

そこで, 実数列 a_j ($j = 1, 2, \dots$) を $j a_j = C + C \sum_{p=1}^{j-1} a_p$ によって定めます.

問題 $|G_j| \leq a_j$ を示してみてください.

形式ベキ級数 $Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ をみてみましょう. a_j のとりかたより, $Q(z)$ は微分方程式

$$z \frac{d}{dz} Q(z) = C \frac{z}{1-z} Q(z)$$

を満たすことがわかります. これより, $Q(z) = (1-z)^{-C}$ であることがわかるので, $Q(z)$ は収束半径が 1 の収束ベキ級数であることがわかります. これより, $I + \sum_{j=1}^{\infty} G_j z^j$ が $B(0, 1)$ で収束することがわかります. (優級数の方法といわれる議論を用いました.)

問題 上で述べたことを用いて, $B(0, \epsilon) \subset X$ ならば, 形式解 $I + \sum_{j=1}^{\infty} G_j z^j$ が $B(0, \epsilon)$ 上で収束することを示してみてください.

大域的な問題 まず, 領域 $U_1, U_2 \subset X$ が与えられていて, 各 U_i ($i = 1, 2$) 上で自明化 $G_i \in GL_m(\mathcal{H}_{U_i})$ が存在すると仮定します. すると, $U_1 \cap U_2$ 上で二つの自明化が得られることとなります. $U_1 \cap U_2$ が連結ならば, その違いは 定数行列によって与えられます. すなわち, $H := G_2^{-1} G_1$ は定数行列です. $G_2 H \in GL_m(\mathcal{H}_{U_2})$ も U_2 上での自明化を与えています. そこで, $G \in GL_m(\mathcal{H}_{U_1 \cup U_2})$ を, $G|_{U_1} = G_1$, $G|_{U_2} = G_2 H$ によって定めると, $U_1 \cup U_2$ 上での自明化を与えていることがわかります.

$U_1 \cap U_2$ が連結でない場合どうかというと, 各連結成分から定数を成分に持つ行列が出てきてしまいます. これらが全て等しければ, 上と同じように補正することで $U_1 \cup U_2$ 上の自明化をとることができますが, 一般にはできません. 簡単な例として, $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で, $g \in \mathcal{H}_X$ に関する

$$\frac{dg}{dz} - \frac{g}{2z} = 0$$

という微分方程式をみてみます.

$$U_1 = \{z \in X \mid -2\pi/3 < \arg(z) < 2\pi/3\}, \quad U_2 = \{z \in X \mid \pi/3 < \arg(z) < 5\pi/3\}$$

とすると, U_1, U_2 上ではそれぞれ, $z^{1/2}$ の適当な分枝が解を与えます. とりあえず, U_1 上では $f_1(1) = 1$ となる分枝をとり, U_2 上では $f_2(-1) = \sqrt{-1}$ となる分枝をとります. $U_1 \cap U_2$ は

$$Z_1 = \{z \in X \mid \pi/3 < \arg(z) < 2\pi/3\}, \quad Z_2 = \{z \in X \mid -2\pi/3 < \arg(z) < -\pi/3\}$$

の和としてあらわされます. f_1 と f_2 は Z_1 上では一致し, Z_2 上では (-1) 倍のずれが生じます. ですから, この場合は X 上では (素朴な意味では) 解けないということになります.

この例からも, X 内ではつぶせないループの存在が, X 全体で解けるための障害になっていることがみてとれます. 領域の位相的性質に関する言葉を一つ用意します. 連結な領域 X が単連結であるとは, z_0 と z_1 をつなぐ道 γ_i ($i = 0, 1$) が与えられた時, γ_0 と γ_1 をつなぐホモトピーが存在することです. すなわち, 連続写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ で $F(s, 0) = \gamma_0(s)$, $F(s, 1) = \gamma_1(s)$, $F(0, t) = z_0$, $F(1, t) = z_1$ を満たすものが存在することを意味します. すると, 一般論として次のことがわかります.

- X が単連結ならば, (11) は自明な系に変換できる.

直感的には簡単です. $z_0 \in X$ を一つ固定します. z_0 のまわりで, 自明化 G_{z_0} をとったとする. $z \in X$ をとったとき, z のまわりでの自明化 G_z をとるために次のような操作を考えます. z_0 から z への道 γ をとります. 簡単のために, 自分自身とは交わらないものを考えます. (つまり, $\gamma(s) = \gamma(s')$ となる $s \neq s'$ は存在しないとします.) 適当に $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = 1$ と, $\epsilon_i > 0$ ($i = 0, \dots, N$) をとると,

$$\gamma([0, 1]) \subset \bigcup_{i=0}^N B(\gamma(s_i), \epsilon_i) \subset X, \quad B(\gamma(s_i), \epsilon_i) \cap B(\gamma(s_j), \epsilon_j) = \emptyset \quad (|i - j| > 1)$$

のようにできます. すると, $B(\gamma(s_0), \epsilon_0)$ 上の自明化から始めて, 順々に $B(\gamma(s_i), \epsilon_i)$ 上の自明化を構成できます. 特に, $z = \gamma(s_N)$ のまわりでの自明化 $G_{z, \gamma}$ が得られます. この自明化が道のホモトピー類のみに依存することがわかります. つまり, γ_1 と γ_2 がホモトピックならば, $G_{z, \gamma_1} = G_{z, \gamma_2}$ がわかります. これも直感的にはほぼ明らかで, 上の道 γ を少しずらしても, $G_{z, \gamma}$ が変わらないので, 連続的に動かす分には変わらない, ということになります. γ に依存しないので G_z とかくことにしましょう. z' が z に十分近ければ, $G_{z'}$ は G_z と一致することもわかります. ですから, 大域的な自明化をとれる, ということになります.

X が単連結でない場合も, $G_{z, \gamma}$ が γ のホモトピー類のみに依存する, というところまでは同じですが, γ_1 と γ_2 がホモトピックでない場合には, 一般には $G_{z, \gamma_1} \neq G_{z, \gamma_2}$ となります. この場合, 方程式系 (11) の複雑さをはかる量としてモノドロミー表現があります. γ を z_0 から出発して z_0 に帰ってくる道だとします. この時, $G_{z_0, \gamma} = G_{z_0} H_\gamma$ のように $H_\gamma \in GL_m(\mathbb{C})$ が定まります. ここでは詳細は省きますが, 始点と終点が z_0 であるような道のホモトピー類全体を $\pi_1(X, z_0)$ であらわし, X の基本群とよびます. これには自然に群構造が入ります. そして, $\gamma \mapsto H_\gamma$ は準同型 $\rho: \pi_1(X, z_0) \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ を与えます. これをモノドロミー表現といいます. 二つの準同型 ρ_1, ρ_2 が与えられた時, ある $B \in GL_m(\mathbb{C})$ があって, $\rho_1(\gamma) = B^{-1}\rho_2(\gamma)B$ となる時, ρ_1 と ρ_2 は共役であるといいます. X が連結であれば, 次のことがわかります.

- $\pi_1(X, z_0)$ の基本群の表現の共役類と X 上の連立一次微分方程式の同型類が自然に一対一対応する.

これはいわゆるリーマン・ヒルベルト対応の最も素朴な場合です. 微分を使って記述されるデータと, 位相的な情報だけで記述されるデータの間の (簡単ですが) 非常に美しい対応です. 具体的に与えられた方程式に対してモノドロミーを実際に計算する, というのは一般には難しい問題です. (例えば, [3], [6] などをご覧ください.) それでも, どのような量を調べれば, その微分方程式を理解できるのかに関する一般的な指針を与えているといえます.

微分加群 少し余談になりますが, 微分加群について触れておきます. 行列の対角化やジョルダン標準形への変換は基底のとりかえによって線型写像の表示を簡単化する操作とみなせたことを思い出しましょう. V を m 次元ベクトル空間とし, $F: V \rightarrow V$ を線形写像とします. V の基底 (v_1, \dots, v_m) を一つとると, $F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$ とあらわされることから行列 $A = (a_{ij})$ が定まります. この行列を F の基底 (v_1, \dots, v_m) に関する行列表示といいます. V の基底を (v_1, \dots, v_m) から $(v_1, \dots, v_m)B$ にとりかえることで, F の行列表示が A から $B^{-1}AB$ に変換されるのでした.

同様に, $V = \mathcal{H}_X^m$ として, $P: V \rightarrow V$ を

$$P(g) = \frac{dg}{dz} + Ag$$

によって定めます. これは,

$$P(fg) = fP(g) + \frac{df}{dz}g \quad (\forall f \in \mathcal{H}_X, \forall g \in \mathcal{H}_X^m)$$

を満たします. V の標準基底を (e_1, \dots, e_m) とします. これを $(e_1, \dots, e_m)G$ にとりかえた時に P の行列表示が $G^{-1}dG/dz + G^{-1}AG$ となります. (特に特異性を持つ場合には) このような見方をした方が, わかりやすくなる面もありますが, 今回はあまり触れないことにします.

3 特異性のある連立一次微分方程式

前章では, 方程式 (11) で $A \in M_m(\mathcal{H}_X)$ の場合を考えました. 次に, $D \subset X$ を離散的とし, $A \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ の場合を考えてみます. 前章と同様に, 大域的, 局所的, 形式的, のようにいくつかのレベルに分けて考えられます. 局所的な問題に関してよくわかれば, 大域的な問題に関しては非特異の場合と同様に議論できます. ですから, 局所的な問題や形式的な問題だけを考えることにします. 以下では $X = B(0, 1)$, $D = \{0\}$ とします. $X^* := X \setminus D$ とおきます. 引用のために, もう一度方程式を書いておきます. ($A \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ です.)

$$\frac{dg}{dz} + Ag = 0 \quad (16)$$

3.1 超越的な変換

原点 0 まわりの挙動は気にしないことにして, (16) を単純に X^* 上の方程式と思った時には, モノドロミーによって理解できることになります. すなわち, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X^*$ を $\gamma(s) = \epsilon \exp(2\pi\sqrt{-1}s)$ によって与えておくと, この γ に沿ったモノドロミーによって X^* 上の方程式系を分類できることになります.

この粗い分類をまず見ておきます. 標準的なものを用意するために, 天下り式になりますが, $B \in M_m(\mathbb{C})$ とし,

$$\frac{dg}{dz} + \frac{1}{z} Bg = 0 \quad (17)$$

という方程式をみてみます. この方程式の一般解は (多価性に関してはおおらかに),

$$\exp(-B \log z) \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m) \quad (18)$$

となります. したがって, γ に沿ったモノドロミーは $\exp(-2\pi\sqrt{-1}B)$ となります. 逆にモノドロミーが C であるような X^* 上の微分方程式系 (16) は, $\exp(-2\pi\sqrt{-1}B) = C$ となるような B を一つ選ぶと, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{H}_{X^*})$ によって (17) に変換されます.

ここで B の選び方が一意的ではないことを注意しておきます. 例えば, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{C}$ とすると,

$$\exp\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array}\right) = \exp\left(\begin{array}{cc} a + 2\pi\sqrt{-1}p & 0 \\ 0 & b + 2\pi\sqrt{-1}q \end{array}\right)$$

でした. つまり, B の固有値の選び方に任意性があります. 一つの標準的な選び方は, B の固有値 α が $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ を満たす, という条件をつけておくことですが, どうしてもこうでなければいけない, というものではありません.

とにかく, $GL_m(\mathcal{H}_{X^*})$ による変換で, (16) を (17) のような標準形にできることがわかります. しかし, このような粗い分類では不十分です. \mathcal{H}_{X^*} には真性特異点を持つような関数も含まれていますので, “適当な $G \in GL_m(\mathcal{H}_{X^*})$ ” というだけでは, 原点 0 のまわりでの G の振舞をほとんど制御できません. 元々 $\mathcal{M}_{X,0}$ という比較的制御しやすいところで考えていた方程式を, \mathcal{H}_{X^*} という非常に巨大なところで変換するのは, 望ましいことではないのです. 可能ならば $G \in GL_m(\mathcal{M}_{X,0})$ による変換で簡単な形にしたいところです. (実際には, この素朴な希望は一般には満たされませんが.) また, 特異点是非特異な点に比べて扱いが難しくなりますが, 逆にそれだけ情報が凝縮されています. 特異点を無視するのではなく, 特異点における情報をよみとれば方程式系を理解する上で有益です.

以下では, 前章と同じように, (0 における) 形式的な問題をまず考え, それが解析的な問題とどのように関わるかをみていきます. 以下で述べるように, 対数的な場合にはそれが非常にうまくいきました. それ以外の場合にも, モノドロミーとストークス構造によって理解できる, という一般的な指針は得られます.

3.2 対数的な場合

対数的な場合とは, A が高々1位の極を持つ場合です. $B := zA \in M_m(\mathcal{H}_X)$ とおくと, (16) は

$$z \frac{d\mathbf{g}}{dz} + B\mathbf{g} = 0 \quad (19)$$

という方程式になります. 前節でもみたように, B が定数であれば (19) は非常に簡単なものであるといえます. 一般の場合を B が定数の場合に変換できることをみてみましょう. ここで簡単のために次の条件を満たしているとします.

(P) α, β を $B(0)$ の相異なる固有値とすると, $\alpha - \beta$ は整数でない. ($B(0)$ は $B \in M_m(\mathcal{H}_X)$ の原点0における値.)

B に対して, 微分方程式

$$z \frac{dG}{dz} + BG = GB(0), \quad G(0) = I \quad (20)$$

を満たす $G \in GL_m(\mathcal{H}_X)$ が存在したとします. この時, $\mathbf{g} = G\mathbf{h}$ とすると,

$$z \frac{d(G\mathbf{h})}{dz} + BG\mathbf{h} = zG \frac{d\mathbf{h}}{dz} + z \frac{dG}{dz} \mathbf{h} + BG\mathbf{h} = G \left(z \frac{d\mathbf{h}}{dz} + B(0)\mathbf{h} \right)$$

より, (19) は

$$z \frac{d\mathbf{h}}{dz} + B(0)\mathbf{h} = 0 \quad (21)$$

という方程式に変換されます.

問題 $G \in M_m(\mathcal{H}_X)$ が (20) を満たせば,

$$z \frac{d}{dz} \det G + (\operatorname{Tr} B - \operatorname{Tr} B(0)) \det G = 0$$

が成り立つことを示してみてください. 特に, $G \in GL_m(\mathcal{H}_X)$ であることを示してみてください.

そこで, (20) を解いてみます.

形式的な問題 テーラー展開 $B = \sum_{j=0}^{\infty} B_j z^j$ と $G = I + \sum_{j=1}^{\infty} G_j z^j$ を (20) に代入して, z^j の係数をとりだすと,

$$[B_0, G_j] + jG_j = - \sum_{\substack{p+q=j \\ q < j}} B_p G_q, \quad (j \geq 1) \quad (22)$$

という関係式が得られます. ($G_0 = I$ としています.) ここで, $B_0 = B(0)$ なので, 条件 **(P)** より, G_1, \dots, G_{j-1} が与えられた時, (22) を満たす G_j が一意的に定まります. (下の問題を参照.)

問題 $N \in M_m(\mathbb{C})$ とします. 線型写像 $F_N : M_m(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$ を $F_N(Y) = [N, Y]$ によって定めます. F_N の固有値全体は, $\{\alpha - \beta \mid \alpha, \beta \text{ は } N \text{ の固有値}\}$ であることを示してみてください.

問題 $j \geq 1$ とします. 任意の $Z \in M_m(\mathbb{C})$ に対して, $[B_0, Y] + jY = Z$ となる $Y \in M_m(\mathbb{C})$ が一意的に存在することを示してみてください. また, j, Z に依存しない定数 $C > 0$ を用いて, $|Y| \leq C|Z|$ のように抑えられることを示してみてください.

したがって, 帰納的に G_j が定まり形式解 $G = I + \sum_{j=1}^{\infty} G_j z^j$ が得られます.

局所的な問題 適当な定数 $C > 0$ を用いて $|G_j| \leq C(1 + \sum_{q=1}^{j-1} |G_q|)$ と抑えられます。(上の問題を参照。) これより, 優級数の議論を用いると G の収束がわかります。(非特異の場合を参照。) したがって, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{M}_{X,D})$ の元を用いて方程式系 (19) を標準的な場合 (すなわち B が定数の場合) に変換できること, さらに, そのような G は (22) を帰納的に用いれば計算できるということがわかりました。また, 標準形自体は特別な計算をしなくても B から $B(0)$ をとりだすことで得られますし, 0 のまわりのループに沿ったモノドロミーは $\exp(-2\pi\sqrt{-1}B(0))$ となります。

つまり, 対数的で条件 **(P)** が満たされているものは (局所的な問題に関していうと), 超越的な場合と同様にモノドロミーで分類できますし, さらにそのモノドロミーも特異点である原点におけるデータだけで簡単に計算できてしまいます。また, 解の挙動に関しても, G を具体的に計算しなくても, 原点 0 のまわりでは正則関数と $\log(z)$ と z^α (α は B_0 の固有値) によって表されることがわかります。

補足 対数型であれば, 条件 **(P)** が満たされていない場合も容易です。ここでは詳細を省きますが, 適当に $G \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ をとり変換 $g = Gh$ を考えると, 条件 **(P)** が満たされるようにできることを示すのは難しいことはありません。また, G の標準的な構成法もあります。

補足 対数的な連立一次微分方程式系と確定特異点を持つ常微分方程式の間には密接な関係があります。Fuchs の条件によると, 確定特異点を持つ常微分方程式から対数的な連立一次微分方程式系を自然に作れます。逆に, 対数的な連立一次微分方程式系が与えられた時, サイクリックベクトルをとると, 確定特異点を持つ常微分方程式が得られます。

3.3 一般の場合

A が対数的とは限らない場合を考えてみます。まず小手調べに $m = 1$ の場合を見てみましょう。この時, $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{X,D}$ と複素数 α を用いて $A = d\mathbf{a}/dz + \alpha/z$ とあらわされます。したがって, (多価性を気にしないことにして) 一般解は $C \exp(-\mathbf{a} - \alpha \log z)$ (C は定数) のようにあらわされます。また, モノドロミーは $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\alpha)$ となります。

$m \neq 1$ とすると, 一般には難しくなります。しかし, $\Gamma \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ を対角型とし, $N \in M_m(\mathbb{C})$ を $[\Gamma, N] = 0$ を満たすものとし, A が

$$A = \frac{d\Gamma}{dz} + \frac{N}{z} \quad (23)$$

という形をしている場合には, $m = 1$ の場合と同様で, 比較的容易です。実際, 一般解は

$$\exp(-\Gamma - N \log z) \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m)$$

で与えられますし, モノドロミーは $\exp(-2\pi\sqrt{-1}N)$ となります。そこで, A が (23) のような形をしている場合を標準形とみなすことにして, 一般的な場合を標準形に変換できるか, が問題になります。素朴な希望としては, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{M}_{X,D})$ を用いて標準形に変換したいということになります。できない場合もあるのですが, 順々にみていきましょう。

形式的な問題 まず, $G^{-1}AG + G^{-1}(dG/dz)$ が (23) のような形になるように, $G \in GL_m(\mathbb{C}((z)))$ をとれない場合があります。一般の体上で線形代数を考えるとき, 行列の対角化やジョルダン標準形に変換するためには固有値を含む体にまで拡大する必要がありましたが, これに類似した現象です。 Γ の対角成分は “固有値のようなもの” であり, これらが $\mathbb{C}((z))$ には一般には入ってこないため, 体の拡大をする必要があります。

体 $\mathbb{C}((z))$ は多項式 $t^m - z$ の根を持ちません。この根を (適当に一つ選んで) $z^{1/m}$ であらわすことにします。 $\mathbb{C}((z))$ に $z^{1/m}$ を付け加えて得られる体を $\mathbb{C}((z^{1/m}))$ であらわします。事実として次のようなことが知られています。

定理 $e := r!$ とします. $\widehat{G} \in GL_m(\mathbb{C}((z^{1/e})))$ をうまくとると標準形に変換できる.

これは, Hukuhara-Turrittin の定理, あるいは Hukuhara-Levelt-Turrittin の定理などとよばれます. この定理の証明はかなり手間がかかるので, かわりに例をみておきます. (証明の簡単な部分の説明にはなりません.)

次のような方程式を考えます.

$$\frac{d\mathbf{g}}{dz} - z^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{g} = 0 \quad (24)$$

ζ を z の 2 乗根とします. (すなわち $\zeta^2 = z$.) G_1 を次のような行列とします.

$$G_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \zeta^{-1} & -\zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{g} = G_1 \mathbf{g}_1$ としてみると, (24) は

$$\zeta^4 \frac{d\mathbf{g}_1}{d\zeta} + \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \zeta^3 B \right) \mathbf{g}_1 = 0, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

に変換されます. G_2 を次のような形の行列とします.

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \zeta^m, \quad X_m := \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ b_m & 0 \end{pmatrix}$$

そして, $\mathbf{h} = G_2 \mathbf{g}_1$ によって

$$\zeta^4 \frac{d\mathbf{h}}{d\zeta} + \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot \zeta^m \right) \mathbf{h} = 0, \quad U_m = \begin{pmatrix} x_m & 0 \\ 0 & y_m \end{pmatrix}$$

という形に変換してみます. そのための必要十分条件は,

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + B \cdot \zeta^3 \right) \cdot G_2 + \zeta^4 \partial_{\zeta} G_2 = G_2 \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot \zeta^m \right)$$

です. したがって,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X_m \cdot \zeta^m + B \zeta^3 + \sum_{m=1}^{\infty} B \cdot X_m \zeta^{m+3} + \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot X_m \cdot \zeta^{m+3} \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cdot \zeta^m + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \sum_m \sum_{i+j=m, i, j \geq 1} X_i \cdot U_j \cdot \zeta^m \quad (26) \end{aligned}$$

ζ^1 と ζ^2 の係数をみると, $X_1 = X_2 = U_1 = U_2 = 0$ が得られます. ζ^3 の係数をみると, 次の式が得られます.

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X_3 \right] - U_3 + B = 0$$

これを満たす X_3 と U_3 が一意的に存在します. 特に,

$$U_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ζ^m ($m \geq 4$) の係数をみると,

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X_m \right] - U_m + B \cdot X_{m-3} + (m-3)X_{m-3} + \sum_{i+j=m, i,j \geq 1} X_i \cdot U_j = 0 \quad (27)$$

X_j, U_j ($j < m$) が定まっているとき, (27) を満たす X_m, U_m が一意に定まります. したがって, 帰納的な議論で求める X が得られることになります.

問題 上の計算を確かめてみてください.

上の議論では定理の証明のうち簡単な部分しかあらわれていません. (多少複雑にみえるかもしれませんが.) いったん, (25) のような形になってしまうと, その後に述べた形式的な議論でより小さな部分に分解できます. 一般には (24) を (25) の形に変換する部分が難しくなります.

\widehat{G} や標準形 $d\Gamma/dz + N/z$ の計算は, 原理的には可能ですが, 簡単な方法はないようです. 前節の対数的な場合には非常に簡単だったのとは対照的です.

方程式系 (16) に対して, Γ は一意に定まらず, “ Γ の対角成分の極” の部分のなす集合が重複度こみで一意に定まります. (この集合を Irr であらわすことにします.) 極だけが決まることを (16) で $m = 1$ の場合に確認してみましょう.

問題 $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{C}((z)), \alpha, \alpha' \in \mathbb{C}((z))$ とします. この時,

$$d\mathbf{a}'/dz + \alpha'/z = g^{-1}(d\mathbf{a}/dz + \alpha/z)g + g^{-1}dg/dz$$

(右辺は $d\mathbf{a}/dz + \alpha/z + g^{-1}dg/dz$ に等しい) を満たす $g \in \mathbb{C}((z))$ が存在するための必要十分条件は, $\alpha - \alpha' \in \mathbb{Z}, \mathbf{a} - \mathbf{a}' \in \mathbb{C}[[z]]$ であることを示してみてください.

局所的な問題 前節の定理で得られる $\widehat{G} \in GL_m(\mathbb{C}((z^{1/\epsilon})))$ は一般には収束しません.

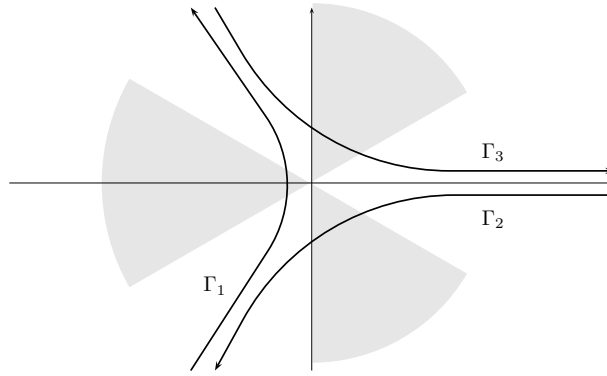
問題 モノドロミーを考えることで, 上の例で得られた G は収束しないことを示してみてください.

したがって, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{M}_{X,0})$ によって標準形に変換したい, という素朴な希望は満たされません. そこで, かわりに漸近展開可能関数を用いることになります. $S = S[\theta_0, \theta_1, r_0]$ を扇形領域とし, $G_S \in GL_m(\mathcal{H}_{\overline{S}})$ をうまくとって標準形にできないだろうか, というのを考えます. 簡単のために, \widehat{G} を $GL_m(\mathbb{C}((z)))$ からとれるとします. 次の定理が知られています.

定理 扇形領域の角度 $|\theta_0 - \theta_1|$ が十分に小さければ, $G_S \in GL_m(\mathcal{H}_{\overline{S}})$ を (i) G_S の漸近展開は \widehat{G} , (ii) $G_S^{-1}AG_S + G_S^{-1}(dG_S/dz) = d\Gamma/dz + N/z$, が満たされるようにとれる.

これは, Hukuhara-Malmquist の定理などのようによべれます. 証明はかなり準備が必要になるので, ここでは省略します. 例えば, [1] や [11] をごらんください. 具体的な例にたいして, G_S を実際に構成するのは一般には非常に難しいことです. (例えば, [1], [3], [11] を参照.) 対数的な場合には, 形式解を単純な計算で求めれば良かったのとは対照的です.

例を紹介しておきます. (詳しくは [11] をご覧ください.) \mathbb{C}_t における積分路を次のようにとります. Γ_1 を $\arg(t) = 4\pi/3$ の方向からきて $\arg(t) = 2\pi/3$ の方向に進む積分路とします. Γ_2 を $\arg(t) = 0$ の方向からきて $\arg(t) = -2\pi/3$ の方向に進む積分路とします. Γ_3 を $\arg(t) = 2\pi/3$ の方向から来て $\arg(t) = 0$ の方向に進む積分路とします.



そして,

$$f_j(\zeta) := \int_{\Gamma_j} e^{t/\zeta^2 - t^3/3} dt$$

とおきます. S を \mathbb{C}_ζ の $\{\arg(\zeta) = 0\}$ を含む角度の小さな扇形領域として,

$$H_S := \begin{pmatrix} \zeta^{-1/2} \exp((2/3)\zeta^{-3}) f_1(\zeta) & \zeta^{-1/2} \exp(-(2/3)\zeta^{-3}) f_2(\zeta) \\ \zeta^{-1/2} \exp((2/3)\zeta^{-3}) (\zeta^3/2) f_1'(\zeta) & \zeta^{-1/2} \exp(-(2/3)\zeta^{-3}) (\zeta^3/2) f_2'(\zeta) \end{pmatrix}$$

とおくと, $H_S \in M_2(\mathcal{H}_{\overline{S}})$ であり, S 上では H_S によって (24) は

$$\zeta \frac{dh}{d\zeta} + \begin{pmatrix} -2\zeta^{-3} - 1/2 & 0 \\ 0 & 2\zeta^{-3} - 1/2 \end{pmatrix} = 0$$

に変換されます. (この例の場合には, 方程式を解いてから上のような変換を作っていてかえって回り道をしています.)

ストークス構造 前節で存在が保証されている G_S は, 構成が難しいというだけでなく, 存在の一意性もありません. しかし, G_S の存在によって, 小さな扇形領域上の解の挙動についてはそれなりによくわかります. これを用いて, 微分方程式系 (16) に対して標準的に定まるものをとりだしてみましょう.

$e^{\sqrt{-1}\theta} \in S^1$ を θ であらわしてしまうことにします. 十分小さな $\epsilon > 0$, $r_0 > 0$ に対して, 扇形領域 $S[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon, r_0]$ 上の微分方程式系 (16) の解のなす m 次元ベクトル空間を \mathcal{L}_θ であらわします. これは ϵ と r_0 のとりかたに依存せずに定まります.

問題 $\theta - \pi/2 < \theta' < \theta + \pi/2$ の時, \mathcal{L}_θ と $\mathcal{L}_{\theta'}$ の間に自然な同型があることを示してみてください. このようなとき, 族 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_\theta \mid \theta \in S^1\}$ は S^1 上の局所系をなすといいます.

また, Irr 上の半順序 \leq_θ が

$$\mathbf{a} \leq_\theta \mathbf{b} \iff S[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon, r_0] \text{ 上で } \text{Re}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 0$$

によって定まります. これも十分小さな ϵ, r_0 に依存しません.

問題 θ' が θ に十分に近ければ, $\mathbf{a} \leq_\theta \mathbf{b}$ ならば $\mathbf{a} \leq_{\theta'} \mathbf{b}$ が成り立つことを示してみてください. 逆は一般には成り立たないことを示してみてください.

十分小さな $r_0, \epsilon > 0$ に対して, $S = S[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon, r_0]$ 上で定理のように G_S をとれます. この G_S の存在から, 解の挙動が制御できるようになります. $\mathfrak{a} \in \text{Irr}$ にたいして,

$$\mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{a}} = \left\{ f \in \mathcal{L}_\theta \mid |\exp(\mathfrak{a})f| = O(|z|^{-N}) \exists N \right\}$$

とおきます.

$$\mathfrak{a} \leq_\theta \mathfrak{b} \implies \mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{a}} \subset \mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{b}}$$

を満たします. さらに (一意的ではありませんが) 分解 $\bigoplus_{\mathfrak{a} \in \text{Irr}} U_{\mathfrak{a}} = \mathcal{L}_\theta$ で,

$$\mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{a}} = \bigoplus_{\mathfrak{b} \leq_\theta \mathfrak{a}} U_{\mathfrak{b}}$$

を満たすものが存在します. このような $\mathcal{L}_{\theta, \bullet} = \{\mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a} \in \text{Irr}\}$ を $(\text{Irr}, \leq_\theta)$ によって添字づけられた \mathcal{L}_θ のフィルトレーションといいます. そして, θ' が θ に十分近ければ, フィルトレーション $\mathcal{L}_{\theta, \bullet}$ と $\mathcal{L}_{\theta', \bullet}$ の間には次のような関係があります. すなわち, 自然な $\mathcal{L}_\theta \simeq \mathcal{L}_{\theta'}$ のもとで,

$$\mathcal{L}_{\theta', \mathfrak{a}} = \mathcal{L}_{\theta, \mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{b} <_{\theta'} \mathfrak{a}} \mathcal{L}_{\theta', \mathfrak{b}}$$

が成り立ちます. このようなフィルトレーションの族 $\{\mathcal{L}_{\theta, \bullet} \mid \theta \in S^1\}$ を局所系 \mathcal{L} のストークス構造といいます.

先に挙げた例に対応するストークス構造付きの局所系は次のようになります. $\text{Irr} = \{\pm(2/3)\zeta^{-3}\}$ となります. $\mathcal{L} = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$ とし, $v_3 := -v_1 - v_2$ とします.

$$\begin{aligned} I_0 &:= \left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right[, & I_1 &:= \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[, & I_2 &:= \left] \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right[\\ I_3 &:= \left] \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right[, & I_4 &:= \left] \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right[, & I_6 &:= \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right[\end{aligned}$$

とおきます. $\theta \in S^1$ における順序は次のようになります.

$$\frac{2}{3}\zeta^{-3} <_\theta -\frac{2}{3}\zeta^{-3} \quad (\theta \in I_0 \cup I_2 \cup I_4), \quad -\frac{2}{3}\zeta^{-3} <_\theta \frac{2}{3}\zeta^{-3} \quad (\theta \in I_1 \cup I_3 \cup I_5)$$

$\theta = (2k+1)\pi/6$ では, $\pm(2/3)\zeta^{-3}$ の間に順序関係ははいりません. そして, 次のようなフィルトレーションの族を考えます.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_1 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_0) \\ \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_3 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_1) \\ \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_2 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_2) \\ \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_1 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_3) \\ \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_3 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_4) \\ \mathcal{L}_{\theta, -(2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_2 \rangle \subset \mathcal{L}_{\theta, (2/3)\zeta^{-3}} = \mathcal{L} \quad (\theta \in I_5) \\ \mathcal{L}_{\pi/6, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_1 \rangle, \quad \mathcal{L}_{\pi/6, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_3 \rangle \\ \mathcal{L}_{\pi/2, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_{\pi/2, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_3 \rangle \\ \mathcal{L}_{5\pi/6, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_{5\pi/6, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{7\pi/6, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_3 \rangle, \quad \mathcal{L}_{7\pi/6, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_1 \rangle \\ \mathcal{L}_{2\pi/2, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_3 \rangle, \quad \mathcal{L}_{3\pi/2, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_2 \rangle \\ \mathcal{L}_{11\pi/6, (2/3)\zeta^{-3}} &= \langle v_1 \rangle, \quad \mathcal{L}_{11\pi/6, -(2/3)\zeta^{-3}} = \langle v_2 \rangle\end{aligned}$$

このストークス構造付の局所系が, 上の例を記述します. 実際,

$$v_1 = \begin{pmatrix} f_1(\zeta) \\ (\zeta^3/2) f_1'(\zeta) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} f_2(\zeta) \\ (\zeta^3/2) f_2'(\zeta) \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} f_3(\zeta) \\ (\zeta^3/2) f_3'(\zeta) \end{pmatrix}$$

とすると, 同型が与えられます. この例に関していうならば, あえてフィルトレーションで記述する必要はあまりないかもしれませんが, 一般論を展開する上で canonical に決まるものを考えるのは有意義です. また, 高次元への拡張にもフィルトレーションとしての見方は便利です. そして, 一般的に次のことが成り立ちます.

定理 ストークス構造をもつ局所系の同型類と微分方程式系の同型類が自然に対応する.

これを, 一般化されたりーマン・ヒルベルト対応といいます. もともと Sibuya が不確定特異点の分類をしましたが, それに触発されて, Deligne や Malgrange がこのような定式化を与えました. (少し定式化は変えてあります.) 微分方程式系の本質的な部分をこのような形で記述できる, というのは意外でもありますし, とても美しいことのように思われます.

この対応から, 例えばストークス構造の安直な変形にともなう微分方程式系の変形が得られます. 簡単のために $T > 0$ として, $\text{Irr}^{(T)} := \{T\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \text{Irr}\}$ とおきます. この時, $\mathcal{L}_{\theta, T\mathbf{a}} := \mathcal{L}_{\theta, \mathbf{a}}$ とおくと, \mathcal{L} のストークス構造が得られます. これに対応して微分方程式系の変形が得られるのですが, これを微分方程式系の側で書き下すのは容易ではありません.

4 2次元の場合

これまで1次元の場合を説明してきました. 2次元への拡張をみてみます.

4.1 関数

$X \subset \mathbb{C}^2$ が領域であるとは, $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ について十分小さな $\epsilon > 0$ をとると,

$$B(z_0, w_0, \epsilon) := B(z_0, \epsilon) \times B(w_0, \epsilon) \subset X$$

が満たされることです. f を複素領域 X 上の複素数値関数とします. 各 $(z_0, w_0) \in X$ について, 十分小さい $\epsilon > 0$ をとると, $B(z_0, w_0, \epsilon) \subset X$ 上で

$$f(z, w) = \sum_{i, j \geq 0} a_{i, j} z^i w^j \tag{28}$$

のように絶対収束級数であらわされるとき, f は正則であるといいます. X 上の正則関数全体を \mathcal{H}_X であらわすことにします. これは1変数の場合と同様に \mathbb{C} 上の可換環になります. ベクトル値の正則関数なども同様に考えられます.

$B(0, 0, R)$ 上の $\{g = 0\}$ に極をもつ有理型関数とは (雑な言い方になりますが), $B(0, 0, R) \setminus \{g = 0\}$ 上の正則関数 f で, 適当な整数 $N > 0$ をとると $g^N f$ が自然に $B(0, 0, R)$ 上の正則関数を与えるものです. (より大域的なところで考える時には, 局所的に上のようにあらわされるものを有理型関数といいます.) $g = zw$ のとき, ローランベキ級数展開をもちます.

$$f = \sum_{i, j \geq -N} a_{i, j} z^i w^j \tag{29}$$

超曲面 $D \subset X$ が与えられた時, D に極をもつ有理型関数全体を $\mathcal{M}_{X,D}$ であらわします.

必ずしも収束するとは限らない (28) の形のものを形式ベキ級数といいます. また, (29) の形のものを形式ローランベキ級数といいます. 形式ベキ級数全体を $\mathbb{C}[[z, w]]$ であらわし, 形式ローランベキ級数全体を $\mathbb{C}[[z, w]]_{zw}$ であらわすことにします.

漸近展開可能関数も定義されていますが, そのままでは取り扱いが難しいので, かわりに実ブローアップ上の正則関数を用います. $B(0, 0, R)$ の $z = 0, w = 0$ に沿った実ブローアップ $\tilde{B}(0, 0, R)$ とは, 二つの $B(0, R)$ の実ブローアップの直積として得られます. すなわち,

$$\tilde{B}(0, 0, R) = (S^1 \times [0, R])^2$$

として $\varpi : \tilde{B}(0, 0, R) \rightarrow B(0, 0, R)$ を $z = r_1 \exp(\sqrt{-1}\theta_1), w = r_2 \exp(\sqrt{-1}\theta_2)$ によって与えられます. (大域的には, 上のようなもののはりあわせとして与えられます.) 実ブローアップの開集合 \mathcal{U} 上の C^∞ -級関数とは, 変数 $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ に関して C^∞ である関数のことです. そして, \mathcal{U} 上の C^∞ -級関数 f が正則であるとは, $\mathcal{U} \setminus \varpi^{-1}(D)$ が正則であることとして定義されます.

4.2 線形微分方程式系

考えたい方程式系は次のようなものです. $A_z, A_w \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ とし, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ を未知関数として,

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} + A_z \mathbf{g} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial w} + A_w \mathbf{g} = 0 \quad (30)$$

A_z, A_w には可積分条件を課しておきます.

$$\frac{\partial A_z}{\partial w} - \frac{\partial A_w}{\partial z} + [A_z, A_w] = 0 \quad (31)$$

外微分 $d\mathbf{g} = (\partial \mathbf{g} / \partial z) dz + (\partial \mathbf{g} / \partial w) dw$ と, 行列値の微分形式 $\mathbf{A} = A_z dz + A_w dw$ を用いると, (30) は次のようにあらわされます.

$$d\mathbf{g} + \mathbf{A} \mathbf{g} = 0 \quad (32)$$

可積分条件 (31) は次のようにあらわされます.

$$d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0. \quad (33)$$

(33) は接続 $d + \mathbf{A}$ が可積分条件 (あるいは, 平坦条件) $(d + \mathbf{A}) \circ (d + \mathbf{A}) = 0$ を満たすことを意味します.

一次元の場合とは異なり, 高次元になると方程式系 (32) (33) はかなり特殊です. しかし, 重要であることには変わりありません. (32) (33) をもう少し一般化したものである有理型平坦接続やホロノミック D -加群は, 様々な数学的な対象をあらわすための基本的な言語になっています. (ここでは, D -加群の説明はしません. 教科書 [2], [5] をご覧ください. あるいは, [7] にも少し説明があります.) 例えば, 表現論では代数群の表現を旗多様体上の D -加群としてあらわすことで, 幾何学的な直観や手法を用いた研究がなされるようになってきました. あるいは, $X \rightarrow Y$ という代数多様体の射が与えられると Y 上に自然にホロノミック D -加群が誘導されますが, これは例えばファイバーの周期の性質を知る上でも重要です.

そしてホロノミック D -加群の局所的な構造の研究には方程式系 (32) (33) やその高次元化の理解が欠かせません. 近年, ホロノミック D -加群の研究で比較的大きな進展がありました, 今回紹介する「変わり目点の解消」はその研究における重要なステップの一つです.

上で述べたように, これまでにもホロノミック D -加群は既に重要な役割を果たしていますが, 主に確定特異性を持つもの (正則ホロノミック D -加群) が使われてきました. 正則ホロノミック D -加群と偏屈層の間のリーマン・ヒルベルト対応は最も基本的な重要性を持つ定理の一つです. また, 正則ホロノミック D -加群に関するホッジ加群の理論は, 分解定理を与えるなど極めて強力なものです. このように正則

ホロノミック D -加群に関する研究が進んでいた理由の一つとして、後で述べるように、(32) (33) が対数的な場合には (局所的には) とても扱いやすかったことも挙げられると思います。対数的でない場合にも (32) (33) の局所的な構造が比較的扱いやすくなったことで、不確定特異性を持つホロノミック D -加群の研究がさらに進展していくことでしょう。

不確定特異性をもつホロノミック D -加群の応用面での重要性は、今のところそれほどはっきりしないようにも思われます。しかし、正則ホロノミック D -加群にごく自然な操作をするだけで不確定特異性があります。例えば次のようなフーリエ変換とよばれる基本的な操作があります。非可換環 $W_z = \mathbb{C}[z]\langle \partial_z \rangle$ と $W_x = \mathbb{C}[x]\langle \partial_x \rangle$ の間には、 $z \longleftrightarrow \partial_x, \partial_z \longleftrightarrow -x$, によって与えられる同型があります。したがって、 W_z -加群 M があたえられると自然に W_x -加群 \widehat{M} が得られます。これを M のフーリエ変換といいます。 M に対応する D -加群が確定特異点しかもたないとしても、そのフーリエ変換は一般には不確定特異点を持ちます。さらに、フーリエ変換を調べるには、不確定特異点を持つ 2次元の場合のホロノミック D -加群を経由するのが都合が良いです。このように、高次元の不確定特異性もごく自然にあらわれてくるのです。

4.3 非特異な場合と対数的な場合

非特異な (32) (33) に関しては、1次元の場合と全く同様のことが成り立ちます。まず局所的な問題ですが、 $(z_0, w_0) \in X$ を固定すると、 $B := B(z_0, w_0, \epsilon) \subset X$ とすると、適当な $G \in GL_m(\mathcal{H}_B)$ によって自明化できます。すなわち、 G を $dG + \mathbf{A}G = 0$ を満たすようにとることができ、(30) を $\mathbf{g} = G\mathbf{h}$ によって、自明な方程式系 $d\mathbf{h} = 0$ に変換できます。大域的な問題も 1次元の時と同様で、 X の基本群のモノドロミー表現によって理解できます。(より正確に言うと、平坦接続を持つベクトル束にまで話を広げておく方が適切です。)

問題 $G \in GL_m(\mathcal{H}_X)$, $\mathbf{g} = G\mathbf{h}$ とすると、(32) は

$$d\mathbf{h} + (G^{-1}\mathbf{A}G + G^{-1}dG)\mathbf{h} = 0$$

に変換されることを示してみてください。また、可積分条件が保たれること、すなわち、 $G^*(\mathbf{A}) := G^{-1}\mathbf{A}G + G^{-1}dG$ とおくと、 $d(G^*\mathbf{A}) + G^*(\mathbf{A}) \wedge G^*(\mathbf{A}) = 0$ が成り立つことを示してみてください。

問題 $(G_1G_2)^*(\mathbf{A}) = G_2^*(G_1^*(\mathbf{A}))$ を示してみてください。

問題 1変数の時の議論を用いて、適当な $G_1 \in GL_m(\mathcal{H}_X)$ をとると、 $G_1^*(\mathbf{A})$ の z -成分を 0 にできることを示してみてください。(すなわち、 $G_1^*(\mathbf{A}) = B_z dz + B_w dw$ とすると、 $B_z = 0$.) この時、可積分条件によって、 B_w が z に依存しないことを確認してみてください。さらに、再び 1変数の時の議論を用いて、 $G_2^*(G_1^*\mathbf{A}) = 0$ を満たす G_2 をとれることを示してみてください。

特異性を持つ場合はどうでしょうか。 X 内の曲線 D に極を持つような場合を考えるのですが、この曲線が正規交叉、つまり局所的には $\{zw = 0\}$ のように与えられる時を考えます。これは、川ノ上さんの講座で説明されると思いますが、適当にブローアップすることで、常にこのような場合に帰着できるからです。(ブローアップについては、また後で触れます。なお、既に用いた実ブローアップとは別物と思ってください。) 以下では局所的な場合について述べることにして、 $X = B(0, 0, R)$, $D = \{zw = 0\}$ とします。

まず、 $X \setminus D$ 上の方程式系とみると各ループに沿ったモノドロミーが定まります。 $X \setminus D$ の基本群は $\{z = 0\}$ の周囲をまわるループ γ_z と $\{w = 0\}$ の周囲をまわるループ γ_w によって生成されます。また、これらは $X \setminus D$ の基本群において可換です。 γ_z と γ_w の具体的なとりかたは、例えば、 $0 < \epsilon < R$ として、

$$\gamma_z(s) = (\epsilon \exp(2\pi\sqrt{-1}s), \epsilon), \quad \gamma_w(s) = (\epsilon, \epsilon \exp(2\pi\sqrt{-1}s))$$

γ_z と γ_w に沿ったモノドロミーをそれぞれ C_z, C_w であらわすことにします. C_z と C_w は可換です. Q_z と Q_w を (i) $\exp(2\pi\sqrt{-1}Q_z) = C_z, \exp(2\pi\sqrt{-1}Q_w) = C_w$, (ii) $[Q_z, Q_w] = 0$ を満たすようにとります. すると, 超越的な変換 $G \in GL_m(\mathcal{H}_{X \setminus D})$ を

$$dG + \mathbf{A}G = G \left(Q_z \frac{dz}{z} + Q_w \frac{dw}{w} \right)$$

が満たされるようにとれます. これより, $\mathbf{g} = G\mathbf{h}$ によって方程式系を

$$d\mathbf{h} + \left(Q_z \frac{dz}{z} + Q_w \frac{dw}{w} \right) \mathbf{h} = 0$$

に変換できます. この方程式系は非常に簡単で, 例えば一般解は,

$$\exp\left(-Q_z \log z - Q_w \log w\right) \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m)$$

のようにあらわされます. しかし, 1次元の時と同様に, $G \in GL_m(\mathcal{H}_{X \setminus D})$ による変換は望ましいものではありません.

方程式系 (30) が対数的であるとは, 微分形式 \mathbf{A} が対数的であること, すなわち,

$$B_z := z A_z, \quad B_w := w A_w$$

が正則であることです. この時には, 1次元の対数的な場合と同様のことが成り立ちます.

問題 次の式が成り立つことを示してみてください.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} B_z(0, w) + [B_z(0, w), A_w(0, w)] &= 0 \\ [B_z(0, 0), B_w(0, 0)] &= 0 \end{aligned}$$

問題 $B_z(0, w)$ の固有値は w に依存しないことを示してみてください.

次の条件が満たされているとします.

(P) α, β を $B_z(0, w)$ の相異なる固有値とすると, $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$. 同様に, γ, δ を $B_w(z, 0)$ の相異なる固有値とすると, $\gamma - \delta \notin \mathbb{Z}$.

この時, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{H}_X)$ をとると, (32) を

$$d\mathbf{h} + \left(B_z(0, 0) \frac{dz}{z} + B_w(0, 0) \frac{dw}{w} \right) \mathbf{h} = 0$$

に変換できることが知られています. (証明は1次元の時よりも難しくなります.) また, 上の条件 **(P)** が満たされていない時, 適当な $G \in GL_m(\mathcal{M}_{X, D})$ をとると, 条件 **(P)** を満たすものに変換できることが示されます.

4.4 対数的でない場合

対数的でない場合はどうでしょうか. 小手調べに $m = 1$ の場合をみてみましょう. この場合はとても簡単です. 自動的に $[A_z, A_w] = 0$ が満たされていることに注意します. 可積分条件は正則 1-形式 \mathbf{A} が閉形式 (すなわち $d\mathbf{A} = 0$) という条件になります. ですから, 積分することで, 適当な $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_{X,D}$ と複素数 α, β を用いて

$$\mathbf{A} = d\mathbf{a} + \alpha \frac{dz}{z} + \beta \frac{dw}{w}$$

とあらわされることがわかります. すなわち, (32) は

$$dg + d\mathbf{a} + \alpha \frac{dz}{z} + \beta \frac{dw}{w} = 0. \quad (34)$$

という方程式を考えていることになります. これは, 十分に簡単で, 例えば

$$g = C \exp(-\mathbf{a}) z^{-\alpha} w^{-\beta} \quad (C \text{ は定数}) \quad (35)$$

が一般解になります.

$m \geq 2$ でも, \mathbf{A} が次のような形をしている場合には, 方程式 (32) はとても扱いやすくなります.

$$\mathbf{A} = d\Gamma + N_z \frac{dz}{z} + N_w \frac{dw}{w} \quad (36)$$

ただし, $\Gamma \in M_m(\mathcal{M}_{X,D})$ は対角型で, $N_z, N_w \in M_m(\mathbb{C})$ は

$$[\Gamma, N_z] = [\Gamma, N_w] = [N_z, N_w] = 0$$

を満たすものとします. 実際, 行列の指数関数を用いると,

$$\exp(-\Gamma + N_z \log z + N_w \log w) \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m)$$

が一般解を与えることがわかります. そこで, 一般の場合にもなんらかの操作を施すことによって, \mathbf{A} が (36) のような形をしている場合に変換したい, ということになります.

1次元の時と同様に, 形式的な問題と局所的な問題 (解析的な問題) に分けられます. 形式的な問題に関して, もしも 1次元の場合の一般化として, 次のことが成り立つと話が簡単です.

素朴な希望 $e \in \mathbb{Z}$ と $G \in GL_m(\mathbb{C}[[z^{1/e}, w^{1/e}]])$ をうまくとると, (36) のような場合に変換できる.

実際, これが成り立つ場合には, (詳細を全て省きますが) 1次元の漸近解析を 2次元の場合にもできることがわかります. つまり, 小さな扇形領域上では実ブローアップ上の正則関数によって (36) のような場合に変換できることになります. また, ストークス構造による描像も自然に拡張することができます.

問題は「素朴な希望」がそのままの形で常に満たされているわけではないことです. 例えば, $\{z = 0\}$ のみに特異性を持つようなものとして, 次のような例をみてみます.

$$dg + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ w/z & 0 \end{pmatrix} d\left(\frac{w}{z}\right) \mathbf{g} = 0$$

問題 $\{(0, w) \mid w \neq 0\}$ では, 素朴な希望が満たされていることを示してみてください. また, $(0, 0)$ では満たされないことを示してみてください.

このように, 素朴な希望が満たされない点のことを変わり目点といいます. 変わり目点が D において離散的に存在するかもしれません. これが一般論を展開する上で障害になっていました. 変わり目点における方程式系の一般的な描像はどのようなものだろうか, ということを考えて Sabbah は次のことを予想しました.

Sabbah の予想 何回かブローアップすると, 変わり目点が無くなるのではないかと? 言いかえると, 変わり目点を持つような微分方程式系は, 変わり目点を持たない微分方程式系を少しづつすることで得られるのではないかと?

ブローアップに関しては川ノ上さんの講座で登場しているはずですが, 記号を用意するために簡単な説明をしておきます.

$\rho_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $\rho_1(u, v) = (uv, v)$ によって与えます. また, $\rho_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $\rho_2(s, t) = (s, st)$ によって与えます. $\mathbb{C}_{u,v}^2 \setminus \{u = 0\}$ と $\mathbb{C}_{s,t}^2 \setminus \{t = 0\}$ の間には $t = u^{-1}$, $s = uv$ によって与えられる同型があります. これによって, $\mathbb{C}_{u,v}^2$ と $\mathbb{C}_{s,t}^2$ をはりあわせて得られる多様体 $B\ell(\mathbb{C}^2, (0, 0))$ と自然な射 $\pi : B\ell(\mathbb{C}^2, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{C}^2$ の組が, \mathbb{C}^2 の $(0, 0)$ におけるブローアップです. (複素多様体の詳細については, 例えば [4] をご覧ください.)

簡単のために, 微分方程式系 (32) が $X = \mathbb{C}^2$, $D = \{zw = 0\}$ の場合に与えられているとします. 微分形式 A より $B\ell(\mathbb{C}^2, (0, 0))$ 上の π^*A が得られます. これは, $\mathbb{C}_{u,v}^2$ 上では

$$\pi^*(A) = \left(\rho_1^* A_z \frac{\partial z}{\partial u} + \rho_1^* A_w \frac{\partial w}{\partial u} \right) du + \left(\rho_1^* A_z \frac{\partial z}{\partial v} + \rho_1^* A_w \frac{\partial w}{\partial v} \right) dv$$

とあらわされ, $\mathbb{C}_{s,t}^2$ 上では

$$\pi^*(A) = \left(\rho_2^* A_z \frac{\partial z}{\partial s} + \rho_2^* A_w \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds + \left(\rho_2^* A_z \frac{\partial z}{\partial t} + \rho_2^* A_w \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt$$

とあらわされるものです. そして, $B\ell(\mathbb{C}^2, (0, 0))$ 上で微分方程式系

$$dg + \pi^*(A)g = 0 \tag{37}$$

を考えます. 可積分条件 $d\pi^*(A) + \pi^*(A) \wedge \pi^*(A) = 0$ も自動的に満たされます. こうして, \mathbb{C}^2 上の微分方程式系 (32) から, $B\ell(\mathbb{C}^2, (0, 0))$ 上の微分方程式系 (37) が得られます. 逆に (32) を (37) から “積分” によって復元できます. したがって, 仮に (37) がよくわかると (32) についてもそれなりによくわかります.

仮に $(0, 0)$ が変わり目点だったとします. この時, 方程式系 (32) を $(0, 0)$ におけるブローアップに引き戻します. 引き戻して得られる方程式系がわり目点を持っていたら, またその点でブローアップをします. この操作を有限回繰り返すことで, 変わり目点のない微分方程式系が得られてほしい, ということを予想は述べています. 例えば, 上に挙げた例の場合は一回ブローアップすることでわり目点を解消できます. そして, 一般にこれができる, というのが Kedlaya や筆者による結果です.

定理 Sabbah の予想は正しい.

(正確には筆者の結果は, 微分方程式系が代数的な場合に関するものです. これは応用上特に重要な場合です.)

わり目点の存在に類似した問題を含む現象をみてみましょう. 連続関数 $A : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ が, $A(a)$ ($a \neq 0$) は二つの相異なる固有値を持つ時, 適当な連続関数 $G : \mathbb{C} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ をとって, $G^{-1}AG$ を対角化できるかどうかを考えてみましょう.

問題 $A(0)$ も二つの相異なる固有値を持つならば, できることを示してみてください. また, 一般にはできないことを示してみてください.

このように固有値の差が 0 になる (退化する) ところで困難が生じます. 逆に, 固有値の差が 0 にならなければうまく制御できます.

上の定理の証明でも, 似たような問題が生じます. $P \in D$ が変わり目点でなければ, 形式的なレベルで A を標準形 (36) に変換できます. 特に Γ の極の部分の集合 $\text{Irr}(P)$ が定まります. (P への依存を明示するために, $\text{Irr}(P)$ とかいています.) $Q \in D$ が変わり目点かどうか分からないとします. 変わり目点でない P を Q に近づけた時に, $\text{Irr}(P)$ が退化しなければ, Q が変わり目点でない, ということを示せます. ですから, $\text{Irr}(P)$ をなんとか制御したいという話になります. これが難しい理由の一つは “極” の部分しかみえないところにあります. 多価性がある分岐の制御も難しくなります. この困難を乗り越えるために, 代数曲面の場合には, 正標数への還元を用いました. 各素数 p ごとに p -曲率とよばれるものがあり, これの “固有値” の極が各 P における $\text{Irr}(P)$ についての情報をもっています. ですから, p に関して一様に p -曲率を制御することで, $\text{Irr}(P)$ 達の制御ができるようになります. より高次元の場合には, 調和バンドルの理論を経由することでヒッグス束との対応をつけて, ヒッグス束の変わり目点の解消の話に置き換えることで証明できます.

References

- [1] 大久保 謙二郎, 河野 実彦: 漸近展開 (シリーズ新しい応用の数学 12) 教育出版
- [2] 柏原正樹: 代数解析概論, 岩波書店
- [3] 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店
- [4] 小林昭七: 複素幾何, 岩波書店
- [5] 谷崎俊之, 堀田良之: D 加群と代数群, シュプリンガー・フェアラーク東京
- [6] 原岡喜重: 超幾何関数 (すうがくの風景), 朝倉書店
- [7] 堀田良之: 加群十話—代数学入門 (すうがくぶつくす) 朝倉書店
- [8] 日本数学会編: 数学辞典 (第 4 版), 岩波書店
- [9] H. Majima: *Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points*, Lecture Notes in Mathematics, **1075**, Springer-Verlag, Berlin, (1984)
- [10] C. Sabbah, *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, Astérisque, **263**, Société Mathématique de France, Paris, (2000).
- [11] Wasow: *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover Phoenix Editions