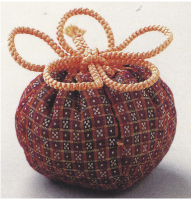
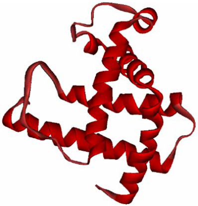
結び目の数学

鈴木咲衣

RIMS 公開講座, 2016 年 8 月 1 日 ～ 4 日



講義の目標

講義の目標

1日目：結び目理論の研究対象と研究方法を理解する.

2日目：ジョーンズ多項式の定義を理解する.

3日目：ジョーンズ多項式を研究する.

4日目：量子トポロジーの最先端の研究を垣間見る.

2 日目の目次

(1) 絡み目の図式

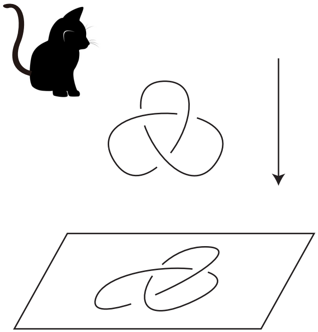
(2) 図式を用いて結び目の不変量を作る（レシピ）

(3) ジョーンズ多項式

(1) 絡み目の図式

絡み目の図式

絡み目を平面に射影し，線が交差しているところに上下の情報をつけたものを絡み目の 図式 という．



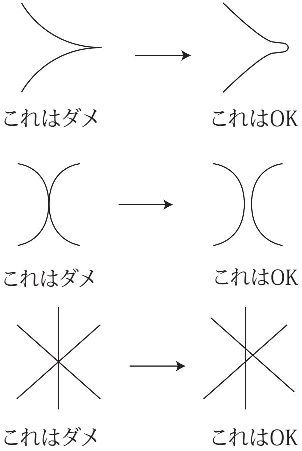
図式の中の交差部分を絡み目図式の 交点 と呼ぶ．

ダメな例

(I) とがった部分.

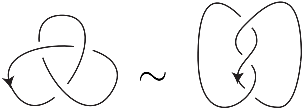
(II) 線と線が接する部分.

(III) 三重点.

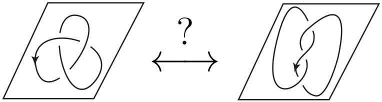


図式を使って絡み目を調べるポイント

絡み目はイソトピーで移り合うとき “同じ” とみなした.

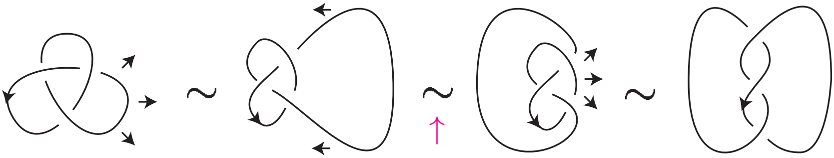


３次元の中の絡み目は考えにくいので、絡み目図式を用いて絡み目を調べたい.

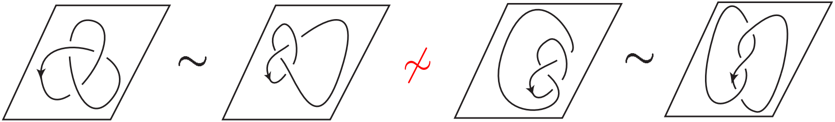


どんな関係？

３次元空間の連続変形（イソトピー）



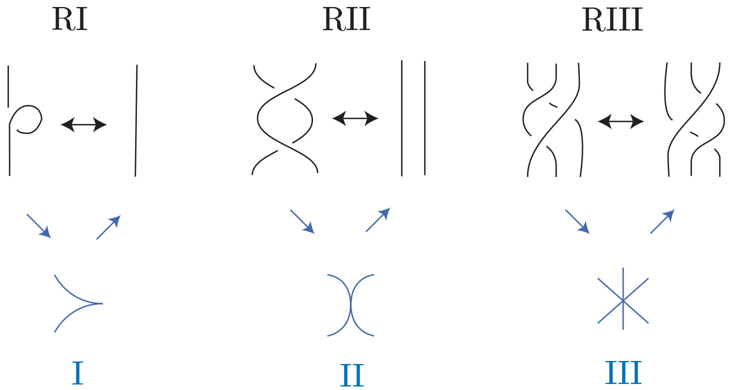
３次元的操作



２次元空間のイソトピーでは動かせない！

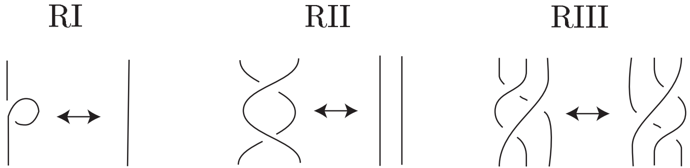
⇒ ３次元的操作に対応する図式変形が必要.

ライデマイスター移動 RI, RII, RIII



ダメな例 I, II, III を離散的に回避

ライデマイスター移動 RI, RII, RIII



定理 (絡み目と図式の関係)

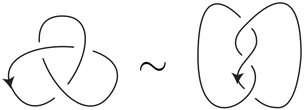
絡み目をイソトピーで割った集合と，図式をイソトピーとライデマイスター移動で割った集合は一対一対応する．

$$\{\text{絡み目}\}/\sim \xleftrightarrow{\text{1:1 対応}} \{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\mathrm{RI,\ RII,\ RIII}}$$

証明のあらすじ

$$\{\text{絡み目}\}/\sim \xleftrightarrow{\text{1:1 対応}} \{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\mathsf{RI,\ RII,\ RIII}}$$

(→)：絡み目の射影をつくる．well-defined を示すにはイソトピックな絡み目から得られる異なる図式がイソトピーとライデマイスター移動で移り合うことを確認．



(←)：図式から絡み目を復元．well-defined を示すにはライでマイスター移動の両辺から復元した絡み目がイソトピックであることを確認．

(2) 図式を用いて絡み目の不変量を作る（レシピ）

図式を用いて絡み目の不変量を作る（レシピ）

絡み目不変量 $f\colon \{\text{絡み目}\}/\sim \quad \to \quad I$

$\updownarrow$ 1:1　　　↗ ここを作れば良い

$\{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(i) 絡み目図式に対して値を対応させる.

$$f\colon \{\text{絡み目の図式}\} \to I$$

(ii) 図式のイソトピーとライデマイスター移動での不変性を示す.

(3) ジョーンズ多項式

ジョーンズ多項式

(a) カウフマン括弧

$$\langle\ \ \rangle\colon \{\text{ 絡み目の図式 }\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

を定義する.

(b) カウフマン括弧を補正する.

$$V_D(t) = (-A^3)^{-w(L)} \langle D \rangle |_{A^2 = t^{-1/2}}$$

ただし D は絡み目の図式で,

$$w(L) = (D \text{ の正交点の数}) - (D \text{ の負交点の数}).$$

ジョーンズ多項式

(a) カウフマン括弧 $\langle\ \ \rangle\colon \mathcal{L} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を以下の性質で定義する．

(K1) $\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$

交点が帰納的に減り，いくつかの円周のみが残る．

(K2) $\langle D \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle D \rangle$

円周が帰納的に減り，一つの円周が残る．

(K3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

最後に残った円周を 1 にすれば $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ の元が得られる．

ジョーンズ多項式

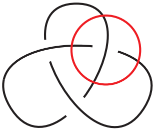
(K2) $\langle D \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle D \rangle$

(K3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

$$\Rightarrow \langle \bigcirc^n \rangle = (-1)^{n-1}(A^2 + A^{-2})^{n-1}$$

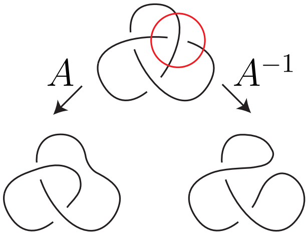
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



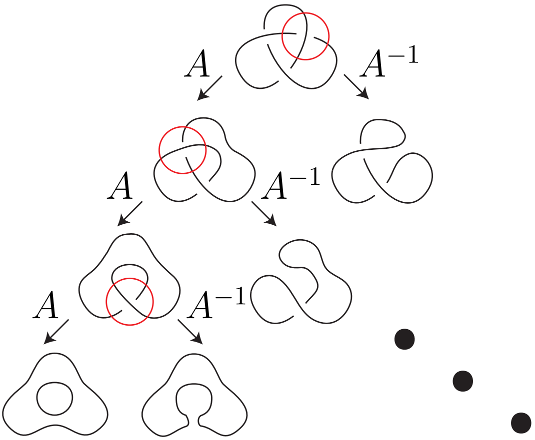
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



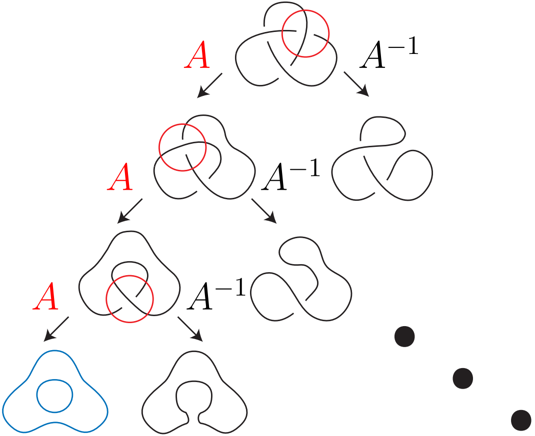
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



三葉結び目のジョーンズ多項式

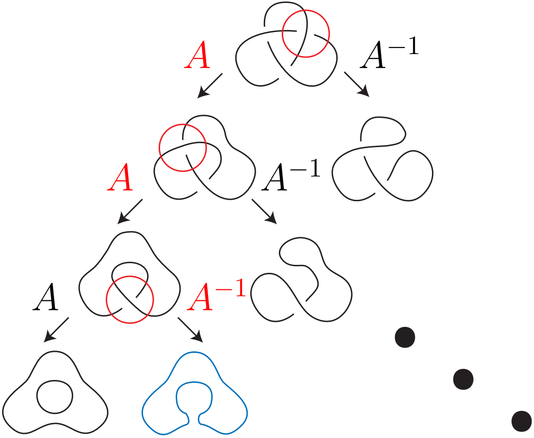
(K2,K3)



$$-(A^2 + A^{-2})A^3 + 1 \cdot A + \cdots$$

三葉結び目のジョーンズ多項式

(K2,K3)



$$-(A^2 + A^{-2})A^3 + 1 \cdot A + \cdots$$

絡み目不変量を作るレシピ（復習）

ジョーンズ多項式 V: $\{$ 絡み目 $\}/\sim \quad \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

$\Updownarrow$ 1:1 $\quad\quad$ ↗ ここを作る

$\{$ 絡み目の図式 $\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(i) 絡み目図式に対して値を対応させる（今日）.

$$V: \{ \text{絡み目の図式} \} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

(ii) ライデマイスター移動での不変性を示す（明日）.

絡み目不変量を作るレシピ（復習）

ジョーンズ多項式 $V\colon \{\text{絡み目}\}/\sim \quad \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

$\Updownarrow$ 1:1 $\quad\nearrow$ ここを作る

$\{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(i) 絡み目図式に対して値を対応させる（今日）.

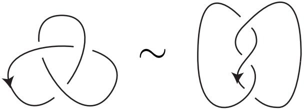
$$V\colon \{\text{絡み目の図式}\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

(ii) ライデマイスター移動での不変性を示す（明日）.

演習問題 2

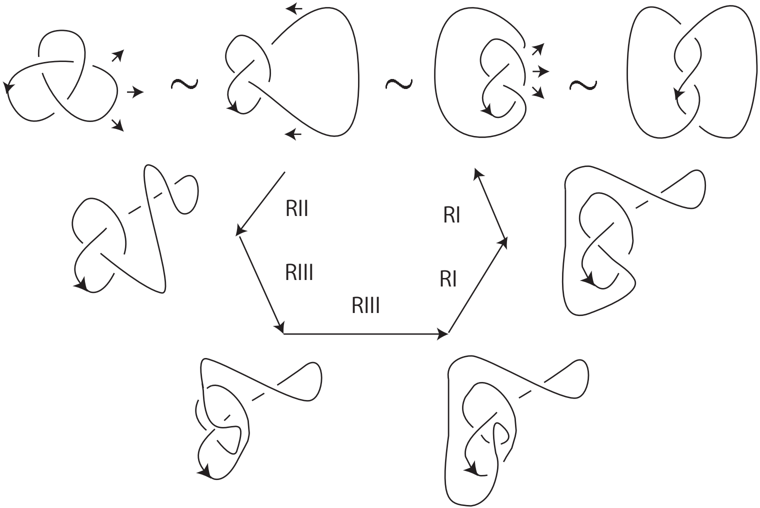
演習問題 2

- 次の 2 つの図式が表す結び目はイソトピックであった．図式のイソトピーとライデマイスター移動で左の図式を右の図式に変形してみよう．



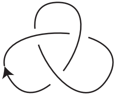
- 三葉結び目のジョーンズ多項式を計算してみよう．

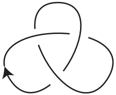
三葉結び目の図式移動



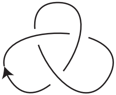
4 回の変形で済む方法もある（ヒント：RI → RIII → RIII → RI）

三葉結び目のジョーンズ多項式

$w($  $) = 3,$

$\langle$  $\rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$

より

$V($  $) = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

2 日目お疲れさまでした