1)\,e_k &= \begin{cases} e_{n+1}, & k=1,\\ e_1, & k=2,\\ e_{n(k-1)+1}, & k \geqq 3,\end{cases} \\ \pi(s_j)\,e_k &= e_{n(k-1)+j}, \qquad j\in\{2,\ldots,n\},\quad k\in\boldsymbol{N}. \end{cases} \tag{R-12}$$

これは，(R-1) の右辺に現れる e_1 と e_{n+1} の位置を交換しただけで得られたものです．

固有ベクトルを確認してみると，

$$\pi(s_1s_2)\,e_1 = \pi(s_1)\pi(s_2)\,e_1 = \pi(s_1)\,e_2 = e_1$$

が成り立ちます．そして更に，

$$\pi(s_2s_1)\,e_2 = \pi(s_2)\pi(s_1)\,e_2 = \pi(s_2)\,e_1 = e_2$$

も成り立つことから，$\pi(s_2s_1)$ も固有値 1 の固有ベクトル e_2 をもちます．例 4.1 と同様に，式 (R-12) が $\mathcal{O}_n$ の表現になっていることを確認するのも容易です．

以上の例を一般化してみましょう．まず，$\boldsymbol{N}$ を n 個に分割するために，次のような分岐関数系を導入します．

定義 4.3 $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への n 個の単写の組 $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ が以下の条件を満たすとき，(n 次の) 分岐関数系といいます：

(i) $j\neq k$ ならば，$\mu_j(\boldsymbol{N})\bigcap\mu_k(\boldsymbol{N})=\emptyset$.

(ii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n}\mu_j(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}$.

この分岐関数系を用いて，クンツ環 $\mathcal{O}_n$ の表現を定義します：

定義 4.4 分岐関数系 $\{\mu_j\}_{j=1}^{n}$ に対して，次式を満たす $\mathcal{O}_n$ の表現 (ℓ_2, π) を置換表現といいます：

$$\pi(s_j)\, e_k = e_{\mu_j(k)}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \boldsymbol{N}.$$

実際にこれが $\mathcal{O}_n$ の表現になることを確認しましょう．まず，分岐関数系の定義から任意の $p \in \boldsymbol{N}$ に対して $\mu_k(\ell) = p$ を満たす (k, ℓ) がただ一組存在することに注意して，$\pi(s_j)^*$ の $e_{\mu_k(\ell)}$ に対する作用を求めます：

$$\begin{aligned}
\langle \pi(s_j)^*\, e_{\mu_k(\ell)},\, e_m \rangle &\equiv \langle e_{\mu_k(\ell)},\, \pi(s_j)\, e_m \rangle \\
&= \langle e_{\mu_k(\ell)},\, e_{\mu_j(m)} \rangle = \delta_{k\,j}\delta_{\ell\,m} \\
&= \delta_{j\,k}\, \langle e_\ell,\, e_m \rangle, \\
\therefore\ \ \pi(s_j)^*\, e_{\mu_k(\ell)} &= \delta_{j\,k}\, e_\ell.
\end{aligned}$$

これにより，例 4.1 の場合と同様にして，次を得ることが出来ます．

$$\begin{aligned}
\pi(s_j)^*\pi(s_k)\, e_\ell &= \pi(s_j)^*\, e_{\mu_k(\ell)} = \delta_{j\,k}\, e_\ell, \\
\therefore\ \ \pi(s_j)^*\pi(s_k) &= \delta_{j\,k}\hat{I}, \\
\sum_{j=1}^{n} \pi(s_j)\pi(s_j)^*\, e_{\mu_k(\ell)} &= \sum_{j=1}^{n} \pi(s_j)\delta_{j\,k}\, e_\ell = \pi(s_k)\, e_\ell = e_{\mu_k(\ell)}, \\
\therefore\ \ \sum_{j=1}^{n} \pi(s_j)\pi(s_j)^* &= \hat{I}.
\end{aligned}$$

さて，$\mathcal{O}_n$ の置換表現は，例 4.1, 例 4.2 で紹介したような固有値 1 の固有ベクトルをもつものと，そうでないものとに分類することが出来ます．そこで，前者に次のように名前をつけておきましょう．

定義 4.5 固有値 1 の固有ベクトルを持つ単項式 $\pi(s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m})$ $(m \geqq 1)$ が存在する置換表現を，サイクルをもつ置換表現といい，$P(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ で表します．

ここで，サイクルについて説明しておきます．$\pi(s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m})$ の固有値 1 の固有ベクトルを $f_1 \in \{e_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ とすると

$$\pi(s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m})\, f_1 = f_1,$$

が成り立ちますが，両辺に $\pi(s_{j_m})$, $\pi(s_{j_{m-1}})$, ..., $\pi(s_{j_3})$, $\pi(s_{j_2})$ を次々に掛けてゆくことで他の固有ベクトルを得ることが出来ます：

$$\begin{aligned} \pi(s_{j_m}s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{m-1}})\,f_m &= f_m, & f_m &\equiv \pi(s_{j_m})\,f_1,\\ \pi(s_{j_{m-1}}s_{j_m}s_{j_1}\cdots s_{j_{m-2}})\,f_{m-1} &= f_{m-1}, & f_{m-1} &\equiv \pi(s_{j_{m-1}})\,f_m,\\ &\vdots\\ \pi(s_{j_2}s_{j_3}\cdots s_{j_m}s_{j_1})\,f_2 &= f_2, & f_2 &\equiv \pi(s_{j_2})\,f_3. \end{aligned}$$

もちろん，f_1 の定義から，

$$\pi(s_{j_1})\,f_2 = f_1$$

も得られます．サイクルとは，固有ベクトルの集合 $\{f_j\}_{j=1}^n$ のことをさし，サイクルに属するベクトルは，適当な $\pi(s_j)$ の作用で順に写り合うのです．また，$P(j_1, j_2, \ldots j_m)$ の $j_1, \ldots, j_m$ を巡回置換して得られる表現は実質的にはもとの表現と同等 (正確には，既約表現 (下記参照) の場合にユニタリ同値) であることも理解出来ます．

次に，表現 $P(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ の性質を見るために，添字の列についての周期性を定義します．

定義 4.6 添字の有限列 $J \equiv (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ $(j_k \in \{1, \ldots, n\})$ が周期的であるとは, $p\,(< m)$ を m の約数として，J が $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ の繰り返しであること．

例 4.7 $(1, 1) = ((1), (1))$, $(1, 2, 1, 1, 2, 1) = ((1, 2, 1), (1, 2, 1))$ は周期的. (1), (2), $(1, 2)$, $(1, 2, 3, 1)$ は非周期的.

周期性を用いると，既約性についての次の定理を述べることが出来ます．ただし，添字の有限列 J が周期的で J が J' の繰り返しで書けるとき，置換表現 $P(J)$ は $P(J')$ とは異なるものを指すとします．

定理 4.8 クンツ環 $\mathcal{O}_n$ のサイクルをもつ置換表現 $P(j_1, j_2, \ldots j_m)$ が既約表現であるための必要十分条件は，$J = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ が非周期的であることです．

注意 4.9 既約表現とは，自明でない不変部分空間をもたない表現です．不変部分空間とは，表現空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{K}$ で，$\Phi \in \mathcal{K}$ ならば任意の $A \in \mathcal{O}_n$ に対して $\pi(A)\Phi \in \mathcal{K}$ を満たすものです．また，自明な不変部分空間とは，$\mathcal{H}$ と $\{0\}$ のことです．