

# ポアンカレ予想とリッチフロー

横田 巧 (京都大学 数理解析研究所)

## 概 要

この公開講座では, 1904年の H. Poincaré の論文に由来するポアンカレ予想と呼ばれる幾何学の予想と, 2002~03年に発表された G. Perelman によるその証明を扱います. ここでは, ポアンカレ予想の歴史やその解決にまつわるドラマよりも, Perelman の証明の数学的な部分に踏み込み, その雰囲気伝わるとような解説を試みます.

## 1. はじめに

大まかに言うと, 現代の数学者が研究している幾何学には位相幾何学 (トポロジー, Topology) と微分幾何学 (Differential Geometry) がある. 次の予想は H. Poincaré の 1904年の論文 [Po] に由来する位相幾何学の問題であるが, 21世紀初頭に G. Perelman がリッチフローとリーマン多様体の崩壊理論という微分幾何学の道具を用いて肯定的に解決した.

予想 1 (ポアンカレ予想) 任意の単連結 3次元閉多様体は 3次元球面  $S^3$  に同相であろう.

上に出てきた用語の全てに正確な定義を与えることは難しいが, 駆け足でまとめる. 幾何学では様々な「空間」を扱う. 我々が一番身近に感じる空間の一つは,  $n$  を正の整数として,  $n$ 次元ユークリッド空間

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

であろう. 本稿では  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{N}$  はそれぞれ実数全体と自然数全体の集合を表す.  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  は  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  と  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

で定まる標準内積と,  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  で定まるノルムを持つ.

3次元球面  $S^3$  とは4次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  内の原点  $0^4 \in \mathbb{R}^4$  からの距離が1である点全体の集合のことである. 一般に, 非負整数  $n$  に対して  $n$ 次元球面  $S^n$  が定義出来る. 記号で表すと,

$$S^n := \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

となる.  $n$ 次元球面  $S^n$  は以下で定義する  $(n+1)$ 次元球体  $\mathbb{B}^{n+1}$  と  $\overline{\mathbb{B}^{n+1}}$  の境界でもある. つまり,

$$S^n = \partial\mathbb{B}^{n+1} = \partial\overline{\mathbb{B}^{n+1}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

である.

位相幾何学では主に位相空間を扱う．位相空間とは位相が定義された集合のことである．位相空間  $X$  では各点  $x \in X$  の近傍が定義される．2つの位相空間  $X$  と  $Y$  が同相(位相同型ということもある)とは, 位相空間として同じ・同一視することをいい,  $X \approx Y$  で表す．ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  はノルム  $|\cdot|$  から定まる位相を持つ位相空間であるが, 一般の位相空間では「大きさ」は考えず, 連続的に変形できるものは「同じ」と見なす．正の整数  $n$  に対して,  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  は,  $\mathbb{R}^n$  内の原点  $0^n$  を中心とする半径1の開球体

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

と同相であるが, 閉球体

$$\overline{\mathbb{B}}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

とは同相でない．ここで,  $0^n := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^n$  の原点を表す．よく言われるように, ドーナツとコーヒーカップの表面は同相であり, どちらも2次元トーラス  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  と同相である．また, 中身の詰まったドーナツとコーヒーカップは同相であり, どちらも3次元トーラス体  $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$  と同相である．

次に, 多様体 (manifold) を定義する．位相多様体とは局所ユークリッド的ハウスドルフ位相空間のことである．もう少し正確に述べると,

定義 2 (位相多様体)  $n$  を1以上の整数とする．次を満たすハウスドルフ位相空間  $M$  を(境界を持たない)  $n$ 次元位相多様体と呼ぶ:

$M$  の各点  $p \in M$  に対して,  $p$  の近傍で  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の原点  $0^n \in \mathbb{R}^n$  の近傍と同相なものが存在する．

本稿を含む多くの場合, 位相多様体は連結かつパラコンパクトであると仮定する．また多くの場合, パラコンパクト位相空間はハウスドルフであると仮定される． $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  や  $n$ 次元球面  $\mathbb{S}^n$  は位相多様体の例である．

閉多様体とは境界を持たないコンパクトな多様体のことである．位相空間  $X$  がコンパクトであることの定義は,  $X$  の任意の開被覆が有限部分被覆を持つことであるが, 多様体の場合,  $n$ 次元多様体  $M$  がコンパクトであることの必要十分条件は,  $M$  内の有限個の閉近傍  $K_1, \dots, K_k \subset M$  が存在して,

$$M = \bigcup_{i=1}^k K_i \quad \text{かつ, 各 } K_i \text{ は閉球体 } \overline{\mathbb{B}}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ と同相}$$

となることである．

位相空間  $X$  が単連結 (simply connected) であるとは,  $X$  内の任意のループが連続的に1点に縮められることをいう．正確に述べると,  $X$  の任意の点  $x_0 \in X$  を基点とする任意のループ, つまり  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = x_0$  を満たす連続写像  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow X$  に対して, 連続写像  $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow X$  で,

$$\text{任意の } s \in [0, 2\pi] \text{ に対して } H(s, 0) = \gamma(s) \text{ かつ } H(s, 1) = x_0,$$

$$\text{任意の } u \in [0, 1] \text{ に対して } H(0, u) = H(2\pi, u) = x_0$$

を満たすものが存在することをいう。これは,  $X$  内の任意のループ, つまり連続写像  $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  に対して, 連続写像  $\Gamma: \overline{\mathbb{B}}^2 \rightarrow X$  で  $\Gamma|_{\mathbb{S}^1} = \gamma$ , つまり

$$\text{任意の } s \in \mathbb{S}^1 = \partial\overline{\mathbb{B}}^2 \text{ に対して } \Gamma(s) = \gamma(s)$$

を満たすものが存在すると言い換えても良い。

(弧状連結な)位相空間  $X$  が単連結であることは,  $X$  の基本群  $\pi_1(X)$  が単位元のみからなる自明な群であることとも言い換えられる。 $n \geq 2$  のとき  $n$  次元球面  $\mathbb{S}^n$  は単連結であるが,  $n \geq 1$  に対して  $n$  次元トーラス  $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$  は単連結でない。2つの同相な位相空間  $X$  と  $Y$  の基本群  $\pi_1(X)$  と  $\pi_1(Y)$  は同型, つまり群として同じであるが, 逆は必ずしも成り立たない(弧状連結な)位相空間  $X$  と 2以上の整数  $k$  に対して, ホモトピー群  $\pi_k(X)$  も定義され, それらは位相空間  $X$  の不変量となる。

以上で, ポアンカレ予想(予想1)の主張の意味が理解できたことになる。

ポアンカレ予想は 2002~03年に G. Perelman が発表したプレプリント [Pe1, Pe2] で証明された。もう少し言うと, 2本のプレプリント [Pe1, Pe2] ではポアンカレ予想を含む幾何化予想が証明されており, 更に3本目のプレプリント [Pe3] では, 幾何化予想の証明を経由しないポアンカレ予想の証明のショートカット版が与えられている。Perelman の幾何化予想の証明にはリッチフローとリーマン多様体の崩壊理論という微分幾何学の手法が使われている。次にそれらを定義する。

## 2. リッチフロー

微分幾何学では主に可微分多様体を扱う。可微分多様体(微分可能,  $C^\infty$ 級, 滑らかな多様体などとも呼ばれる)とは可微分構造を持つ位相多様体のことである。2つの可微分多様体が微分同相であるとは, 可微分多様体として同じ・同一視することをいう。2つの可微分多様体が微分同相ならば同相だが, 同相でも微分同相とは限らない。そのような多様体の例として, 異種4次元ユークリッド空間がある(下の問題37も参照)。実は次元が3以下の場合, 任意の位相多様体は可微分多様体となり, 2つの同相な可微分多様体は微分同相となる(Moise (1952)等)。

次に, 可微分多様体にリーマン計量という「ものさし」を導入する。 $n$ 次元可微分多様体  $M$  の各点  $p \in M$  における接空間  $T_p M$  は  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  に同型, つまりベクトル空間として同じである。 $M$  上のリーマン計量  $g$  とは, 各点  $p \in M$  における接空間  $T_p M$  上の内積を  $p$  に関して可微分になるように並べたものである。リーマン計量を表す記号として  $g$  の代わりに  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を使うこともある。また,  $|X| := \sqrt{g(X, X)}$  により接ベクトル  $X \in T_p M$  のノルムが定義される。可微分多様体  $M$  と  $M$  上のリーマン計量  $g$  の組  $(M, g)$  をリーマン多様体と呼ぶ。パラコンパクトな可微分多様体上にはリーマン計量が存在する。

例3  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  はリーマン多様体でもある。 $\mathbb{R}^n$  上のリーマン計量  $g_{\mathbb{R}^n}$  を標準内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いて,  $\mathbb{R}^n$  の各点  $x \in \mathbb{R}^n$  において接ベクトル  $X, Y \in T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  に対して  $g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) := \langle X, Y \rangle$  と定義すると,  $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$  はリーマン多様体となる。

$n$ 次元球面  $\mathbb{S}^n$  上のリーマン計量  $g_{\mathbb{S}^n}$  を, 各点  $x \in \mathbb{S}^n$  において接ベクトル  $X, Y \in T_x \mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  に対して  $g_{\mathbb{S}^n}(X, Y) := \langle X, Y \rangle$  と定義すると,  $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$  もリーマン多様体となる。

可微分多様体  $M$  上にリーマン計量  $g$  が与えられると,  $M$  上の距離 (distance) や  $M$  の体積 (volume) が定義できる. まず可微分曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  の長さ  $\text{Length}_g(\gamma)$  を

$$\text{Length}_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}\right)} ds$$

で定義する.  $M$  内の2点  $p, q$  間の距離  $d_g(p, q)$  を  $p$  と  $q$  を結ぶ曲線の長さの下限, つまり

$$d_g(p, q) := \inf \{ \text{Length}_g(\gamma) : \gamma \text{ は } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \text{ を満たす可微分曲線} \} \quad (4)$$

として定義すると,  $(M, d_g)$  は距離空間 (metric space) となる. 連結な可微分多様体  $M$  は弧状連結であり,  $M$  の任意の2点  $p, q \in M$  を結ぶ可微分曲線  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  が少なくとも一つ存在する. 多様体  $M$  がコンパクト (または, より一般に  $g$  が完備) ならば, 上の式 (4) において  $\inf$  が  $\min$  となる, つまり最短測地線が存在する (Hopf-Rinow の定理). また,  $M$  がコンパクトならば, 距離空間  $(M, d_g)$  の直径  $\sup \{ d_g(p, q) : p, q \in M \}$  は有限となる.

さらに, リーマン多様体  $(M, g)$  上では関数  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  の積分  $\int_M \varphi dV$  が定義される. リーマン多様体  $(M, g)$  の体積は  $\text{Vol}(M, g) := \int_M dV = \int_M 1_M dV$  と定義される. ここで,  $1_M: M \rightarrow \mathbb{R}$  は  $M$  上で恒等的に1, つまり任意の  $p \in M$  に対して  $1_M(p) = 1$ , となる関数である.  $M$  が向き付け可能であるとき,  $dV$  は体積要素である.

また,  $n$  次元リーマン多様体  $(M, g)$  に対して様々な曲率 (curvature) が定義される. まず, Levi-Civita 接続  $\nabla$  が定義され, 各点  $p \in M$  における接ベクトル  $X, Y, Z, W \in T_p M$  に対して, 接空間  $(T_p M, g)$  の正規直交基底  $\{e_i\}_{i=1}^n$  を用いて, 曲率テンソル  $\text{Rm}$ , リッチテンソル  $\text{Ric}$ , スカラー曲率  $R$  が, それぞれ,

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) := -g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W),$$

$$\text{Ric}(X, Y) := \text{tr} \text{Rm}(X, \cdot, Y, \cdot) = \sum_{i=1}^n \text{Rm}(X, e_i, Y, e_i),$$

$$R := \text{tr} \text{Ric}(\cdot, \cdot) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i)$$

で定義される. ここで,  $\text{tr}$  はトレースを表す. つまり, 曲率テンソルの平均がリッチテンソルであり, その平均がスカラー曲率である. スカラー曲率は  $M$  上の関数  $R: M \rightarrow \mathbb{R}$  となる. また, 断面曲率 (sectional curvature)

$$\text{sec}(X, Y) := \frac{\text{Rm}(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (5)$$

を一次独立な, つまり式 (5) の右辺の分母が0とならないような2つの接ベクトル  $X, Y \in T_p M$  に対して定義する. 一般に, 曲率テンソルは断面曲率のみを用いて表示することが出来る. また, 次元が3以下の場合, 曲率テンソルはリッチテンソルのみで表示される.

2次元リーマン多様体  $(M, g)$  に対してはガウス曲率  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  が定義される。このとき, 各点  $p \in M$  における接ベクトル  $X, Y, Z, W \in T_p M$  に対して,

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y, Z, W) &= K(p)(g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)), \\ \text{Ric}(X, Y) &= K(p)g(X, Y), \quad R(p) = 2K(p), \quad \text{sec}(X, Y) = K(p) \end{aligned}$$

となる。このためリッチ曲率はガウス曲率の高次元版とも考えられる。

例 6  $n$ 次元ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$  は平坦, つまり断面曲率は各点で0である。実際,

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = 0, \quad \text{Ric}(X, Y) = 0, \quad R = 0$$

となる。 $n$ 次元球面  $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$  の断面曲率は各点で1である。実際,

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y, Z, W) &= g_{\mathbb{S}^n}(X, Z)g_{\mathbb{S}^n}(Y, W) - g_{\mathbb{S}^n}(Y, Z)g_{\mathbb{S}^n}(X, W), \\ \text{Ric}(X, Y) &= (n-1)g_{\mathbb{S}^n}(X, Y), \quad R = n(n-1) \end{aligned}$$

となる。また, 断面曲率が各点で-1であるような計量(双曲計量と呼ばれる)も存在し, そのような計量を持つリーマン多様体を双曲多様体と呼ぶ。

最後に, リーマン多様体  $(M, g)$  上では, 勾配 (gradient), 発散 (divergence), ラプラシアン  $\Delta := \text{div} \circ \text{grad}$  など様々な微分作用素が定義される。特に  $M$  上の滑らかな関数  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  に対して, 勾配ベクトル場  $\nabla \varphi := \text{grad} \varphi$  は  $M$  上の滑らかなベクトル場であり,  $\Delta \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  は  $M$  上の滑らかな関数である。

以下で扱う多様体, リーマン計量, 関数などは全て可微分であるとする。

リッチフロー (Ricci flow, リッチ流とも訳される) とは, ① 偏微分方程式,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)) \tag{7}$$

または ② その解である多様体  $M$  上のリーマン計量の1パラメータ族  $g(t), a < t < b$ , もしくは ③ リッチフロー方程式 (7) を解くことで与えられたリーマン計量  $g$  を変形する手法などのことである。式 (7) の両辺はともに  $M$  上の  $(0, 2)$ -対称テンソル場であり, 右辺の  $\text{Ric}(g(t))$  はリーマン計量  $g(t)$  から定まるリッチテンソルを表す。また, リッチテンソルとは別にリッチ曲率も定義されるが, 本稿ではその2つを敢えて混同する。つまり, リッチフローはリーマン計量のリッチ曲率が正の部分を縮ませ, 負の部分を膨らませていく。

リッチフロー方程式 (7) は熱の拡散を記述する熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in M \times (0, \infty) \tag{8}$$

と幾つかの性質を共有する。例として, ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上ではラプラシアンは  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$  となり, 熱核

$$u(x, t) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

は  $\mathbb{R}^n$  上の熱方程式 (8) の解である .

リッチフローの簡単な例として, Einstein 計量が考えられる . ある実数  $c \in \mathbb{R}$  が存在して, 多様体  $M$  の各点で  $\text{Ric}(g) = cg$  を満たす  $M$  上のリーマン計量  $g$  を Einstein 計量と呼ぶ .

例 9 (Einstein 計量の場合)  $c \in \mathbb{R}$  を実数とし,  $g_0$  を多様体  $M$  の各点で  $\text{Ric}(g_0) = cg_0$  を満たす  $M$  上の Einstein 計量とする . このとき,

$$g(t) := (1 - 2ct)g_0, \quad t \in \{t \in \mathbb{R} : 1 - 2ct > 0\}$$

は  $M$  上のリッチフローである . 特に  $c > 0$  のとき,  $T := 1/(2c)$  とおくと,  $g(t)$  は  $t \in (-\infty, T)$  に対して定義される . また  $c = 0$  のとき, つまりリッチ平坦の場合,  $g(t) = g_0, t \in (-\infty, \infty)$  は停留点となる .

例 10 (シリンダーの場合) 多様体  $N$  上のリッチフロー  $g_N(t)$  が与えられたとき, 積計量  $g(t) := g_N(t) + g_{\mathbb{R}}$  は直積多様体  $M := N \times \mathbb{R}$  上のリッチフローである .

リッチフローは R. Hamilton が 1982 年の論文 [Ha] で導入した . 次の定理は Hamilton が Nash–Moser の陰関数定理を用いて証明し, 後に D. DeTurck (1983) が放物型偏微分方程式の一般論に帰着させる比較的簡単な別証明を与えた .

定理 11 (リッチフローの短時間存在と一意性 [Ha]) 任意の閉多様体  $M$  上の任意のリーマン計量  $g_0$  に対して,  $g(0) = g_0$  を満たす  $M$  上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, \delta]$  が一意に存在する .

多様体  $M$  上にリッチフロー  $g(t)$  が与えられると, リーマン計量  $g(t)$  によって定まる様々な量は時刻  $t$  に依存して変化する . 例えば,  $(M, g(t))$  の体積  $\text{Vol}(M, g(t))$  は次のように変化する :

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, g(t)) = \int_M \frac{1}{2} \text{tr} \frac{\partial g}{\partial t} dV = - \int_M R dV.$$

一般に, 定理 11 で与えられるリッチフロー  $g(t)$  は有限時間しか存在しない . つまり, 有限時間で特異点が生じる . それを克服するために, 次の方程式を満たす体積を正規化したリッチフロー  $\tilde{g}(t)$  を考えることがある :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(t) = -2\text{Ric}(\tilde{g}(t)) + \frac{2}{n} r(t) \tilde{g}(t). \quad (12)$$

ここで,

$$r(t) := \frac{\int_M R dV}{\text{Vol}(M, \tilde{g}(t))}$$

は時刻  $t$  におけるスカラー曲率  $R$  の平均を表す .

リッチフロー方程式 (7) の解と正規化したリッチフロー方程式 (12) の解は時空のリスケールで互いに移り合う . また,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M, \tilde{g}(t)) = \int_M \frac{1}{2} \text{tr} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} dV = \int_M (r(t) - R) dV = 0$$

より, 体積を正規化したリッチフロー  $\tilde{g}(t)$  の体積  $\text{Vol}(M, \tilde{g}(t))$  は  $t$  に依らず一定となる.

2次元以下の閉多様体は分類されている. 1次元閉多様体は円周 (= 1次元球面)  $S^1$  のみである. 2次元閉多様体 (= 閉曲面) はそのオイラー数によって分類される. 閉曲面の幾何化 (= 一意化) は, 次の定理 13 のように, リッチフローを用いても証明される. Gauss–Bonnet の定理により, 任意の2次元リーマン閉多様体  $(M, g)$  に対して,  $\chi(M)$  を  $M$  のオイラー数とすると, 等式  $\int_M R dV = 4\pi\chi(M)$  が成り立ち, 方程式 (12) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(t) = (r - R)\tilde{g}$$

となる. ここで,

$$r := \frac{\int_M R dV}{\text{Vol}(M, \tilde{g}(t))} = \frac{4\pi\chi(M)}{\text{Vol}(M, \tilde{g}(t))}$$

は時刻  $t$  に依存しない定数である.

**定理 13 (Hamilton (1988), Chow (1991))** 任意の閉曲面  $M$  と  $M$  上の任意のリーマン計量  $g_0$  に対して,  $\tilde{g}(0) = g_0$  を満たす  $M$  上の正規化したリッチフロー  $\tilde{g}(t)$  は  $t \in [0, \infty)$  に対して存在し,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $\tilde{g}(t)$  は  $M$  上の定曲率計量に収束する.

W. Thurston [Th] は閉曲面の分類の3次元版として, 3次元閉多様体の幾何化予想 (Geometrization conjecture) を提唱した. 幾何化予想を正確に述べることはしないが, 次の予想は幾何化予想の言い換えの一つである.

**予想 14 (幾何化予想の言い換え)** 任意の向き付け可能で素な3次元閉多様体は, 非圧縮トーラスによって, 双曲多様体とグラフ多様体に分解できるであろう.

幾何化予想は全ての3次元閉多様体に関する予想であり, 3次元閉多様体の分類を与える. 3次元ポアンカレ予想は幾何化予想から従う.

次の定理は Hamilton がリッチフローを導入した論文 [Ha] の主定理である.

**定理 15 (Hamilton [Ha])** 3次元閉多様体  $M$  上の各点で  $\text{Ric}(g_0) > 0$  となる任意のリーマン計量  $g_0$  に対して,  $\tilde{g}(0) = g_0$  を満たす  $M$  上の正規化したリッチフロー  $\tilde{g}(t)$  は  $t \in [0, \infty)$  に対して存在し,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $\tilde{g}(t)$  は  $M$  上の正定断面曲率計量に収束する. 特に,  $M$  が単連結ならば  $M$  は  $S^3$  に微分同相となる.

後に定理 15 は, Hamilton (1986), Böhm–Wilking (2008), Brendle–Schoen (2009), Brendle (2008) らにより,  $\text{Ric}(g_0) > 0$  よりも強い様々な正曲率条件の下で, 4次元以上の一般次元に拡張された.

Hamilton はその後もリッチフローに関する様々な定理を証明した. 特に, 無限時間存在する体積を正規化したリッチフロー方程式の非特異解を持つような3次元閉多様体に対して幾何化予想が成り立つことを証明した. 一般には, 体積を正規化しても, リッチフローは有限時間で特異点を生成する. そこで, Hamilton は手術付きリッチフロー (Ricci flow with surgery) を用いた幾何化予想へのアプローチを提唱し, それを実装したのが Perelman である. 以下で Perelman のプレプリント [Pe1, Pe2] の一部を解説する.

### 3. 単調性公式

ここでは, Perelman の  $\mathcal{F}$ -および  $\mathcal{W}$ -汎関数 (エントロピー) の単調性公式を紹介する.

定義 16 ( $\mathcal{F}$ -汎関数 (エントロピー) [Pe1, 1.1]) 閉多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  と関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $\mathcal{F}(g, f)$  を次で定める:

$$\mathcal{F}(g, f) := \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dV.$$

ここで,  $|\nabla f|$  は関数  $f$  の勾配ベクトル場  $\nabla f$  のノルムを表す.

定理 17 ( $\mathcal{F}$ -汎関数の単調性 [Pe1, 1.1]) 閉多様体  $M$  上でリーマン計量と関数の 1 パラメータ族  $g(t), f(t)$  が, それぞれ,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)), \quad \frac{\partial}{\partial t} f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R \quad (18)$$

を満たすとき,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(g(t), f(t)) = 2 \int_M |\text{Ric} + \nabla \nabla f|^2 e^{-f} dV \geq 0.$$

ここで,  $\nabla \nabla f$  は関数  $f$  のヘッシアンと呼ばれる  $(0, 2)$ -対称テンソルであり,  $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  はリーマン計量  $g(t)$  から定まるノルムを表す.

式(18)の 1 番目は  $g(t)$  がリッチフローであること, 2 番目は関数  $u := e^{-f}$  が共役熱方程式

$$\square^* u := -\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta u + Ru = 0 \quad (19)$$

を満たし,

$$\frac{d}{dt} \int_M u dV = - \int_M \Delta u dV = 0, \quad (20)$$

つまり  $\int_M u(t) dV$  は  $t$  に依らず一定であることを意味する.

定理 17 の証明: 以下を用いて計算により証明する.

- スカラー曲率  $R$  の満たす発展方程式:  $\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$ .
- Bochner の公式:  $M$  上の任意の関数  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla \varphi|^2 = |\nabla \nabla \varphi|^2 + \langle \nabla \Delta \varphi, \nabla \varphi \rangle + \text{Ric}(\nabla \varphi, \nabla \varphi).$$

ここで,  $\Delta \varphi := \text{tr} \nabla \nabla \varphi = \delta d\varphi$  は  $\varphi$  のラプラシアン,  $\delta$  は外微分  $d$  の双対作用素を表す.

- 第 2 Bianchi 恒等式:  $2\delta \text{Ric} = dR$ .



- 部分積分の公式 :  $M$  上の任意の関数  $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  に対して ,

$$-\int_M \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle dV = \int_M \varphi(\Delta \psi) dV = \int_M (\Delta \varphi)\psi dV.$$

まず ,  $\frac{\partial}{\partial t}(u dV) = -(\Delta u) dV$  であることを用いて ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(g(t), f(t)) &= \int_M \left( \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla f|^2 \right) e^{-f} dV + \int_M (R + |\nabla f|^2) (-\Delta u) dV \\ &= \int_M \left( \Delta R + 2 |\text{Ric}|^2 + 2 \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla f \right\rangle + 2 \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \right) e^{-f} dV \\ &\quad - \int_M (\Delta R + \Delta |\nabla f|^2) u dV. \end{aligned}$$

Bochner の公式を用いて ,

$$\begin{aligned} &\int_M 2 \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla f \right\rangle e^{-f} dV \\ &= 2 \int_M \langle \nabla (-\Delta f + |\nabla f|^2 - R), \nabla f \rangle e^{-f} dV \\ &= \int_M (-\Delta |\nabla f|^2 + 2 |\nabla \nabla f|^2 + 2 \text{Ric}(\nabla f, \nabla f)) e^{-f} dV \\ &\quad + 2 \int_M \Delta |\nabla f|^2 e^{-f} dV - 2 \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle e^{-f} dV \\ &= \int_M (\Delta |\nabla f|^2 + 2 |\nabla \nabla f|^2 + 2 \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) - 2 \langle \nabla R, \nabla f \rangle) e^{-f} dV. \end{aligned}$$

部分積分と第 2 Bianchi 恒等式を用いて ,

$$\begin{aligned} \int_M 4 \langle \text{Ric}, \nabla \nabla f \rangle e^{-f} dV &= -4 \int_M \delta \text{Ric}(\nabla f) e^{-f} dV - 4 \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla(e^{-f})) dV \\ &= -2 \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle e^{-f} dV + 4 \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) e^{-f} dV. \end{aligned}$$

以上をまとめると ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(g(t), f(t)) &= 2 \int_M (|\text{Ric}|^2 + 2 \langle \text{Ric}, \nabla \nabla f \rangle + |\nabla \nabla f|^2) e^{-f} dV \\ &= 2 \int_M |\text{Ric} + \nabla \nabla f|^2 e^{-f} dV \end{aligned}$$

となり , 証明が終わる . □

系 21 閉多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  に対して ,

$$\lambda(g) := \inf \left\{ \mathcal{F}(g, f) : \int_M e^{-f} dV = 1 \right\}$$

と定めると ,  $M$  上のリッチフロー  $g(t)$  に対して ,  $\lambda(g(t))$  は  $t$  に関して単調非減少である .

系 21 の証明 :  $t_1 < t_2$  とする .  $\int_M e^{-f} dV = 1$  を満たし  $\mathcal{F}(g(t_2), f) = \lambda(t_2)$  となる関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  を選び ,  $f(t_2) = f$  を初期条件として共役熱方程式 (19) を時間逆向きに解くと , 式 (20) より ,

$$\lambda(t_1) \leq \mathcal{F}(g(t_1), f(t_1)) \leq \mathcal{F}(g(t_2), f(t_2)) = \lambda(t_2).$$

となり ,  $\lambda(g(t))$  は単調非減少である . □

定義 22 ( $\mathcal{W}$ -汎関数 (エントロピー) [Pe1, 3.1])  $n$ 次元閉多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  と関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  , 正の数  $\tau$  に対して ,  $\mathcal{W}(g, f, \tau)$  を次で定める :

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) := \int_M [\tau(|\nabla f|^2 + R) + f - n] (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} dV.$$

定理 23 ( $\mathcal{W}$ -汎関数の単調性 [Pe1, 3.1], cf. [Pe1, 9.1])  $n$ 次元閉多様体  $M$  上のリーマン計量と関数 , 正の数の 1 パラメータ族  $g(t), f(t), \tau(t)$  が , それぞれ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\text{Ric}(g(t)), \quad \frac{\partial}{\partial t} f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -1 \quad (24)$$

を満たすとき ,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) = \int_M 2\tau \left| \text{Ric} + \nabla \nabla f - \frac{1}{2\tau} g \right|^2 (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} dV \geq 0.$$

系 25  $n$ 次元閉多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  と正の数  $\tau$  に対して ,

$$\mu(g, \tau) := \inf \left\{ \mathcal{W}(g, f, \tau) : \int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} dV = 1 \right\}$$

と定めると ,  $M$  上のリッチフロー  $g(t)$  と式 (24) を満たす関数  $\tau(t)$  に対して ,  $\mu(g(t), \tau(t))$  は  $t$  に関して単調非減少である .

式 (24) の 1 番目は  $g(t)$  がリッチフローであること , 2 番目は関数  $u := (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f}$  が共役熱方程式 (19) を満たすこと , 3 番目は  $\tau$  が  $t$  に関して傾き  $-1$  の 1 次関数であることを意味している . 定理 23 と系 25 も , それぞれ , 定理 17 と系 21 の証明と同様の計算により証明できる . プレプリント [Pe1] の §5 によると  $\mathcal{W}$ -エントロピーの定義は統計物理に由来するらしい . このことに関しては [小林] (または [数セ] 内の記事) を参照されたい .

補足 26 ([KL, To] 等)  $n$ 次元閉多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  , 関数  $u : M \rightarrow (0, \infty)$  と正の数  $\tau$  に対して ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(g, u) &:= - \int_M u \log u dV, \\ \tilde{\mathcal{N}}(g, u, \tau) &:= \mathcal{N} - \frac{n}{2} (1 + \log(4\pi\tau)) \int_M u dV \end{aligned}$$

とおくと ,  $g(t), u(t), \tau(t)$  がそれぞれ式 (19) と (24) を満たすとき ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g(t), u(t)) &= - \frac{d}{dt} \mathcal{N}(g(t), u(t)), \\ \mathcal{W}(g(t), u(t), \tau(t)) &= - \frac{d}{dt} (\tau(t) \tilde{\mathcal{N}}(g(t), u(t), \tau(t))) \end{aligned}$$

となる .  $\mathcal{N}(g, u)$  は Shannon エントロピーと呼ばれる .

#### 4. 局所非崩壊定理

ここでは, Perelman が定理 23 を用いて証明した局所非崩壊定理の一つを紹介する.

閉多様体  $M$  上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, T]$  が有限時間  $T < \infty$  で特異点を生成, つまり  $g(T)$  は存在しないとする. このとき, その特異点を解析するために, その点の周りの放物型リスケーリングを考える.

定義 27 (放物型リスケーリング)  $g(t), t \in (a, b)$  を多様体  $M$  上のリッチフローとし,  $(x_0, t_0) \in M \times (a, b)$  を時空の点,  $Q > 0$  を正の数とする. 次を考える:

$$g_Q(t) := Q \cdot g\left(\frac{t}{Q} + t_0\right), \quad t \in (Q(t_0 - a), Q(b - t_0)).$$

このとき,  $g_Q(t)$  も多様体  $M$  上のリッチフローである.

閉多様体  $M$  上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, T]$  が時刻  $T < \infty$  で特異点を生成したとする. このとき,  $\sup\{|\text{Rm}|(x, t) : (x, t) \in M \times [0, T]\} = \infty$  であることが知られている. そこで,  $i = 1, 2, \dots$  に対して時空の点  $(x_i, t_i) \in M \times [0, T]$  を,

$$Q_i := |\text{Rm}|(x_i, t_i) = \max\{|\text{Rm}|(x, t) : (x, t) \in M \times [0, t_i]\}$$

として,  $i \rightarrow \infty$  のとき  $t_i \rightarrow T$  かつ  $Q_i \rightarrow \infty$  となるように選び, 次を考える:

$$g_i(t) := Q_i \cdot g\left(\frac{t}{Q_i} + t_i\right), \quad t \in (-Q_i t_i, 0].$$

ここで, リッチフローの列  $\{g_i(t), t \in (-Q_i t_i, 0]\}_{i \in \mathbb{N}}$  の極限を構成したいが, そのためにはリーマン多様体  $(M, g_i(0))$  の基点  $x_i$  における単射半径の評価が必要である. これが放物型リスケーリングを用いてリッチフローの特異点を解析する際の困難であったが, Perelman はこれを解決した.

リーマン多様体  $(M, g)$  の点  $x \in M$  と正の数  $r$  に対して,  $x$  を中心とする半径  $r$  の開距離球  $B_g(x, r)$  とその体積  $V_g(x, r)$  を, 式 (4) で定義した距離関数  $d_g$  を用いて,

$$B_g(x, r) := \{y \in M : d_g(x, y) < r\},$$

$$V_g(x, r) := \int_M 1_{B_g(x, r)} dV$$

と定義する. ここで,  $1_B : M \rightarrow \mathbb{R}$  は部分集合  $B \subset M$  の特性関数, つまり点  $p \in M$  に対して  $p \in B$  ならば  $1_B(p) = 1$  で  $p \notin B$  ならば  $1_B(p) = 0$  である.

定義 28 (局所非崩壊 [Pe1, 4.2])  $\rho, \kappa$  を正の数とする.  $n$  次元多様体  $M$  上のリーマン計量  $g$  がスケール  $\rho$  で  $\kappa$ -非崩壊であるとは,  $M$  の任意の点  $x$  を中心とする半径  $r < \rho$  の開距離球  $B_g(x, r)$  に対して,  $B_g(x, r)$  の各点で  $|\text{Rm}| \leq r^{-2}$  を満たせば  $V_g(x, r) \geq \kappa r^n$  となることをいう.

定理 29 (局所非崩壊定理 I [Pe1, 4.1])  $g(t), t \in [0, T]$  を  $n$  次元閉多様体  $M$  上のリッチフローとする. このとき,  $g(0)$  と  $T$  に依存する正の数  $\kappa = \kappa(g(0), T) > 0$  が存在して, 任意の  $t \in [0, T]$  に対して  $g(t)$  はスケール  $\sqrt{T}$  で  $\kappa$ -非崩壊である.

ここでは, 定理 29 よりも強い以下の定理の証明を紹介する.

**定理 30 (局所非崩壊定理 I' [CZ, To])**  $g(t), t \in [0, T]$  を  $n$  次元閉多様体  $M$  上のリッチフローとする. このとき,  $g(0)$  と  $T$  に依存する正の数  $\kappa = \kappa(g(0), T) > 0$  が存在して, 任意の点  $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$  に対して次が成り立つ;  $0 < r \leq \sqrt{T}$  かつ  $B_{g(t_0)}(x_0, r)$  の各点で  $R(\cdot, t_0) \leq r^{-2}$  を満たせば  $V_{g(t_0)}(x_0, r) \geq \kappa r^n$  となる.

一般に,  $n$  次元リーマン多様体  $(M, g)$  の各点  $x \in M$  において,  $r > 0$  が十分小さいとき

$$V_g(x, r) = \omega_n \left( r^n - \frac{R(x)}{6(n+2)} r^{n+2} + o(r^{n+2}) \right) \quad (31)$$

が成り立つ. ここで,  $\omega_n$  は  $n$  次元ユークリッド空間内の単位球体  $\mathbb{B}^n$  の体積を表す. 定理 30 は閉多様体上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, T]$  に対して, 半径が  $\sqrt{T}$  以下の距離球体の体積がスカラー曲率  $R$  で制御できることを主張する.

リーマン多様体  $(M, g)$  の点  $x_0 \in M$  において,  $B_g(x_0, r)$  上で  $|\text{Rm}| \leq r^{-2}$  かつ  $V_g(x_0, r) \geq \kappa r^n$  が成り立つならば, Cheeger の補題により, 点  $x_0$  における単射半径の下からの評価が従う.

定理 30 の証明: まず始めに,

$$\begin{aligned} \mu_0 &:= \inf \{ \mu(g(0), \tau) : 0 < \tau \leq 2T \}, \\ \kappa &:= \min \left\{ \exp \left( \mu_0 + n - 1 + \frac{n}{2} \log(4\pi) - 36 \cdot 2^n \right), \frac{\omega_n}{2} \right\} \end{aligned}$$

とおき,  $0 < r \leq \sqrt{T}$  で,  $B_{g(t_0)}(x_0, r)$  上で  $R(\cdot, t_0) \leq r^{-2}$  となる点  $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$  を固定する.  $\mu_0 > -\infty$  であることは対数ソボレフの不等式から従う. 以下では,  $B_{g(t_0)}(x_0, r)$  と  $V_{g(t_0)}(x_0, r)$  の代わりに,  $B_{t_0}(x_0, r)$  と  $V_{t_0}(x_0, r)$  と書く.

$\varepsilon$  と  $C$  を正の数とし, 次を満たす関数  $\varphi : M \rightarrow [\varepsilon, \infty)$  を考える:

$$\begin{aligned} x \in B_{t_0}(x_0, r/2) \text{ のとき } \varphi(x) &= C, \quad x \notin B_{t_0}(x_0, r) \text{ のとき } \varphi(x) = \varepsilon, \\ \text{任意の } x \in M \text{ に対して } |\nabla \varphi|(x) &\leq 3C/r. \end{aligned}$$

正の数  $C$  は  $\int_M (4\pi r^2)^{-n/2} \varphi^2 dV = 1$  となるように選ぶ. すると,

$$1 = \int_M (4\pi r^2)^{-n/2} \varphi^2 dV \geq (4\pi r^2)^{-n/2} C^2 V_{t_0}(x_0, r/2). \quad (32)$$

$f := -2 \log \varphi$ , つまり  $\varphi^2 = e^{-f}$  とおくと, 系 25 より

$$\mu_0 \leq \mu(g(0), r^2 + t_0) \leq \mu(g(t_0), r^2) \leq \mathcal{W}(g(t_0), f, r^2)$$

であり,

$$\mathcal{W}(g, f, r^2) = (4\pi r^2)^{-n/2} \int_M [r^2(4|\nabla \varphi|^2 + R\varphi^2) - \varphi^2 \log \varphi^2 - n\varphi^2] dV. \quad (33)$$

以下, 式 (33) の右辺を 1 項ずつ上から評価していく. 簡単のため,  $\varepsilon = 0$  として議論を進める. 不等式 (32) より,

$$(\text{第 1 項}) \leq 36(4\pi r^2)^{-n/2} C^2 V_{t_0}(x_0, r) \leq 36 \frac{V_{t_0}(x_0, r)}{V_{t_0}(x_0, r/2)},$$

$$(\text{第 2 項}) + (\text{第 4 項}) \leq 1 - n.$$

第 3 項の評価には, 次を用いる.

命題 34 (Jensen の不等式) 凹関数  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $M$  上の任意の関数  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  と測度  $d\mu$  に対して,

$$\frac{\int_M G(\varphi) d\mu}{\int_M d\mu} \leq G\left(\frac{\int_M \varphi d\mu}{\int_M d\mu}\right)$$

が成り立つ.

$G(a) := -a \log a$ ,  $d\mu := 1_{B_{t_0}(x_0, r)} dV$  として, Jensen の不等式を用いると,

$$(\text{第 3 項}) \leq \log \frac{V_{t_0}(x_0, r)}{(4\pi r^2)^{n/2}}$$

となる. 以上をまとめると, 次の不等式が得られる:

$$\mu_0 \leq 36 \frac{V_{t_0}(x_0, r)}{V_{t_0}(x_0, r/2)} + \log \frac{V_{t_0}(x_0, r)}{(4\pi r^2)^{n/2}} + 1 - n.$$

もし,  $V_{t_0}(x_0, r) < \kappa r^n$  と仮定すると,  $\kappa$  の定義より

$$V_{t_0}(x_0, r/2) < \kappa (r/2)^n$$

となる. これを繰り返すと, 任意の  $i \in \mathbb{N}$  に対して,

$$V_{t_0}(x_0, r/2^i) < \kappa (r/2^i)^n$$

となり, 式 (31) より,  $i \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{\omega_n}{2} \geq \kappa > \frac{V_{t_0}(x_0, r/2^i)}{(r/2^i)^n} \rightarrow \omega_n$$

となり矛盾するので,  $V_{t_0}(x_0, r) \geq \kappa r^n$  が証明される. □

この節の始めの状況に戻る, Hamilton (1995) のコンパクト性定理と定理 29 を合わせると, 基点付きリッチフローの列  $\{(M, g_i(t), x_i), t \in (-Q_i t_i, 0]\}_{i \in \mathbb{N}}$  のある部分列は ( $M$  とは異なるかもしれないが次元は同じ)  $n$  次元多様体  $M_\infty$  上の古代解  $g_\infty(t), t \in (-\infty, 0]$  に収束する. この古代解を調べることで, リッチフローの有限時間特異点を解析できるようになる.

定義 35 (古代解) 無限区間  $(-\infty, 0)$  上で定義されたリッチフロー  $g(t), t \in (-\infty, 0]$  を古代解 (ancient solution) と呼ぶ.

さらに, 3次元の特殊事情として, Hamilton–Ivey の評価により, 3次元閉多様体上のリッチフローを上のように拡大リスケールして得られる古代解は  $\kappa$  解 ( $\kappa$ -solution) と呼ばれる特殊な古代解となり, Hamilton (1993) が証明した Harnack 不等式が成立し, その分類がある程度可能である [Pe2, 1.5].

また, Perelman は [Pe1] の §§6, 7において, リッチフローという時空を熱浴 (thermostat) に埋め込むことで  $\mathcal{L}$  幾何を展開し,  $n$ 次元多様体  $M$  上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, T]$  に対して簡約体積 (reduced volume) と呼ばれる  $\tau := T - t$  に関して単調な別の積分量

$$\tilde{V}_{(p,0)}(\tau) := \int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-\ell_{(p,0)}(\cdot, \tau)} dV$$

を定義し, その単調性を用いて局所非崩壊定理 I の弱い形の別証明および局所非崩壊定理 II の証明を与えた. 後の議論にはそれらの定理が使用されるため, 実は  $\mathcal{F}$ -汎関数も  $\mathcal{W}$ -汎関数も Perelman によるポアンカレ予想の証明には直接的には使われない.

## 5. 幾何化予想の証明のあらすじ

Hamilton のプログラムに基づき, Perelman はプレプリント [Pe2] において, 任意の正規化された 3次元閉リーマン多様体を初期値とし, 無限時間存在する (ただし, 有限時間で消滅する可能性はある) 手術付きリッチフローを構成した. 簡単に言うと, 3次元閉多様体  $M$  上のリッチフロー  $g(t), t \in [0, T]$  が有限時間  $T < \infty$  において特異点を生成したとき, その特異点において手術を行い新たなリーマン多様体を作り, 再びそれを初期値とするリッチフローを考える. これを繰り返すことで, 無限時間存在する手術付きリッチフローが得られる [Pe2, §5]. 実際には, 手術を行う時刻が集積しないように, つまり有限時間内には有限回の手術が行われるように, パラメータを調整しながら手術付きリッチフローを構成していく.

その手術付きリッチフローの長時間挙動を解析すると, 予想 14 のような太・瘦分解 (Thick-thin decomposition) が見えてくる [Pe2, §7]. 太い部分には双曲計量が入り, 痩せた部分は, 次の定理により, グラフ多様体となる.

**定理 36 (グラフ多様体定理, 塩谷・山口 [SY], cf. Perelman [Pe2, 7.4])** 以下を満たす小さな正の数  $v_0 > 0$  が存在する: 向き付け可能な 3次元閉リーマン多様体  $(M, g)$  の断面曲率が  $-1$  以上で体積  $\text{Vol}(M, g)$  が  $v_0$  未満ならば,  $M$  の基本群  $\pi_1(M)$  は有限であるか,  $M$  はグラフ多様体である.

Perelman による定理 36 の証明は未だ発表されていないが, 塩谷・山口が同時期に独立に証明した. 定理 36 の証明は背理法による. つまり, そのような正の数  $v_0$  が存在しないと仮定して, 断面曲率が  $-1$  以上で, その体積  $\text{Vol}(M_i, g_i)$  が  $i \rightarrow \infty$  のとき  $\text{Vol}(M_i, g_i) \rightarrow 0$  となるような 3次元閉多様体の列  $\{(M_i, g_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  を考えると, 距離空間の列  $\{(M_i, d_{g_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$  の部分列はある距離空間  $(X, d)$  に Gromov–Hausdorff 収束する. 一般に  $(X, d)$  は多様体とは限らず, 曲率が  $-1$  以上の Alexandrov 空間と呼ばれる距離空間になる. また, 体積に関する仮定から  $(X, d)$  の次元は 3 未満となる, つまり多様体の列  $\{(M_i, g_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  は崩壊している. そこで, ファイバー束定理 (山口 (1996)) や Perelman の別の未出版プレプリント [Pe] で証明された安定性定理などの崩壊理論

の道具を用いて, 十分大きい  $i$  に対して,  $(M_i, g_i)$  と  $(X, d)$  の関係を調べていく. 詳しくは [数セ] 内の本人達による解説等を参照されたい.

また, Perelman の 3 本目のプレプリント [Pe3] では, 任意の正規化された単連結 3 次元閉リーマン多様体を初期値とする手術付きリッチフローは有限時間で必ず消滅することが証明されている. これにより, 手術付きリッチフローの長時間挙動の考察を必要としないポアンカレ予想の比較的短い別証明が得られる.

以上が Perelman による幾何化予想とポアンカレ予想の証明のあらすじである.

## 6. おわりに

最後に, ポアンカレ予想に関連した現時点での未解決問題を挙げる.

問題 37 (4次元可微分ポアンカレ予想) 4次元球面  $S^4$  に同相な4次元可微分閉多様体は  $S^4$  に微分同相か?

一般に, 2つの可微分多様体が同相でも微分同相とは限らない. 実際, J. Milnor (1956) が構成した異種球面 (exotic sphere) と呼ばれる7次元球面  $S^7$  に同相だが微分同相でない7次元多様体の例が知られている.

4次元ポアンカレ予想, つまり「4次元球面にホモトピー同値な4次元閉多様体は4次元球面に同相である」ことは M. Freedman (1982) により証明されているため, 問題 37 は「4次元球面にホモトピー同値な4次元可微分閉多様体は4次元球面に微分同相であるか?」と言い換えられる. この問題 ([石田] も参照) にリッチフローは有効であろうか?

補足 38 以下に参考文献を幾つか挙げる. 最近では, 数学の論文は雑誌で出版される前 (または後) に主に arXiv.org というプレプリントサーバ (<http://arxiv.org>) にてプレプリントとして公開されることが多い. 下の参考文献中の「arXiv:」は arXiv.org 内での識別番号を表す.

ポアンカレ予想に関する読み物として [南] や [根上] がある. Perelman の議論の概略については [数セ] や, より専門的には [戸田] と [小林] の導入部分, 幾何化予想については [小島] を参照されたい. 多様体に関しては [坪井] など, リーマン幾何学に関しては [塩谷] などが最近の教科書である.

英語であるが, [To] はリッチフローの入門書として手頃であると思われる. リッチフローの教科書としては [CK], [CLN] などがある. Perelman の証明を理解したい読者は, [戸田], [小林], [CZ], [KL], [MT] 等を参照しながら元論文 [Pe1, Pe2, Pe3] を読み進めていただきたい. 論文集 [CP] には Perelman 以前の Hamilton らによるリッチフローに関する重要な論文の幾つかが収録されている. また, ウェブサイト <https://math.berkeley.edu/~lott/ricciflow/perelman.html> には, Perelman のプレプリントに関連する様々な論文のリンクが集められている.

## 参考文献

[CP] *Collected papers on Ricci flow*. Edited by H. D. Cao, B. Chow, S. C. Chu and S. T. Yau. Series in Geometry and Topology, 37. International Press, Somerville, MA, 2003.

- [CZ] H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*. Asian J. Math. **10** (2006), no. 2, 165–492; <http://projecteuclid.org/euclid.ajm/1154098947> にて入手可.
- [CK] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow: an introduction*. Mathematical Surveys and Monographs, 110. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [CLN] B. Chow, P. Lu and L. Ni, *Hamilton's Ricci flow*. Graduate Studies in Mathematics, 77, AMS, Providence, RI; Science Press, New York, 2006.
- [Ha] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306; [CP] に収録.
- [石田] 石田 政司, リッチフローと4次元異種微分構造. 数理物理への誘い 7 最新の動向をめぐって. 河東 泰之 (編), 2010, 遊星社.
- [KL] B. Kleiner and J. Lott, *Notes on Perelman's papers*. Geom. Topol. **12** (2008), no. 5, 2587–2855; arXiv:math/0605667.
- [小林] 小林 亮一, リッチフローと幾何化予想 (数理物理シリーズ). 2011, 培風館.
- [小島] 小島 定吉, 講座 数学の考え方 22 3次元の幾何学. 2002, 朝倉書店.
- [MT] J. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*. Clay Mathematics Monographs, 3. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007; arXiv:math/0607607.
- [南] 南 みや子・永瀬 輝男, ポアンカレの贈り物 数学最後の難問は解けるのか (ブルーボックス). 2001, 講談社.
- [根上] 根上 生也, トポロジカル宇宙 完全版 ポアンカレ予想解決への道. 2007, 日本評論社.
- [Pe] G. Perelman, *Alexandrov's space with curvatures bounded from below II*. Preprint, <http://www.math.psu.edu/petrinin/papers/> にて入手可.
- [Pe1] ———, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. Preprint, arXiv:math/0211159.
- [Pe2] ———, *Ricci flow with surgery on three manifolds*. Preprint, arXiv:math/0303109.
- [Pe3] ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. Preprint, arXiv:math/0307245.
- [Po] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*. Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45–110.
- [塩谷] 塩谷 隆, 臨時別冊・数理科学 重点解説 基礎微分幾何 曲面, 多様体, テンソル, 微分形式, リーマン幾何. 2009, サイエンス社.
- [SY] T. Shioya and T. Yamaguchi, *Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*. Math. Ann. **333** (2005), no. 1, 131–155; arXiv:math/0304472.
- [数セ] 数学セミナー増刊: 解決! ポアンカレ予想, 2007, 日本評論社.
- [Th] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381; <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183548782> にて入手可.
- [戸田] 戸田 正人, 臨時別冊・数理科学 3次元トポロジーの新展開 リッチフローとポアンカレ予想. 2007, サイエンス社.
- [To] P. M. Topping, *Lectures on the Ricci flow*. LMS Lecture Note Series, 325. Cambridge University Press, Cambridge, 2006; <http://homepages.warwick.ac.uk/~maseq/RFnotes.html> にて入手可.
- [坪井] 坪井 俊, 幾何学 1 多様体入門. 2005, 東京大学出版会.