

結び目の数学

鈴木 咲衣

平成 28 年度数学入門公開講座テキスト

目次

1	結び目と絡み目	2
1.1	結び目の和	2
1.2	絡み目の不変量	3
1.3	絡み目の図式	5
2	絡み目の不変量を計算してみよう	6
2.1	図式を用いて結び目の不変量を作る (レシピ)	6
2.2	ジョーンズ多項式	7
2.2.1	三葉結び目のジョーンズ多項式	7
2.2.2	ジョーンズ多項式が不変量であることの確認	8
2.2.3	ジョーンズ多項式を調べてみよう	9
2.3	量子不変量としてのジョーンズ多項式	10

概要

ひもを結ぶと結び目ができます。靴ひもの蝶ちょ結び, 荷造りのひもの堅結び, ひもで綺麗な模様を形作る装飾品など, 結び目は日常生活でもしばしば現れるとても身近な存在です。そんな結び目の研究が近年, 数学の一分野として急速に発展しています。「結び目で数学?何をするの?」と思うかもしれませんが, でも, 数学は自由。数や多項式だけではなく, 結び目でも数学ができます。この講義では, 結び目の数学を基礎からゆっくりお話し, 結び目の不変量であるジョーンズ多項式を計算します。

1 結び目と絡み目

定義 1. 向きを持ついくつかの円周 S^1 を 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 にうめこんだ像のことを 絡み目 という. ただひとつの円周の埋め込みになっている絡み目を特に 結び目 という.

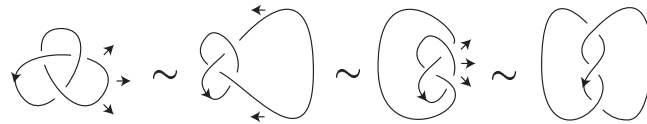


ひもが自己交差しないように連続的に変形して移りあう絡み目は, 互いに イソトピック であるという. 絡み目 L と L' が互いにイソトピックであるとき, $L \sim L'$ と書くことにする.

問い 次の2つの絡み目はイソトピックだろうか?

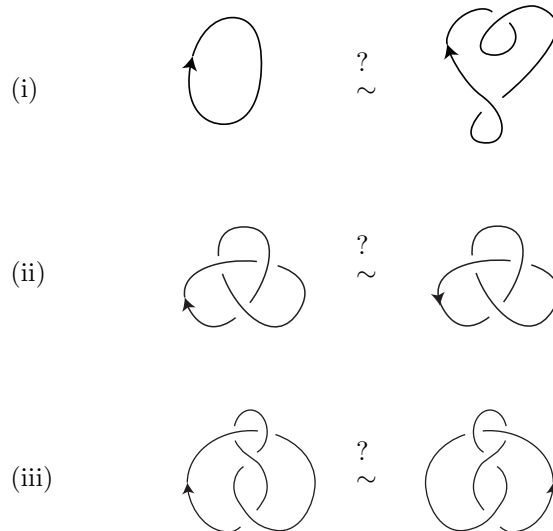


答え イソトピックであり, 次のように変形できる.



演習 1. 思いつく絡み目をたくさん描いてみよう. いくつ描くことができるだろうか?

演習 2. 次の結び目はイソトピックだろうか?



1.1 結び目の和

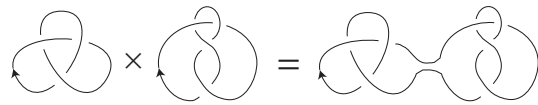
結び目の集合で, イソトピックな結び目を同一視した集合を

$$\mathcal{K} = \{ \text{結び目} \} / \sim$$

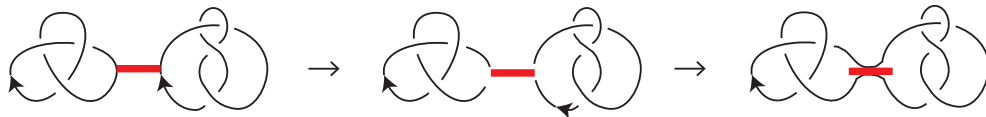
とおく. 結び目の二項演算

$$\mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$$

を以下のように定義し, 結び目の 連結和 と呼ぶ.



もうすこし厳密にいうと, まず結び目どうしを一つの線をつなぐ. そしてその端点で各結び目を切断し, つないだ線に添わせて2つの結び目をつなぐ. このとき, 2つの結び目の向きがうまくつながるようにする.

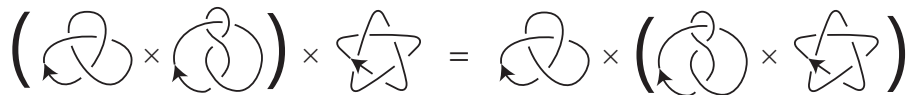


演習 3. 連結和が矛盾なく出来ている (*well-defined*) だろうか. すなわち, 与えられた結び目に対して連結和が一意に定まるだろうか?

この演算は可換であり, 自明な結び目を単位元とした 単位律



と 結合律



が成り立つ.

演習 4. 連結和の単位律と結合律を示せ.

面白い事に, この結び目の連結和に対して素因数分解の定理の類似が成り立つ. すなわち, 「素な結び目」を, それ以上非自明な和として分解できない (自明な結び目と自分自身の和としてしか表せない) 結び目と定義すると, 任意の結び目はいくつかの素な結び目の和として一意的に表される.

1.2 絡み目の不変量

定義 2. 絡み目の不変量 とは, 絡み目全体からなる集合からある集合 I への写像

$$f: \{\text{絡み目}\} \rightarrow I$$

で, 互いにイソトピックな絡み目 L, L' に対して $f(L) = f(L')$ となるようなものをいう.

絡み目 L に対して $s(L)$ をその連結成分の数とすると, 写像

$$s: \{\text{絡み目}\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$$

は絡み目の不変量になる. 例えば

$$s(\text{図}) = 4 .$$

2つの絡み目 L と L' がイソトピックであることを示すには, 変形して移りあうことを確かめればよい. 一方, 2つの絡み目がイソトピックでないということを示すには, そう簡単にはいかない. ある人が頑張って変形して移りあわなくても, どこかの絡み目職人に頼めば移りあってしまうかもしれない. しかし不変量があれば, その値が違えばイソトピックでないということを示すことができる.

$$s(\text{図}) = 4, \quad s(\text{図}) = 3$$

$$\Rightarrow \text{図} \not\sim \text{図}$$

成分数だとあたりまえな例しかないが, 例えば後で紹介するジョーンズ多項式 $V_L(t)$ という不変量に対して, $K_0 = \text{図}$ と $K_1 = \text{図}$ の値は次のようになる.

$$V_{K_0}(t) = 1, \quad V_{K_1}(t) = t + t^3 - t^4$$

ここで $V_{K_0}(t) \neq V_{K_1}(t)$ なので, K_1 はどう頑張ってもほどけない, すなわち, $K_0 \neq K_1$ が示される. 絡み目の集合でイソトピックな絡み目を同一視した集合を

$$\mathcal{L} = \{ \text{絡み目} \} / \sim$$

と書くと, 不変量は写像

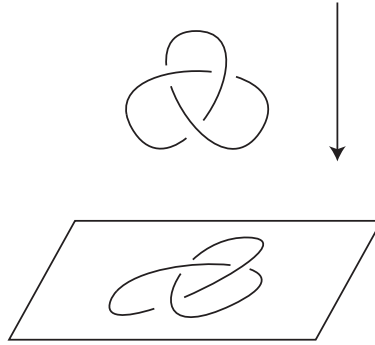
$$\bar{f}: \mathcal{L} \rightarrow I$$

と定義することもできる.

演習 5. 絡み目の不変量を考えて定義してみよう.

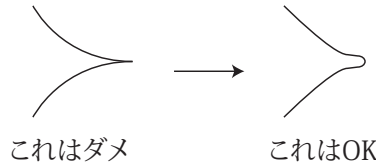
1.3 絡み目の図式

絡み目を平面に射影し, 線が交差しているところに上下の情報をつけたものを絡み目の図式という. この交差点を図式の中の絡み目の交点と呼ぶ.

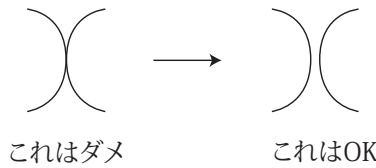


このとき, 射影は以下のようなダメな例 (I),(II),(III) を持たないように調整する.

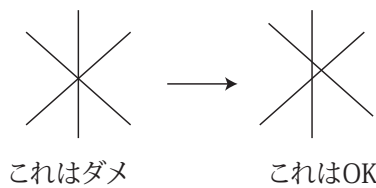
(I) とがった部分.



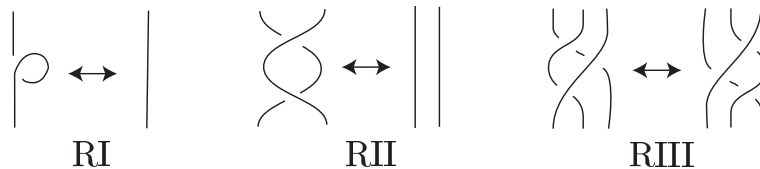
(II) 線と線が接する部分. (2つの点在同一の点に射影される時, それは交差点である.)



(III) 3つ以上の点在同一の点に射影される部分.



絡み目 L, L' がイソトピックな絡み目であることの必要十分条件は, L の図式 D と L' の図式 D' が以下のライデマイスター移動 RI, RII, RIII と図式の連続変形で移り合うことである.



上の図のそれぞれを矢印に沿って連続的に移動させようとする時, 上記の図式のダメな例 (I), (II), (III) が現れてしまう. すなわち, 図式の連続変形ではそれぞれの左図を右図にできない. しかし左図と右図は同じ絡み目を表すのは明らかである. ダメな例 (I), (II), (III) を通らずに左図を右図に離散的に移す操作がライデマイスター移動 RI, RII, RIII である.

絡み目の図式の集合でライデマイスター移動 RI, RII, RIII と図式の連続変形で移り合う図式を同一視した集合を $\{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}}$ と書くと集合 \mathcal{L} は集合 $\{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}}$ と同一視される.

定理 1 (絡み目と図式の関係).

$$\mathcal{L} \xrightarrow{1:1 \text{ 対応}} \{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}}$$

したがって, 絡み目の不変量は写像

$$\bar{f}: \{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}} \rightarrow I$$

として構成することもできる.

演習 6. 次の2つの結び目はイソトピックであった. 従って定理 1 により左の図式は RI, RII, RIII を用いて右に移すことが出来る. その行程を実際に描いてみよう.



2 絡み目の不変量を計算してみよう

2.1 図式を用いて結び目の不変量を作る (レシピ)

絡み目と図式の間を思い出そう.

絡み目と図式の間

$$\mathcal{L} \xrightarrow{1:1 \text{ 対応}} \{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}}$$

すなわち, 絡み目の不変量は写像

$$\bar{f}: \{\text{絡み目の図式}\} / \sim_{\text{RI, RII, RIII}} \rightarrow I$$

として構成できる. 手順は次の2ステップである.

(1) 絡み目図式に対して値を対応させる. すなわち, 写像

$$f: \{\text{絡み目の図式}\} \rightarrow I$$

を作る.

(2) 同じ絡み目を表す図式 D, D' に対して同じ値になることを確認する. 同じ絡み目を表す図式 D, D' はライデマイスター移動で移り合うので,

(2.1) D と D' が RI で移り合うならば $f(D) = f(D')$.

(2.2) D と D' が RII で移り合うならば $f(D) = f(D')$.

(2.3) D と D' が RIII で移り合うならば $f(D) = f(D')$.

を確認すればよい.

2.2 ジョーンズ多項式

(1) カウフマン括弧 $\langle \cdot \rangle: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を以下の性質で定義する.

$$(K1) \langle \text{cross} \rangle = A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle$$

$$(K2) \langle D \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle$$

$$(K3) \langle \bigcirc \rangle = 1$$

(2) カウフマン括弧を補正してジョーンズ多項式

$$V_L(t) = (-A^3)^{-w(L)} \langle D \rangle |_{A^2=t^{-1/2}}$$

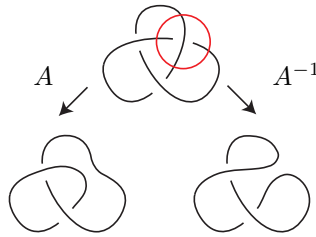
を得る. ただし

$$w(L) = (D \text{ の正交点の数}) - (D \text{ の負交点の数}).$$

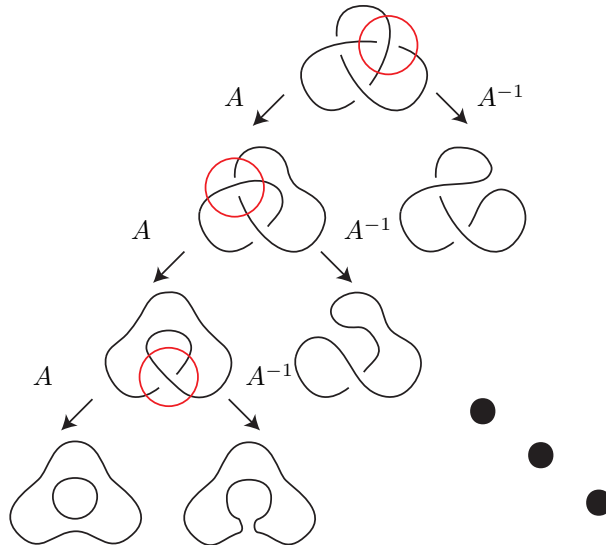
2.2.1 三葉結び目のジョーンズ多項式

三葉結び目のジョーンズ多項式を計算してみよう. 三葉結び目の図式 $D = \text{trefoil}$ に対してカウフマン括弧を計算する.

(1) 3つの交点のうち一つを選び, 性質 (K1) を用いて交点を解消する.



ここでは簡単のため括弧 $\langle \cdot \rangle$ を省略し, 図式がカウフマン括弧の値を表していることにした. このとき解消する矢印の方向に従って係数 A か A^{-1} がかかる. 続けて, 図式に残るすべての交点を順に解消してピラミッド型のダイアグラムを描く. 交点が無くなったところで作業を止める.



ピラミッドの最後に出てきた図に道に沿って A と A^{-1} を掛けた値をすべて足し上げれば, 三葉結び目のカウフマン括弧が得られる.

$$\langle \text{trefoil} \rangle = A^3 \langle \text{disk with hole} \rangle + A \langle \text{disk with hole} \rangle \dots$$

(2) 円周で出来た図のカウフマン括弧を計算しよう。性質 (K2) を用いて, 円周を減らしていく。

$$\langle \text{disk with hole} \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle \text{dashed disk with hole} \rangle$$

(3) 最後に残った一つの円周を性質 (K3) に従って 1 と置く。

$$-(A^2 + A^{-2}) \langle \text{dashed circle} \rangle = -(A^2 + A^{-2})$$

n 個の円周であれば

$$\langle \bigcirc_1 \cdots \bigcirc_n \rangle = (-1)^{n-1} (A^2 + A^{-2})^{n-1}$$

となることに注意しよう。

演習 7. 上記の定義を参考に三葉結び目のジョーンズ多項式の計算を完成させよう。

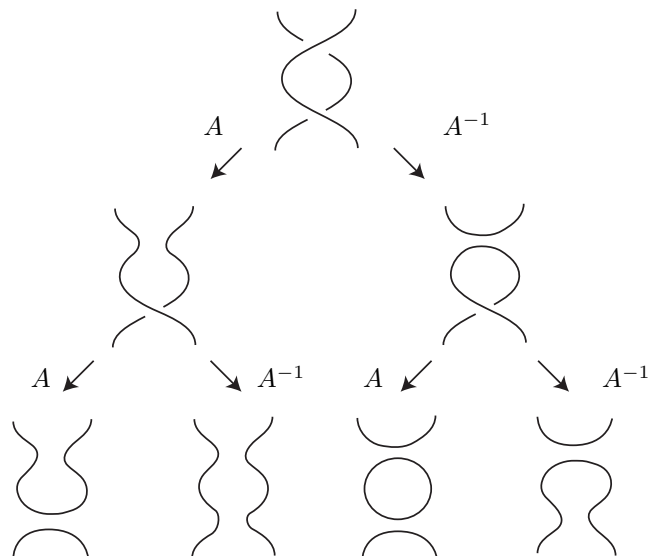
2.2.2 ジョーンズ多項式が不変量であることの確認

前節で図式に対して値を定めた。これで不変量を構成するためのレシピの (1) が終わったことになる。あとはレシピの (2) の不変性の確認をすればジョーンズ多項式が不変量になる。

ここでは RII による不変性を確かめてみよう。

$$\langle \text{crossing} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{cup and cap} \rangle$$

カウフマン括弧の性質 (K1) より左辺は次のようになる。



すなわち

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A^2 \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-2} \langle \text{Diagram 5} \rangle$$

右辺第3項に性質 (K2) を用いると右辺第1,3,4項が打ち消し合い, 第2項のみ残る. これで RII による不変性が示されたことになる.

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A^2 \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle - (A^2 + A^{-2}) \langle \text{Diagram 4} \rangle + A^{-2} \langle \text{Diagram 5} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 6} \rangle$$

演習 8. 上の RII の不変性の証明を参考に, RI, RIII の下での不変性も示してみよう.

2.2.3 ジョーンズ多項式を調べてみよう

演習 9. ある結び目 K のジョーンズ多項式とその鏡像 \bar{K} のジョーンズ多項式にはどんな関係があるだろう.

演習 10. ある結び目 K のジョーンズ多項式と向きを逆にした結び目 \bar{K} のジョーンズ多項式にはどんな関係があるだろう.

演習 11. ある結び目 K と K' の連結和のジョーンズ多項式を K と K' のジョーンズ多項式を用いて表してみよう.

演習 12. 素な結び目のジョーンズ多項式はどんな性質を持つだろうか.

2.3 量子不変量としてのジョーンズ多項式

$L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ を n 成分の絡み目とする. $V = \mathbb{C}^2$ とおき, $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ を V 上の \mathbb{C} 関数のなす空間 (双対空間) とする. V の基底を v_0, v_1 ととる. $t \in \mathbb{C}$ を複素パラメーターとする.

L のジョーンズ多項式を以下で定める.

- (1) 絡み目 L の図式 D を一つ選ぶ. ただし D は, 下に描かれている基本的な図を縦と横につなげて得られる絡み目の図式とする.



- (2) L に含まれる各基本図に対して次のように線形写像を対応させる. 基本図の, 右上から左下に線がつながっている交差と左上から右下に線がつながっている交差にはそれぞれ次の行列 $R, R^{-1}: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ を対応させる.

$$R = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2} - t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t^{-2}(t^{1/2} - t^{3/2}) & t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1/2} \end{pmatrix}$$

ただし $V \otimes V$ の基底を $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$ として行列表示した.

線が左向きの極小, 右向きの極小, 左向きの極大, 右向きの極大にはそれぞれ順に

$$\begin{aligned} \text{ev}: V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{C}, & f \otimes x &\mapsto f(x) \\ \text{ev}^*: V \otimes V^* &\rightarrow \mathbb{C}, & x \otimes f &\mapsto f(h(x)) \\ \text{coev}: \mathbb{C} &\rightarrow V \otimes V^*, & 1 &\mapsto v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1 \\ \text{coev}^*: \mathbb{C} &\rightarrow V^* \otimes V, & 1 &\mapsto v^0 \otimes h^{-1}(v_0) + v^1 \otimes h^{-1}(v_1) = t^{1/2}v^0 \otimes v_0 + t^{-1/2}v^1 \otimes v_1 \end{aligned}$$

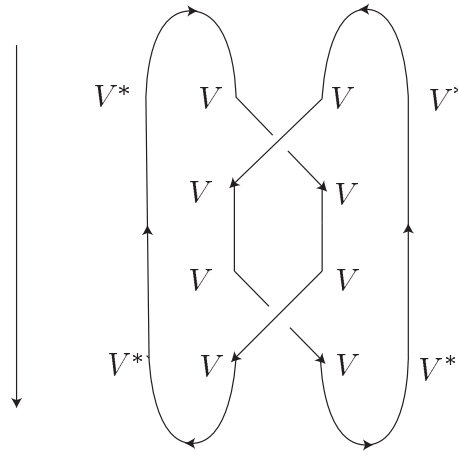
を対応させる. ここで $v^0(av_0 + bv_1) = a, v^1(av_0 + bv_1) = b,$

$$h = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$$

と置いた.

- (3) 基本図 b, b' を横につなげる操作をテンソル積 $f(b) \otimes f(b')$ で, 縦につなげる (b を b' の下に) 操作を合成 $b \circ b'$ と対応させることで \mathbb{C} から \mathbb{C} への線形写像 $\tilde{V}_L(t)$ が定まる.
- (4) $\tilde{V}_L(t)$ を $-(t^{1/2} + t^{-1/2})$ で割って補正したものを $V_L(t)$ と定義し, ジョーンズ多項式と呼ぶ. ジョーンズ多項式図式の取り方によらずに定まる.

例 1. 例えばホップ絡み目 $L = L_1 \cup L_2$ に対して定まる線形写像は次のようになる.



$$\begin{aligned}
 & 1 \xrightarrow{\text{coev}^* \otimes \text{coev}} (t^{1/2}v^0 \otimes v_0 + t^{-1/2}v^1 \otimes v_1) \otimes (v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1) \\
 &= t^{1/2}v^0 \otimes v_0 \otimes v_0 \otimes v^0 + t^{1/2}v^0 \otimes v_0 \otimes v_1 \otimes v^1 + t^{-1/2}v^1 \otimes v_1 \otimes v_0 \otimes v^0 + t^{-1/2}v^1 \otimes v_1 \otimes v_1 \otimes v^1 \\
 &\xrightarrow{\text{id} \otimes R \otimes \text{id}} t^{1/2}v^0 \otimes (t^{1/2}v_0 \otimes v_0) \otimes v^0 + t^{1/2}v^0 \otimes (tv_1 \otimes v_0) \otimes v^1 \\
 &\quad + t^{-1/2}v^1 \otimes (tv_0 \otimes v_1 + (t^{1/2} - t^{3/2})v_1 \otimes v_0) \otimes v^0 + t^{-1/2}v^1 \otimes (t^{1/2}v_1 \otimes v_1) \otimes v^1 \\
 &\xrightarrow{\text{id} \otimes R \otimes \text{id}} t^{1/2}v^0 \otimes t^{1/2}(t^{1/2}v_0 \otimes v_0) \otimes v^0 + t^{1/2}v^0 \otimes t(tv_0 \otimes v_1 + (t^{1/2} - t^{3/2})v_1 \otimes v_0) \otimes v^1 \\
 &\quad + t^{-1/2}v^1 \otimes (t(tv_1 \otimes v_0) + (t^{1/2} - t^{3/2})(tv_0 \otimes v_1 + (t^{1/2} - t^{3/2})v_1 \otimes v_0)) \otimes v^0 + t^{-1/2}v^1 \otimes t^{1/2}(t^{1/2}v_1 \otimes v_1) \otimes v^1 \\
 &= t^{3/2}v^0 \otimes v_0 \otimes v_0 \otimes v^0 + t^{5/2}v^0 \otimes v_0 \otimes v_1 \otimes v^1 + t^{1/2}(t^{1/2} - t^{3/2})v^0 \otimes v_1 \otimes v_0 \otimes v^1 \\
 &\quad + t^{-1/2}(t^2 + (t^{1/2} - t^{3/2})^2)v^1 \otimes v_1 \otimes v_0 \otimes v^0 + t^{-1/2}t(t^{1/2} - t^{3/2})v^1 \otimes v_0 \otimes v_1 \otimes v^0 + t^{1/2}v^1 \otimes v_1 \otimes v_1 \otimes v^1 \\
 &\xrightarrow{\text{ev} \otimes \text{ev}^*} t^{3/2}t^{-1/2} + t^{5/2}t^{1/2} + t^{-1/2}(t^2 + (t^{1/2} - t^{3/2})^2)t^{-1/2} + t^{1/2}t^{1/2} \\
 &= 1 + t + t^2 + t^3 \\
 &\xrightarrow{-1/(t^{1/2} + t^{-1/2})} t^{1/2} + t^{5/2}
 \end{aligned}$$

演習 13. 三葉結び目のジョーンズ多項式を上記の方法で計算してみよう.

演習 14. 上記の定義からジョーンズ多項式の不変性を示せ.

演習 15. ジョーンズ多項式の上記の定義とカウフマン括弧による定義が一致することを示せ.

参考文献

- [1] 村上斉, 結び目の話, 遊星社.
- [2] 村上順, 結び目と量子群, 朝倉書店.
- [3] 大槻知忠, 量子不変量, 日本評論社.
- [4] T. Ohtsuki, Quantum invariants. A study of knots, 3-manifolds, and their sets, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.
- [5] W.B.R. リコリッシュ, 結び目理論概説, Springer.

結び目理論参考書リスト

鈴木 咲衣

平成28年8月4日

以下 <http://home.hiroshima-u.ac.jp/teragai/knot.html> より抜粋.

啓蒙書, 読み物風

- 「結び目のはなし」, 村上斉 (著), 遊星社, 1990 年
- 「曲面と3次元多様体を視る」, J. ウィークス (著), 三村護, 入江晴栄 (訳), 現代数学社, 1996 年
- 「ポアンカレ予想物語」, 本間龍雄 (著), 日本評論社, 1985 年
- 「ポアンカレの贈り物」, 南みや子, 永瀬輝男 (著), 講談社, 2001 年
- 「組みひもの数理」, 河野俊丈 (著), 遊星社, 1993 年
- 「このひものは結ばれているか」, L. ニューワース (著), 本間龍雄 (訳), 日経サイエンス社, 1984 年
- 「トポロジカル宇宙」, 根上生也 (著), 日本評論社, 1993 年
- 「組み紐の幾何学」, 村杉邦男 (著), 講談社, 1982 年
- 「トポロジーの発想」, 川久保勝夫 (著), 講談社, 1995 年
- 「不変量とは何か」, 今井淳, 寺尾宏明, 中村博昭 (著), サイエンス社, 講談社, 2002 年 11 月
- 「高校生に贈る数学ライブ」, 数学セミナー編集部 (編), 日本評論社, 2002 年 2 月
- 「ネクタイの数学」, トマス・フィンク, ヨン・マオ (著), 青木薫 (訳), 新潮 OH!文庫, 2001 年 5 月
- 「数理科学」(特集: コンピュータとトポロジー), サイエンス社, 1984 年 10 月号
- 「数理科学」(特集: 結び目・絡み目), サイエンス社, 1990 年 12 月号
- 「数理科学」(特集: 低次元多様体), サイエンス社, 1993 年 3 月号
- 「数理科学」(特集: 物理と数学をつなぐ結び目理論), サイエンス社, 1997 年 12 月号
- 「数理科学」(特集: トポロジーの新世紀), サイエンス社, 2003 年 6 月号
- 「数理科学」(特集: 数学と物理に広がる不変量), サイエンス社, 2009 年 10 月号
- 別冊「数理科学」(特集: 多様体の広がり), サイエンス社, 2008 年 4 月号
- 臨時別冊「数理科学」(特集: 3次元トポロジーの新展開), 戸田正人 (著), サイエンス社, 2007 年 7 月号
- 「数学の楽しみ」(フォーラム: 結び目の不思議), 日本評論社, 1998 年 2 月号
- 「数学の楽しみ」(フォーラム: 4次元をのぞく), 日本評論社, 1997 年 10 月号

専門書

量子トポロジー

- 「量子不変量」, 大槻知忠 (編著), 日本評論社, 1999 年
- 「結び目の不変量」, 大槻知忠 (著), 共立出版, 2015 年
- 「結び目と量子群」, 村上順 (著), 朝倉書店, 2000 年
- 「反復積分の幾何学」, 河野俊丈 (著), シュプリンガー・ジャパン, 2009 年

結び目理論入門

- 「結び目理論概説」, W.B.R. リコリッシュ (著), 秋吉 宏尚, 塩見 真枝, 下川 航也, 高向 崇, 田中 利史, 平澤 美可三, 松本 三郎, 丸本 嘉彦, 村上斉 (翻訳), シュプリンガー・ジャパン, 2000 年
- 「結び目の理論」, 河内明夫 (著), 共立出版, 2015 年

「レクチャー結び目理論」, 河内明夫(著), 共立出版, 2007年

「結び目理論とゲーム-領域選択ゲームでみる数学の世界-」, 河内 明夫, 岸本 健吾, 清水理佳子(著), 朝倉書店, 2013年

「結び目理論入門」, R.H. クロウエル, R.H. フォックス(著), 寺阪 英孝(翻訳), 岩波書店, 1967年

「ねじれ Alexander 不変量」, 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之(著), 日本数学会メモアール第5巻, 2006年

「結び目の数学」, C.C. アダムス(著), 金信泰造(訳), 培風館, 1998年

「曲面・結び目・多様体のトポロジー」, S.C. カールソン(著), 金信泰造(訳), 培風館, 2003年

「結び目理論とその応用」, 村杉邦男(著), 日本評論社, 1993年

「結び目理論」, 河内明夫(編著), シュプリンガー・ジャパン, 1990年

「結び目理論入門」, 鈴木晋一(著), サイエンス社, 1991年

「曲面と結び目のトポロジー」, 小林一章(著), 朝倉書店, 1992年

結び目とその周辺

「結び目の数学と物理」, L.H. カウフマン(著), 河内明夫・鈴木晋一(監訳), 培風館, 1995年

「コンピュータによる結び目理論入門」, 落合豊行, 山田修司, 豊田英美子(著), 牧野書店, 1996年

「結び目と統計力学」, 和達三樹(著), 岩波書店, 2002年

結び目と数論の類似の話

「結び目と素数」, 森下昌紀(著), シュプリンガー・ジャパン, 2009年

多様体・位相幾何学

「3次元多様体入門」, 森元勘治(著), 培風館, 1996年

「モザイクと3次元多様体」, J.M. モンテシノス(著), 前田亨(訳), シュプリンガー・ジャパン, 1992年

「組合せ位相幾何学」, 本間龍雄(著), 共立全書, 1980年

「位相幾何学入門」, 樹下眞一(著), 培風館, 2000年

「多角形の現代幾何学」, 小島定吉(著), 牧野書店, 1999年

「線形代数からホモロジーへ」, 河内明夫(著), 培風館, 2000年

トポロジー入門

「トポロジー入門」, 小島定吉(著), 共立出版, 1998年

「3次元の幾何学」, 小島定吉(著), 朝倉書店, 2002年10月

「3次元幾何学とトポロジー」, W. サーストン(著), 小島定吉(監訳), 培風館, 1999年

「トポロジー」, 杉原厚吉(著), 朝倉書店, 2001年9月

「トポロジー入門」, クゼ・コスニオフスキー(著), 加藤十吉(編訳), 東京大学出版会, 1983年

「曲面の線形トポロジー」(上下2巻), 鈴木晋一(著), 槇書店, 1986年

「4次元のトポロジー」, 松本幸夫(著), 日本評論社, 1979年

ウェブページ

参考書のページ: <http://home.hiroshima-u.ac.jp/teragai/knot.html>

結び目不変量のコンピューター計算のページ: <http://www.indiana.edu/~knotinfo/>

結び目の表のページ: http://katlas.org/wiki/Main_Page