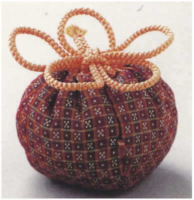
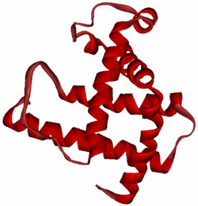
結び目の数学

鈴木咲衣

RIMS 公開講座, 2016 年 8 月 1 日 〜 4 日



講義の目標

講義の目標

1日目：結び目理論の研究対象と研究方法を理解する.

2日目：ジョーンズ多項式の定義を理解する.

3日目：ジョーンズ多項式を研究する.

4日目：量子トポロジーの最先端の研究を垣間見る.

四日目の目次

(1) 準備（線形空間、双対空間、テンソル積）

線形空間 V とその双対空間 V^*

- $$V = \mathbb{C}^2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$
  $$= \{av_0 + bv_1 \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$
  $$= \{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$
- $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = \{$ 線形写像 $f\colon V \to \mathbb{C}\}$

線形写像 $f\colon V \to \mathbb{C}$ は $a, b \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(av_0 + bv_1) = af(v_0) + bf(v_1)$$

を満たす写像である．すなわち $v^0, v^1\colon V \to \mathbb{C}$ を

$$v^0(v_i) = \delta_{i,0} = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1) \end{cases},$$

$$v^1(v_i) = \delta_{i,1} = \begin{cases} 0 & (i = 0) \\ 1 & (i = 1) \end{cases}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_0, \delta_1\}$ となる．

線形空間 V, W のテンソル積 $V \otimes W$

$$V \otimes W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v \otimes w | v \in V, w \in W\}$$

$$\begin{aligned} /a(v \otimes w) = (av) \otimes w = v \otimes (aw), \\ (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \end{aligned}$$

V の基底を $\{v_i\}$, W の基底を $\{w_j\}$ とすると

$$(\sum_i a_i v_i) \otimes (\sum_j b_j w_j) = \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes w_j)$$

が成り立つ.

線形写像 f, g のテンソル積 $f \otimes g$

線形写像 $f\colon V \to X$, $g\colon W \to Y$ に対して

$$f \otimes g\colon V \otimes W \to X \otimes Y, \quad v \otimes w \mapsto f(v) \otimes g(w)$$

と定義する.
V の基底を $\{v_i\}$, W の基底を $\{w_j\}$ とすると

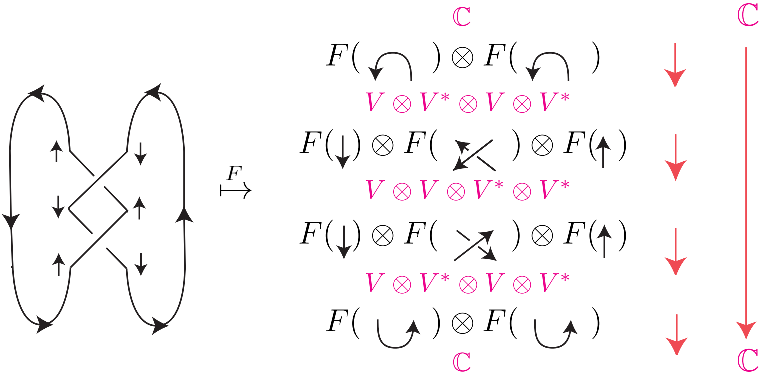
$$f(\sum_i a_i v_i) \otimes g(\sum_j b_j w_j) = \sum_{i,j} a_i b_j (f(v_i) \otimes g(w_j))$$

が成り立つ.

(2) 量子不変量

量子不変量のアイデア

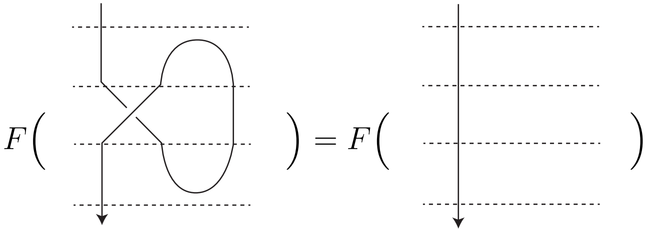
$$F\colon\ \{\text{絡み目図式}\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$



例：$F($$)\colon\ \mathbb{C} \to V \otimes V^*$,　$F($$)\colon\ V \otimes V^* \to \mathbb{C}$,

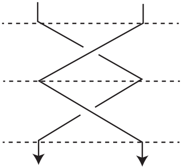
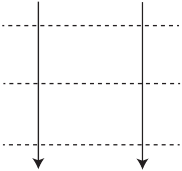
$F($$)\colon\ V \otimes V^* \to V^* \otimes V$,　$F(\downarrow) = \mathrm{id}_V\colon\ V \to V$

RI での不変性の証明



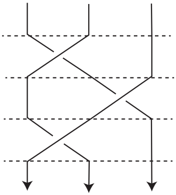
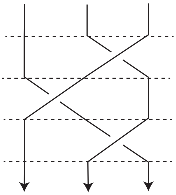
$(\mathrm{id}_V \otimes F($  $)) \circ (F($  $) \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ (\mathrm{id}_V \otimes F($  $)) = \mathrm{id}_V$

RII での不変性の証明

$F\Big($  $\Big) = F\Big($  $\Big)$

$F($  $) \circ F($  $) = \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_V$

RIII での不変性の証明

$F\Big($  $\Big) = F\Big($  $\Big)$

$$(F(\quad) \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes F(\quad)) \circ (F(\quad) \otimes \mathrm{id}_V)$$

$$= (\mathrm{id}_V \otimes F(\quad)) \circ (F(\quad) \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes F(\quad))$$

($\Longleftrightarrow$ $F(\quad)$ は <u>ヤンバクスター方程式</u> の解である．)

(3) 量子不変量としてのジョーンズ多項式

量子不変量としてのジョーンズ多項式

$F($  $) = r\colon V \otimes V \to V \otimes V$

$F($  $) = r^{-1}\colon V \otimes V \to V \otimes V$

$$r = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2} - t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$r^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t^{-2}(t^{1/2} - t^{3/2}) & t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1/2} \end{pmatrix}$$

量子不変量としてのジョーンズ多項式

$F($  $) = \mathrm{ev}\colon\ V^* \otimes V \to \mathbb{C},\ f \otimes x \mapsto f(x)$

$F($  $) = \mathrm{ev}^*\colon\ V \otimes V^* \to \mathbb{C},\ x \otimes f \mapsto f(h(x))$

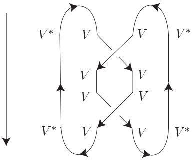
$F($  $) = \mathrm{coev}\colon\ \mathbb{C} \to V \otimes V^*,\ 1 \mapsto v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1$

$F($  $) = \mathrm{coev}^*\colon\ \mathbb{C} \to V^* \otimes V,\ 1 \mapsto v^0 \otimes h^{-1}(v_0) + v^1 \otimes h^{-1}(v_1)$

ただし

$$h = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$$

と置いた.

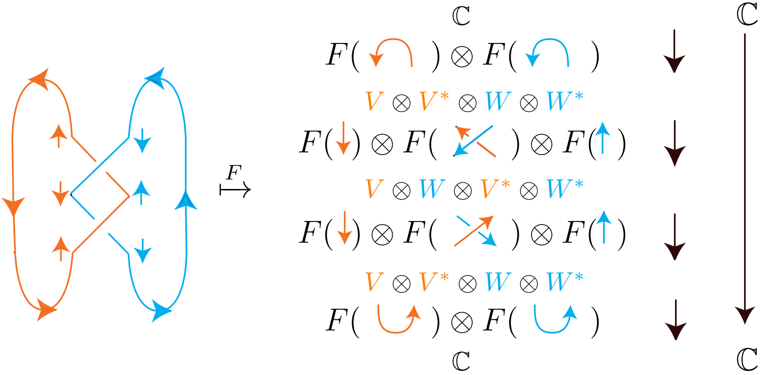


$$
\begin{aligned}
1 &\xmapsto{\mathrm{coev}^*\otimes\mathrm{coev}} (t^{1/2}v^0\otimes v_0 + t^{-1/2}v^1\otimes v_1)\otimes(v_0\otimes v^0 + v_1\otimes v^1)\\
&= t^{1/2}v^0\otimes v_0\otimes v_0\otimes v^0 + t^{1/2}v^0\otimes v_0\otimes v_1\otimes v^1\\
&+ t^{-1/2}v^1\otimes v_1\otimes v_0\otimes v^0 + t^{-1/2}v^1\otimes v_1\otimes v_1\otimes v^1\\
&\xmapsto{\mathrm{id}_{V^*}\otimes R\otimes \mathrm{id}_{V^*}} t^{1/2}v^0\otimes(t^{1/2}v_0\otimes v_0)\otimes v^0 + t^{1/2}v^0\otimes(tv_1\otimes v_0)\otimes v^1\\
&+ t^{-1/2}v^1\otimes(tv_0\otimes v_1 + (t^{1/2}-t^{3/2})v_1\otimes v_0)\otimes v^0 + t^{-1/2}v^1\otimes(t^{1/2}v_1\otimes v_1)\otimes v^1\\
&\xmapsto{\mathrm{id}_{V^*}\otimes R\otimes \mathrm{id}_{V^*}} t^{1/2}v^0\otimes t^{1/2}(t^{1/2}v_0\otimes v_0)\otimes v^0 + t^{1/2}v^0\otimes t(tv_0\otimes v_1 + (t^{1/2}-t^{3/2})v_1\otimes v_0)\otimes v^1\\
&+ t^{-1/2}v^1\otimes(t(tv_1\otimes v_0) + (t^{1/2}-t^{3/2})(tv_0\otimes v_1 + (t^{1/2}-t^{3/2})v_1\otimes v_0))\otimes v^0\\
&+ t^{-1/2}v^1\otimes t^{1/2}(t^{1/2}v_1\otimes v_1)\otimes v^1\\
&= t^{3/2}v^0\otimes v_0\otimes v_0\otimes v^0 + t^{5/2}v^0\otimes v_0\otimes v_1\otimes v^1 + t^{1/2}(t^{1/2}-t^{3/2})v^0\otimes v_1\otimes v_0\otimes v^1\\
&+ t^{-1/2}(t^2 + (t^{1/2}-t^{3/2})^2)v^1\otimes v_1\otimes v_0\otimes v^0 + t^{-1/2}t(t^{1/2}-t^{3/2})v^1\otimes v_0\otimes v_1\otimes v^0\\
&+ t^{1/2}v^1\otimes v_1\otimes v_1\otimes v^1\\
&\xmapsto{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{ev}^*} t^{3/2}t^{-1/2} + t^{5/2}t^{1/2} + t^{-1/2}(t^2 + (t^{1/2}-t^{3/2})^2)t^{-1/2} + t^{1/2}t^{1/2}\\
&= 1 + t + t^2 + t^3\\
&\xmapsto{-1/(t^{1/2}+t^{-1/2})} t^{1/2} + t^{5/2}
\end{aligned}
$$

(4) 普遍 sl_2 不変量と色付きジョーンズ多項式

色付きジョーンズ多項式のアイデア

$$F\colon\ \{\text{絡み目図式}\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$



各ひもごとに違う線形空間を色付けして不変量を定義する.

おおまかに言うと

普遍 sl_2 不変量とは

量子群 $U_h(sl_2)$ の <u>リボンホップ代数</u> 構造

$\Downarrow$ 絡み目図形に代数の元を色付けして

普遍 sl_2 不変量 $J(L) \in U_h(sl_2)^{\otimes n}$

色付きジョーンズ多項式とは

量子群 $U_h(sl_2)$ の <u>n 次元既約表現</u>V_n $(n \in \mathbb{N})$

$\Downarrow$ 絡み目 L の m 成分目に V_{i_m} を色付けするごとに

色付きジョーンズ多項式 $J_{V_{i_1},\ldots,V_{i_n}}(L) \in \mathbb{C}$.

量子展開環（量子群）$U_\hbar(sl_2)$

: $\hbar$-進 完備 $\mathbb{Q}[[\hbar]]$-代数

- 生成元: H, E, F
- 関係式:

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F,$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

$$\text{ただし} \quad q = \exp\hbar, \quad K = q^{H/2} = \exp\frac{\hbar H}{2}.$$

$U_h(sl_2)$ の表現（線形写像の作り方）

定義

$U_h(sl_2)$ の表現 とは，$\mathbb{Q}$ 上の線形空間 V と代数写像

$$\rho_V \colon U_h(sl_2) \to \mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$$

の組 (V, ρ) である．

ρ_V を介して量子群の元は線形写像 $V \to V$ と思える．

リボンホップ代数構造 $(U_h(sl_2), R, \theta)$

$R \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$：普遍 R 行列
$\theta \in U_h(sl_2)$：リボン元
$u \in U_h(sl_2)$：R と θ から得られる特別な元で,

$$u\theta^{-1} = K$$

を満たす.

$$\Downarrow$$

$$(\rho_V \otimes \rho_W)(R) \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, V \otimes W)$$
$$\rho_V(K) \in \mathrm{Hom}(V, V)$$

色付きジョーンズ多項式

$F($  $) = \tau \circ (\rho_V \otimes \rho_W)(R), : \ V \otimes W \to W \otimes V,$

$F($  $) = (\rho_{V'} \otimes \rho_V)(R^{-1}) \circ \tau \colon \ W \otimes V \to V \otimes W,$

$F($  $) = \mathrm{ev} \colon \ V^* \otimes V \to \mathbb{C}, \ f \otimes x \mapsto f(x)$

$F($  $) = \mathrm{ev}^* \colon \ V \otimes V^* \to \mathbb{C}, \ x \otimes f \mapsto f(\rho(K^{-1})(x))$

$F($  $) = \mathrm{coev} \colon \ \mathbb{C} \to V \otimes V^*, \ 1 \mapsto v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1$

$F($  $) = \mathrm{coev}^* \colon \ \mathbb{C} \to V^* \otimes V, 1 \mapsto v^0 \otimes \rho(K)(v_0) + v^1 \otimes \rho(K)(v_1)$

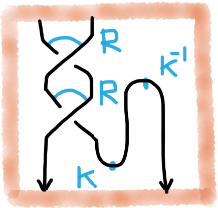
ただし

$$\tau \colon \ V \otimes V' \to V' \otimes V, a \otimes b \mapsto b \otimes a.$$

$\Rightarrow$ 色付きジョーンズ多項式 $J_{V_1,\ldots,V_n}(L)$.

普遍 sl_2 不変量

$$R = q^{\frac{H \otimes H}{4}\hbar}\left(\sum_{n \geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{(q-1)^n}{[n]_q!} F^n \otimes E^n\right)$$



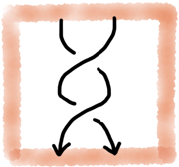
(1) 図式を選ぶ

(2) ラベルを貼る

(3) ラベルを読む

$\Rightarrow$ 普遍 sl_2 不変量 $J(L) \in U_\hbar(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$.

普遍 sl_2 不変量

J ()

$$= q^{\frac{H\otimes H}{2}\hbar} \sum_{m,n\geq 0} q^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+m^2} \frac{(q-1)^{m+n}}{[m]_q![n]_q!} F^m K^{-m} E^n \otimes E^m K^m F^n$$

普遍 sl_2 不変量と色付きジョーンズ多項式

$V_1, \ldots, V_n$ を $U_\hbar(sl_2)$ の有限次元表現とする.
$\mathrm{tr}^{V_i} = \mathrm{tr} \circ \rho_{V_i} \colon U_\hbar(sl_2) \to \mathrm{Hom}(V_i, V_i) \to \mathbb{Q}[[\hbar]]$ とおく.

定理

L を n 成分絡み目とすると

$$J_{V_1,\ldots,V_n}(L) = (\mathrm{tr}^{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{tr}^{V_n})\,(J(L))$$

が成り立つ.

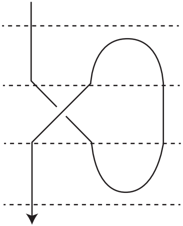
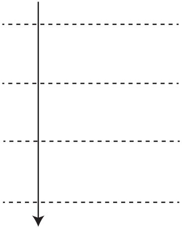
無限個ある色付きジョーンズ多項式を
普遍 sl_2 不変量ひとつで調べられる！！

演習問題 4

演習問題4

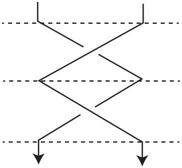
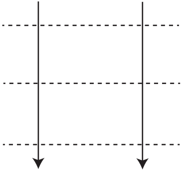
- 上記の定義からジョーンズ多項式の不変性を示せ.
- ジョーンズ多項式の上記の定義とカウフマン括弧による定義が一致することを示せ.
- 三葉結び目のジョーンズ多項式を上記の方法で計算してみよう.

RI での不変性の証明

$F\Bigg($  $\Bigg) = F\Bigg($  $\Bigg)$

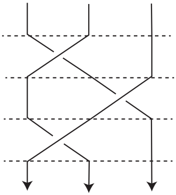
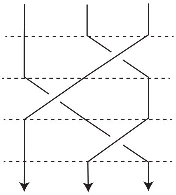
$$(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}^*) \circ (r \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{coev}) = \mathrm{id}_V$$

RII での不変性の証明

$F\Big($  $\Big) = F\Big($  $\Big)$

$$r \circ r^{-1} = \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_V$$

RIII での不変性の証明

$F\Bigg($  $\Bigg) = F\Bigg($  $\Bigg)$

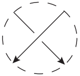
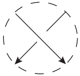
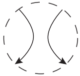
$$(r \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes r) \circ (r \otimes \mathrm{id}_V)$$

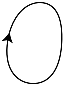
$$= (\mathrm{id}_V \otimes r) \circ (r \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes r)$$

($\Longleftrightarrow$ r は <u>ヤンバクスター方程式</u> の解である.)

ジョーンズ多項式の定義の比較

カウフマン括弧による定義はスケイン関係式を満たす.

$t^{-1}V($  $) - tV($  $) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V($  $),$

$V($  $) = 1.$

従って

$$\begin{cases} t^{-1}r - tr^{-1} = (t^{1/2} - t^{-1/2})(\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_V), \\ \mathrm{ev} \circ \mathrm{coev}^* = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

を確かめれば良い.

4 日間お疲れさまでした