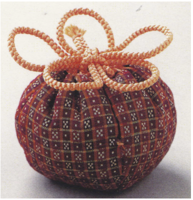
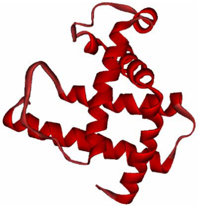
# 結び目の数学

鈴木咲衣

RIMS 公開講座, 2016 年 8 月 1 日 ～ 4 日



# 授業の進め方

# ICE モデル

- Idea (基礎的知識を学習する)
- Connection (学びを繋げる)
- Expansion (広げて応用していく)

# 授業の進め方

(1) スライドで説明する（30 分） (Idea)

(2) 演習問題・解説（30 分） (Connection)

(3) フィードバック（10 分） (Connection $\to$ Expansion)

# 講義の目標

1 日目：結び目理論の研究対象と研究方法を理解する.

2 日目：ジョーンズ多項式の定義を理解する.

3 日目：ジョーンズ多項式を研究する.

4 日目：量子トポロジーの最先端の研究を垣間見る.

# 1 日目の目次

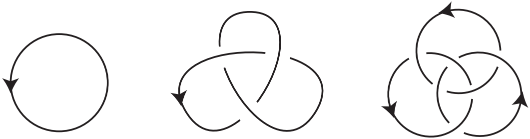
(1) 結び目と絡み目
(2) イソトピックな絡み目
(3) 結び目の和
(4) 絡み目の不変量

# (1) 結び目と絡み目

# 結び目と絡み目

## 定義

向きを持ついくつかの円周 $S^1$ を3次元空間 $\mathbb{R}^3$ にうめこんだ像のことを 絡み目 という．ただひとつの円周の埋め込みになっている絡み目を特に 結び目 という．



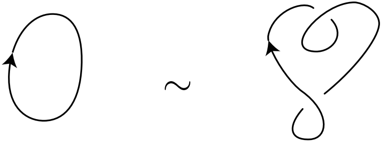
自明な結び目　三葉結び目　ボロミアン絡み目

# (2) イソトピックな絡み目

# イソトピックな絡み目

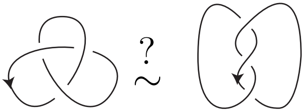
## 定義

ひもが自己交差しないように連続的に変形して移りあう絡み目は，互いに <u>イソトピック</u> であるという．絡み目 $L$ と $L'$ が互いにイソトピックであるとき，$L \sim L'$ と書く．

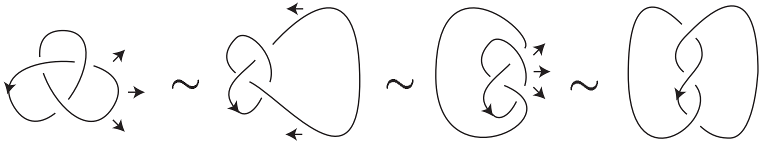


# イソトピックな絡み目

問い　次の２つの絡み目はイソトピックだろうか？




答え　イソトピックであり，次のように変形できる．



# イソトピックな絡み目

絡み目の集合で，イソトピックなものを同一視した集合を

$$\mathcal{L} = \{\text{絡み目}\}/\sim$$

とおく．特に結び目の集合で，イソトピックなものを同一視した集合を

$$\mathcal{K} = \{\text{結び目}\}/\sim$$

とおく．

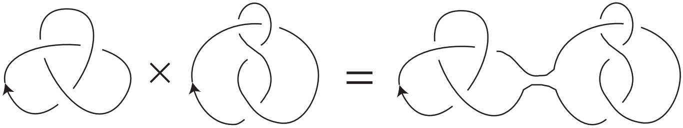
# (3) 結び目の和

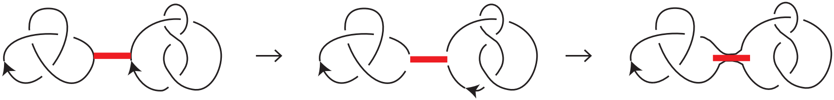
# 結び目の和

## 結び目の二項演算

$$\mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

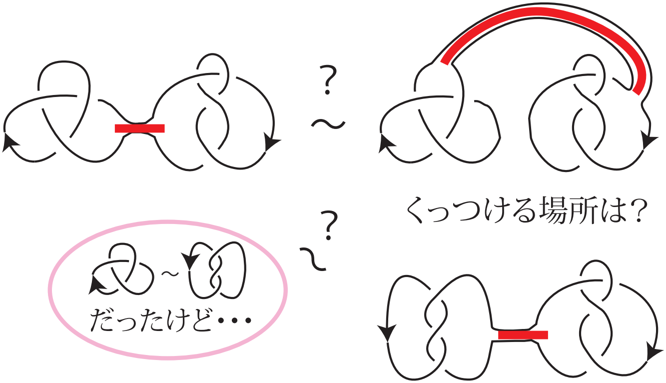
を以下のように定義し，結び目の <u>連結和</u> と呼ぶ．





# 結び目の和

## Well-definedness（うまく定義できているか）の確認

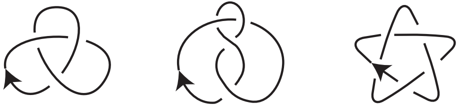



くっつける場所は?

イソトピー類の代表元の選び方は?

# 結び目の素因数分解

非自明な和として分解できない結び目を <u>素な結び目</u> という.



## 定理 (素因数分解の定理の類似)

任意の結び目はいくつかの素な結び目の和として一意的に表される.

# 「構造を入れる」ということ

☆ポイント☆

ある集合に構造を入れることで集合の性質の理解（要素同士の関係の理解）を深める.

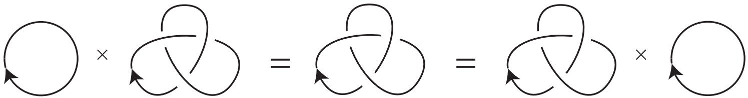
かけ算 $\cdots$ 二項演算（単位律，結合律）

足し算 $\cdots$ 二項演算（単位律，結合律，可逆性，可換性）

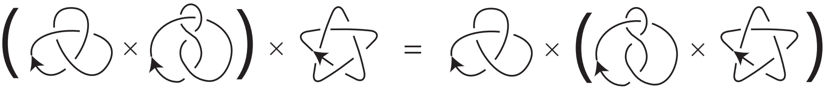
- かけ算 $\to$ モノイド（$\mathbb{N}, +, 0$）（$\mathbb{N}, \times, 1$）
- かけ算（+可逆性）$\to$ 群（$\mathbb{Z}, +, 0$）(足し算でもある)
- かけ算+足し算（+分配律）$\to$ 環（$\mathbb{Z}, [\times, 1], [+, 0]$）
- かけ算（+可逆性）+足し算（+分配律）$\to$ 体（$\mathbb{Q}$）

# 結び目の和

- 単位律



- 結合律

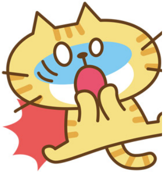


# 結び目の集合のモノイド構造

結び目の集合には連結和によりモノイドの構造が入る!!

調べたい！

BUT ！

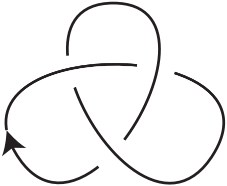


そもそも結び目の集合は要素がよくわからない！

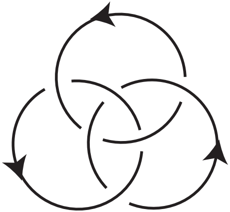
- どんな結び目があるのか？
- 与えられた２つの結び目は同じ？ 違う？
- まず要素のリストを作りたい！

# (4) 絡み目の不変量

# 次の２つの絡み目はイソトピックだろうか？



$$\overset{?}{\sim}$$



# 定義 (絡み目の不変量)

写像 $f\colon \{\,\text{絡み目}\,\} \to I$ で $L \sim L' \Rightarrow f(L) = f(L')$ を満たすものを <u>絡み目の不変量</u> と呼ぶ．写像

$$\tilde{f}\colon \{\,\text{絡み目}\,\}/\sim \;\; \to I$$

と定義することもできる．

不変量が絡み目の性質を記述する言語になる！

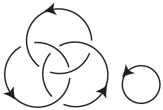
$$f(L) \neq f(L') \quad \Rightarrow \quad L \not\sim L'$$

# 絡み目の不変量の例 1：成分数

絡み目 $L$ に対して $s(L)$ をその連結成分の数とすると，写像

$$s\colon \{\text{ 絡み目 }\} \to \{0, 1, 2, \dots\}$$

は絡み目の不変量になる．例えば

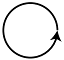
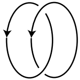
$s($  $) = 4$ ．

# 絡み目の不変量の例 2：最小交点数

絡み目 $L$ に対して $m(L)$ を $L$ のすべての図式のなかで最小の交点の数とすると，写像

$$m\colon \{\text{ 絡み目 }\} \to \{0, 1, 2, \ldots\}$$

は絡み目の不変量になる．例えば

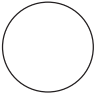
$m($  $) = 0$,　$m($  $) = 3$,　$m($  $) = 2$.

# 演習問題 1

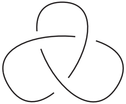
# 演習問題 1

- 思いつく絡み目をたくさん描いてみよう.
- 資料にある結び目のペアはイソトピックだろうか？
- 絡み目の不変量を考えて定義してみよう.

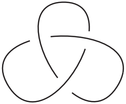
# いろいろな結び目



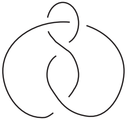
自明な結び目K0



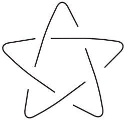
三葉結び目K31



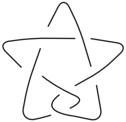
$\overline{\text{K31}}$



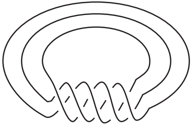
８の字結び目K41



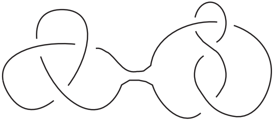
K51



K61



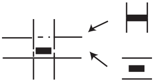
(3,5)トーラス結び目



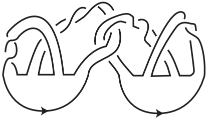
K31×K41

# いろいろな絡み目

リボン絡み目

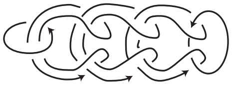
円盤の埋め込みであって特異点が  のみ.

リボン特異点



境界絡み目

重ならないいくつかの曲面（ザイフェルト曲面）の境界.



ブルニアン絡み目

どの一成分でも消すとほどける.

# 資料にある結び目のペアはイソトピック？

全部のペアがイソトピック！

# 絡み目の不変量を考えて定義してみよう.

- 最小性で定義する（絡み目解消数など）
- 補空間の幾何を用いる（基本群、ホモロジーなど）
- 図式を用いて定義する（次回）

1 日目お疲れさまでした