数学入門公開講座

平成3年8月6日（火）から8月15日（木）まで

京都大学数理解析研究所

平成3年度(第13回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，平成3年8月6日～8月9日開催)

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 整数論・最近の話題（7時間）
京都大学数理解析研究所・教授　伊　原　康　隆

整数論には「フェルマの問題」のように具体的だが人工的な問題が（小石のように）沢山ある一方、はるかに抽象的ではあるが自然な対象も（森、山、雲のように）沢山あります。小石を調べるには岩、山を調べなくてはならないでしょう。具体例をもとに、小石と山の「かかわり」、又研究者の脚力、視力、「登山意慾」といったものについても触れてみたいと思います。

2. パソコンでできる偏微分方程式の数値解法（7時間）
京都大学数理解析研究所・助手　磯　　祐　介

2次元・3次元の微分方程式の問題をパソコンで数値計算することは、メモリーの制限もあって困難な場合が多い。ところが、計算力学の分野で近年よく用いられる〝境界要素法〟は、微分方程式の境界値問題を境界上の関係式に帰着させて数値計算するため、メモリーの節約を図ることができる。

今回は、この境界要素法の解説を行ない、併せて数値解析の理論にも触れる。

3. ナビエ・ストークス流の話（7時間）
京都大学数理解析研究所・助教授　木　田　重　雄

台風や竜巻など何か特別なことが起こらない限りあまり気にならないが、我々をとりまく大気や海洋・河川においては、水や空気がいろいろな形の渦を巻きながら複雑な運動をしている。このような流れを記述するナビエ・ストークス方程式の解の特徴的な振舞を紹介する。

4. 数学とコンピュータ教育（7時間）
京都大学数理解析研究所・助教授　萩　谷　昌　已

数学者のようなコンピュータの専門家でない人に対するコンピュータ教育について、数学教育と関連させながら考える。

時　間　割

時間＼日	8月6日（火）	7日（水）	8日（木）	9日（金）	10日（土） 11日（日）	12日（月）	13日（火）	14日（水）	15日（木）
13:15～15:00	伊原	伊原	伊原	伊原	休	木田	木田	木田	木田
15:00～15:15	休憩					休憩			
15:15～17:00	磯	磯	磯	磯	講	萩谷	萩谷	萩谷	萩谷

2.　パソコンでできる偏微分方程式の数値解法（7時間）

京都大学数理解析研究所・助手　磯　　祐介

1991, AUGUST 6,7,8,9　　　15:15-17:00

パソコンでできる偏微分方程式の数値計算

京都大学数理解析研究所

磯　祐介

はじめに

現代の科学では“現象”を理解するためにまずモデル化を行い、そのモデルを解析するという方法がよくとられている。様々なモデル化の中で、微分方程式を利用した数理モデルは幅広い分野で採用され、数多くの成功を納めている。これらの微分方程式の中には与えられたデータと解の関係（存在や一意性）が未解決で、それ自身が数学の研究テーマになっているものもあるが、解の定性的な振る舞いを含めて解の数学的構造がよくわかっているものも多い。ひとむかし前なら数学的な構造さえわかればそれで十分と考えるむきもあったが、今やこれだけでは満足できない人も多い。

飛行機やロケット、高層ビル、原子炉といったものを設計する場合、以前は実験を重ねてそのデータをもとに設計をしていた。しかし、現在では数理モデルの微分方程式をコンピュータで取り扱える場合は、コンピュータシミュレーションで実験の代用をさせることが多い。この種の設計の場合には、数理モデルの定性的な把握では満足できず、近似的にでもよいから設計に必要な物理量を定量的に把握することが求められる。数値計算がかつての実験にとって代わった背景には、数値計算の方が実験よりも安上がりというコスト面の要請もあるが、数値計算に対する研究が進み、コンピュータによる近似解法に対する信用が増したことによると思われる。

微分方程式の数値解法としては、万能選手の差分法があり研究もよく進んでいる。しかし、偏微分方程式の境界値問題を取り扱う場合、求めるべき未知数が多くメモリーの関係もあり、大型コンピュータに頼らざるを得ない。有限要素法についても事情は似ている。最近よく使われるようになった境界要素法は、適用範囲が限られているものの偏微分方程式の境界値問題を境界上だけで近似するため、未知数の個数が少なくて済むというメリットがある。計算時間を気にしなければ、かなり大がかりな問題もパソコン程度の計算機で済ませることも出来る。今回は、この境界要素法（BEM）を採り上げ、解説を試みる。

〈資料〉

磯　祐介　“境界要素法の数理”　（数学　No.41, vol.2, pp16-29, 1989）

登坂宣好　“境界要素法の数理 — 積分方程式の数値解法”
（数理科学　No.234, pp10-16, 1982）

境 界 要 素 法 の 数 理

磯　祐　介

数値計算の諸分野において‘境界要素法(boundary element method＝BEM)’という単語が登場するようになってから，5年ぐらいの歳月が経ったと思う．偏微分方程式の境界値問題に対する数値解法の一つとして，計算力学や工学においては，この方法も既に市民権を得たようである．しかし，差分法(finite difference method＝FDM)や有限要素法(finite element method＝FEM)に比べると，数学(純粋数学)者にとっては遥かに馴染みが薄い．これは，この方法の歴史が浅いという単純な理由のみからではなく，この方法の数学的基礎付けが遅れているために，数学者の興味を引きにくいのではなかろうか．今回は，境界要素法の中でも最も単純な2つの例—ラプラス方程式の境界値問題と熱方程式の初期値・境界値混合問題を取り上げ，この方法に対する数学理論を説明したいと思う．

§1. はじめに

ポテンシャル・拡散・振動を始め多くの物理現象は，偏微分方程式の境界値問題の形で記述されている．工学の諸分野においては，これらの問題の解を近似的で良いから具体的に求めることが必要となる．この目的のために，古くから数多の数学者・物理学者・工学者達によって様々な近似解法が考案されてきた．特に電子計算機(コンピューター)の出現以来，この努力は，能率の良い数値解法の開発・研究として強力に推し進められてきた．

差分法は，微分作用素を差分作用素で置き換えることで微分方程式を離散化するものである．原始的なアイデアにみえるが汎用性も高く，線型・非線型を問わず偏微分方程式の数値計算においては強力な威力を発揮する．有限要素法は，微分方程式を変分問題の形で捉え直し，その変分問題を有限要素空間を用いて離散化するものである．つまり，設定した函数空間の有限次元近似空間を作ることによって変分問題を離散化するのである．(例えば，Ciarlet[5], Raviard-Thomas[21]参照.) この方法は領域の形状についての自由度が高い反面，方程式の型による向き・不向きがあり，差分法に比べると汎用性はやや落ちる．ただ，線型問題に対しては離散化によって現われる連立方程式は，両者の方法とも疎大行列(sparse matrix)で与えられる場合が多く，数値計算の実行の上では共通点も多い．更に，これらの疎大行列を効率よく解くことは実用上は極めて重要な課題であり，大型線型方程式系に対する様々な理論と工夫が必要である．(例えば，Ciarlet[6]参照.)

境界要素法は，多くの点で差分法・有限要素法と趣を異にし，理論面でも実用面でも共通点が少ない．線型偏微分方程式の境界値問題は，適当な方法で境界上の積分方程式(特異積分方程式)に帰着することができる．数学解析では，偏微分方程式の境界値問題の研究において，この境界上で定義される特異積分方程式を利用してきた．単層・二重層のポテンシャルを用いたラプラス方程式の境界値問題へのアプローチは，最も典型的な例である．境界要素法は，この境界上の積分方程式を離散化することによって，境界値問題の近似解を構成しようとする方法である．うまく境界上の積

分方程式に転換できないような問題に対しては有効ではないという点で，汎用性には大きく欠ける．しかし，限られた問題に対しては容易に精度の高い数値解を与える．また，離散化によって現われる連立方程式は，線型問題の場合にも疎行列にならないが，その行列の大きさは，差分法・有限要素法のそれに比べると，遥かに小さい．

数値計算の歴史の中では，境界要素法はかつて‘**境界積分方程式法**(boundary integral equation method)’と呼ばれていた．工学方面においては，Jaswon[10]，Symm[22]，Rizzo[19]らによって，ポテンシャル問題や弾性問題の近似計算に用いられていた．1978年，C. A. Brebbiaはこの方法を‘境界要素法’と呼んでテキスト[3]を著わした．有限要素法がもて囃されていたこととも相まって，多くの工学者の目がこの名前に向けられ，人口に膾炙されるに至った．(この辺の事情は，小林[13]，Rizzo[20]に詳しく記されている．) 数値解法としての境界要素法が急速に広まった反面，この方法に対する数学的基礎付けは余り進まなかった．それは，境界要素法が(特異)積分方程式の離散化であり，その方面の数値解析の研究が遅れていたことが主な原因であろう．更に，Brebbia[3]，Brebbia-Walker[4]といったテキストは境界要素法のアルゴリズムの紹介という面では多大な功績を果したが，境界要素法を‘重み付残差法(weighted residual method)’と誤った位置づけをしたために，これらのテキストが数学者にとっては受け入れにくかったのではないかと思われる．

境界要素法の数学的基礎付けは，W. L. Wendland[23]，D. Arnold-Wendland[1]，Bamberger-Ha Duong[2]，岡本[16]，大西[18]，筆者[8]，[9]の研究がある．以下では，ラプラス方程式(楕円型)，熱方程式(放物型)を取り上げて，境界積分方程式の性質，アルゴリズムの構成，収束定理など境界要素法の数学的基礎理論を紹介する．音響や地震の問題と関わって双曲型方程式に対する研究もあるが，筆者の不勉強のために割愛させて頂く．また，境界要素法に似た方法として‘**代用電荷法**(charge simulation method)’が挙げられることが多いが，筆者の理解としては，この両者は全く異なった方法である．今回は代用電荷法の研究としては，桂田-岡本[11]を挙げるに留める．代用電荷法の数学的基礎付けは，境界要素法のそれよりも遥かに難かしく，今後の研究が待たれる分野である．

§2. ラプラス方程式に対する境界積分方程式

Ωをn次元ユークリッド空間E^nの有界領域とし，その境界$\Gamma=\partial\Omega$は滑らかであるとする．ここで次の2つの境界値問題$(\mathrm{P_D})$と$(\mathrm{P_N})$を考える．

$$(\mathrm{P_D})\begin{cases} \Delta u=0 & x\in\Omega & (2.1)\\ u=f_D & x\in\Gamma & (2.2)\end{cases}$$

$$(\mathrm{P_N})\begin{cases} \Delta u=0 & x\in\Omega & (2.1)\\ \dfrac{\partial}{\partial n}u=f_N & x\in\Gamma & (2.3)\end{cases}$$

但し，$\partial/\partial n$はΓ上での外向き法線微分を表わし，ΔはLaplacianを表わすものとする．境界値$f_D(x)$，$f_N(x)$はC^2級の滑らかさを仮定し，更に$\int_\Gamma f_N(x)d\sigma_x=0$を満足するものとする．このとき，$(\mathrm{P_D})$，$(\mathrm{P_N})$はそれぞれ$C^2(\bar{\Omega})$，$C^2(\bar{\Omega})/\{\mathrm{const.}\}$で一意的な解をもつ．

これらの問題をラプラス方程式の基本解(fundamental solution)$g(x,y)$を用いて境界上の積分表示の形に転換する．よく知られたように，基本解は次の形で与えられる．

$$g(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| & (n=2)\\[2mm] \dfrac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\cdot\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}} & (n\geq 3).\end{cases}$$

ただし，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ とするとき，$|x|=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}$，$\omega_{n-1}=\int_{|x|=1}d\sigma=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ とする．($\Gamma(n/2)$ は Γ 函数の値である．) 実用上大切であるのは $n=3$ の場合で，この場合は $\omega_2=4\pi$ である．$u(x)$ が (P_D) あるいは (P_N) の解であるとき，$g(x,y)$ を掛けて Ω で積分をすることによって

$$u(x)=-\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}g(x,y)u(y)d\sigma_y+\int_\Gamma g(x,y)\frac{\partial}{\partial n}u(y)d\sigma_y,\qquad x\in\dot{\Omega}\tag{2.4}$$

という関係を得る．これは，Dirichlet data と Neumann data の両方を利用すれば，求めるべき解を境界上の積分によって表示できることを示している．しかし，楕円型境界値問題としては，これら両方の境界 data を与えることは不可能であるから，何等かの方法によって必要な境界値を求めなければならない．具体的には，(P_D) に対しては Neumann data を，(P_N) に対しては Dirichlet data を求めることが要求される．このために，(2.4) で領域内の点 x を境界上の点 z に近づける極限をとり，式を整理すると次式を得る．

$$\frac{1}{2}u(z)+\mathrm{p.v.}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}g(z,y)u(y)d\sigma_y=\int_\Gamma g(z,y)\frac{\partial}{\partial n}u(y)d\sigma_y.\tag{2.5}$$

ここで p.v. は Cauchy の意味での積分の主値を表わす．ただ，積分核 $\dfrac{\partial}{\partial n_y}g(z,y)$ の特異性は弱く，適当な修正によって Γ 上の連続函数と見なすことが可能であるから，以後は p.v. は省略して，連続核の積分と見ることにする．(2.2), (2.3) を (2.5) に代入すると，(P_D) の場合は

$$\int_\Gamma g(z,y)q(y)d\sigma_y=\frac{1}{2}f_D(z)+\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}g(z,y)f_D(y)d\sigma_y\tag{2.6}$$

を未知函数 q に対する積分方程式と考え，(P_D) の Neumann data に相当する q を求めることになる．全く同様に (P_N) の場合は

$$\frac{1}{2}u(z)+\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}g(z,y)u(y)d\sigma_y=\int_\Gamma g(z,y)f_N(y)d\sigma_y\tag{2.7}$$

を未知函数 u に対する積分方程式と考えて，(P_N) の Dirichlet data に相当する u を求めることになる．境界要素法では，これら境界 Γ 上の積分方程式を‘**境界積分方程式**(boundary integral equation)’と呼び，これらの離散化によって数値解を求めるのである．即ち，境界積分方程式の離散化を通して得られた近似的境界値と初めに与えられた境界値を用いて，求めるべき点 x での解の近似値を (2.4) によって構成する．従って，以後は境界積分方程式の数値解法に絞って話を進めていく．さて (2.6), (2.7) は (P_D) 及び (P_N) に対する必要条件として導いたのであるから，これらの境界積分方程式の解の存在は自明と考えて良い．今の場合は，(2.4) を媒介として適当な設定の下で逆も辿れる．しかし，一般に境界条件に特異性のあるような問題では，境界積分方程式を解くことと元の境界値問題を解くことが古典的な意味で同値でない場合もあり，注意を要する．

Wendland[23] は境界積分方程式を擬微分方程式として取り扱うことで近似理論を展開した．岡本[16] は (2.6) の楕円性に関して，次の結果を証明した．函数空間 X_n を次のように設定する．

$$X_n=\begin{cases}\left\{q\in L^2(\Gamma);\ \int_\Gamma q(y)d\sigma=0\right\} & \Omega\subset E^n\quad (n=2)\\[2mm] L^2(\Gamma) & \Omega\subset E^n\quad (n\geq 3).\end{cases}$$

そして X_n 上で次の双一次形式 $a(q,r)$ を定義する．

$$a(q,r)=\int_\Gamma\int_\Gamma g(z,y)q(y)r(z)d\sigma_y d\sigma_z, \qquad q,r\in X_n \tag{2.8}$$

定理1. Γ には依存するが q には依存しない正の定数 C が存在して，

$$a(q,q)\geq C\|q\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \qquad q\in X_n \tag{2.9}$$

が成立する．‖

この結論自体は，Nedelec-Planchard[15]及び Le Roux[14]に見られる．彼らは内部問題と外部問題を同時に考え，この2つの問題の解の境界値の飛びの量からこの結果を導くという古典的な手法を用いて示した．彼らの目的は有限要素法であり，内部・外部問題の解を利用するのは当然であるが，境界要素法の立場から見ると，せっかく境界上だけの積分関係に帰着させながら，その本質を使っていないように見える．岡本は，まず

$$\delta_q;\ \phi\longrightarrow\int_\Gamma q(y)\phi(y)d\sigma_y \qquad \phi\in\mathcal{D}$$

によって定義される compact support をもつ distribution δ_q を定義し，Fourier 変換を利用して

$$a(q,q)=\int_{R^n}\frac{1}{|\xi|^2}|\hat{\delta}_q(\xi)|^2d\xi$$

を示し，これによって定理を証明した．この方法は，境界積分方程式を境界上のみで片付けるという点で明快であり，今後の境界要素法の研究における1つの手法を与えたものと言える．あとは，うまく有限要素空間を設定すれば，(2.6)の弱い定式化に相当する双一次形式(2.8)を離散化することができる．更に，(2.9)により離散化された問題の解の一意存在や数値解の収束等の数学的議論が，有限要素法の数学理論を援用することによって可能となる．

この方針で，全ての問題が解決したように見えるが，実用面を考えると必ずしもそうは言えない．ここが，数値解析のもつ二面性である．**他の純粋数学の諸問題の解決と違って，(数学としての)数値解析では厳密(rigorous)であることと，実用的(practical)であることの両方を考慮せねばならない．**数学としての数値解析の研究において，過度に実用面を強調する必要はないが，できるだけ現実に運用されている数値計算アルゴリズムに近い形で理論を作ることが望ましい．(2.8)を有限要素空間を用いて離散化する方法は，数値積分による手間が多いために，実際には余り使われない．多くの工学者は，'**選点法**(collocation method)'を利用して(2.6), (2.7)を直接的に離散化している．更に(2.6), (2.7)には曲線 Γ 上の積分が含まれているが，これは，Γ を近似する多面体(多角形)上での積分で近似される場合が殆んどである．選点法の場合の数学理論としては，Arnold-Wendland[1]が挙げられるが，境界を近似することは考慮に入れられていない．境界の近似まで含めた選点法の一様収束評価が，(2.7)に対しては1988年に筆者によってなされた．次のセクションではこの評価の説明をする．

§3. 選点法による境界要素解の一様収束

ここでは，(2.7)―ノイマン問題(P_N)に対する境界積分方程式―の選点法による離散化について述べる．このセクションでは Ω は E^2 の有界領域とし，Γ は C^3 級の滑らかさで，その曲率は正であるとする．(Ω は強い意味で凸領域になっている．) 問題の性格上境界積分方程式(2.7)は定数の自由度をもつので，次の連立積分方程式を解くべき境界積分方程式とする．

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}u(z)+\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} g(z,y)u(y)d\sigma_y = \int_\Gamma g(z,y)f_N(y)d\sigma_y & (3.1) \\ \displaystyle\int_\Gamma u(y)d\sigma_y = 0 & (3.2) \end{cases}$$

この(3.1), (3.2)を満足する連続函数 u を数値的に解くアルゴリズムを与え，このアルゴリズムの有効性とスキームの収束性を数学的に保証することがここでの目的である．

便宜上，幾つかの記号を準備する．Γ 上の点 z における単位外向き法線ベクトルを $\vec{n}_z$ と表わす．これを用いれば,

$$\frac{\partial}{\partial n_y} g(z,y) = \nabla_y g(z,y)\cdot\vec{n}_y$$

と表わされるが，ここで $\nabla_y g(z,y)=G(z,y)$ によってベクトル値函数 $G(z,y)$ を定義しておく．更に，$C^0(\Gamma)$ を定義域とする作用素 K を

$$Ku = \frac{1}{2}u+\int_\Gamma G(z,y)\cdot\vec{n}_y u(y)d\sigma_y, \qquad u\in C^0(\Gamma)$$

によって定義し，函数 $r(z)$ を

$$r(z) = \int_\Gamma g(z,y)f_N(y)d\sigma_y \qquad (z\in\Gamma)$$

と定義すると，方程式(3.1)は簡単に $Ku=r$ と書くことができる．また，E^n のベクトル $\vec{p}=(p_1,\cdots,p_n)^T$ に対して，norm $\|\ \|_2$ と $\|\ \|_\infty$ を $\|\vec{p}\|_2=(p_1^2+\cdots+p_n^2)^{1/2}$, $\|\vec{p}\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|p_k|$ と定め，$C^0(\Gamma)$ に導入される sup norm を $\|\ \|_\infty$ と表わすことにする．

Γ 上に N 個の節点 $\{z_k\}_{k=1,2,\cdots,N}$ を時計まわりに等間隔にとり，‘分割巾’ h を $h=\frac{1}{N}|\Gamma|$ とする．Γ 上の2点 z_k, z_{k+1} によって切り取られる劣弧を Γ_k と表わし，‘境界要素(boundary element)’と呼ぶ．次に $C^0(\Gamma)$ を近似する有限次元空間を構成するために，次の仮定 A を満足する函数の組 $\{\psi_k\}_{k=1,\cdots,N}$ をとる．

仮定 A. (i)　$\psi_k\in C^0(\Gamma)$, $\psi_k(z_j)=\delta_{j,k}$　$(1\le j,k\le N)$.

(ii)　$\mathrm{supp}\,\psi_k=\overline{\Gamma_{k-1}\cup\Gamma_k}$ $(1\le k\le N)$, ただし $\Gamma_0=\Gamma_N$ とする．

(iii)　$\psi_k|_{\Gamma_j}\in C^2(\Gamma_j)$　$(1\le j,k\le N)$.

(iv)　$\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_N=1$.

(v)　$\int_\Gamma\psi_j(y)d\sigma_y=\int_\Gamma\psi_k(y)d\sigma_y$　$(1\le j,k\le N)$.

Γ が1次元の曲線であることからこのような函数の組は容易に構成することができる．ここで $\{\psi_k\}$ を基底函数として，有限次元函数空間 V_h を

$$V_h = \text{linear span of } \{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_N\}$$

によって定める．次に作用素 P_h を

$$\begin{array}{cccc} P_h: & C^0(\Gamma) & \longrightarrow & V_h \\ & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ & f(z) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\le k\le N} f(z_k)\psi_k \end{array} \qquad (3.3)$$

と定義する．これは Γ 上の連続函数を適当に選ばれた有限個の点での値によって近似する方法で，P_h を **collocation operator**(‘選点的離散化作用素’とでも言うべきであろうか?)と呼ぶにとにする．この離散化の方法は L^2 の正射影などとは違い，積分計算を必要としない．このため数値計算の手間が少なく実用的方法として多くの数値計算で重宝されている．しかし，函数を各点的に捉えるた

めに函数解析的アプローチが難しく，解析が煩雑になるという難点がある．この P_h に関して，次の補題が容易に得られる．

補題1. $u\in C^2(\Gamma)$ のとき，u にのみ依存し，h に依存しない正定数 C が存在して，$\|P_h u-u\|_\infty\leq Ch^2$ を満たす．∎

求める数値解を

$$u_h=\sum_{1\leq k\leq N}u_h^k\phi_k \tag{3.4}$$

と表わし，選点法による(3.1)の離散化を

$$(P_hK)u=P_hr \tag{3.5}$$

と与える．求めるべき(3.4)の u_h を用いて表わすと

$$\frac{1}{2}u_h(z_j)+\int_\Gamma G(z_j,y)\cdot\vec{n}_y u_h(y)d\sigma_y=\int_\Gamma g(z_j,y)f_N(y)d\sigma_y,\qquad 1\leq j\leq N$$

となる．(厳密には後述する．) 成分ごとに見ると

$$\frac{1}{2}u_h^j+\sum_{k=1}^N u_h^k\int_\Gamma G(z_j,y)\cdot\vec{n}_y\phi_k(y)d\sigma_y=r(z_j),\qquad 1\leq j\leq N,$$

となる．また(3.2)は仮定A-(v)を考慮すると

$$u_h^1+u_h^2+\cdots+u_h^N=0 \tag{3.6}$$

となる．つまり $a_{j,k}$ を

$$a_{j,k}=\frac{1}{2}\delta_{j,k}+\int_\Gamma G(z_j,y)\cdot\vec{n}_y\phi_k(y)d\sigma_y,\qquad 1\leq j,k\leq N \tag{3.7}$$

によって定め，行列 $K_h=(a_{j,k})$ とおくと，解くべき離散化境界積分方程式は，次の線型方程式系で与えられそうである．

$$\begin{cases}K_hu_h=r_h'\\ u_h^1+\cdots+u_h^N=0\end{cases}$$

ただし，$u_h=(u_h^1,\cdots,u_h^N)^T$，$r_h'=(r(z_1),\cdots,r(z_N))^T$ である．‘与えられそうだ’という曖昧な表現をしたには事情がある．まず次の補題を準備する．

補題2. $a_{j,k}$ を(3.7)によって定義すると，各々は次の評価を受ける．

(i) $-C_1h\leq a_{j,k}\leq -C_2h$, $(1\leq j,k\leq N,\ \ j\neq k)$

(ii) $C_3\leq a_{j,j}\leq C_4$, $(1\leq j\leq N)$

(iii) $\sum_{1\leq k\leq N}a_{j,k}=0$

ただし，C_1,C_2,C_3,C_4 は h には依存しない正定数であり，$C_3\fallingdotseq C_4\fallingdotseq 1/2$ である．∎

この補題の証明であるが，積分核の連続性と領域の凸性から(i), (ii)を得る．また作用素 K の固有値0に対する固有函数が定数であることと，仮定A-(iv)から(iii)を得る．(作用素 K の性質については，Kellogg[12]を参照せよ．) この補題より，rank$(K_h)\leq N-1$ であり，K_h の第一小行列 $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq N-1\\1\leq j\leq N-1}}$ が優対角行列であることから次の補題を得る．

補題3. rank$(K_h)=N-1$ ∎

つまり，選点的に(3.5)で与えた $r_h'=P_hr$ は $r_h'\in R(K_h)$ であるか否かが速断できない．そこで $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_N)^T$ を $K_h^T\mu=0$, $\mu\neq 0$ によって定め，$r_N=-(1/\mu_N)\sum_{1\leq k\leq N-1}\mu_kr(z_k)$ と置いて，改めて $r_h=(r(z_1),\cdots,r(z_{N-1}),r_N)^T$ とすると $r_h\in R(K_h)$ となる．そして解くべき離散化境界積分方程式は

論　　　説

$$\begin{cases} K_h u_h = r_h & (3.8) \\ u_h^1 + \cdots + u_h^N = 0 & (3.9) \end{cases}$$

となる．実際の数値計算では，連立方程式

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N-1} & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N-1} & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & a_{N-1,2} & \cdots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ \vdots \\ u_h^{N-1} \\ u_h^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(z_1) \\ r(z_2) \\ \vdots \\ r(z_{N-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば良い．ただ，この係数行列は性質の良い行列ではないので，消去法を用いるのが良いと思われる．境界要素法に現われる連立方程式の解法にはどのようなアルゴリズムが最適であるのかは今後の研究が待たれるところである．

数値解の収束性の議論であるが，(3.5)の P_hK と(3.8)の K_h とは同一視できることを注意しておく．(3.1), (3.2)の解 u と(3.8), (3.9)の解 u_h に対して $e_h=P_hu-u_h$ と置く．大雑把な言い方をして，$h\downarrow+0$ のとき $e_h\to 0$ が示されれば収束が言えたことになる．(3.5)と(3.8)から

$$K_h e_h = P_hK(P_hu-u_h) = P_hK(P_hu-u)+(P_hr-r_h). \tag{3.10}$$

補題1より，$\|P_hK(P_hu-u)\|_\infty=O(h^2)$ となる．ここで，2つの行列 S, T を

$$S=\begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \mu_1 & \cdots & \mu_{N-1} & \mu_N \end{pmatrix}$$

と定めると，

$$TK_hS=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

を得る．更に補題2より $\|(a_{i,j})^{-1}_{\substack{1\le i\le N-1\\ 1\le j\le N-1}}\|_\infty=O(h^{-1})$．(3.10)より $(TK_hS)(S^{-1}e_h)=TP_hK(P_hu-u)+T(P_hr-r_h)$ を得るが，(3.11)を利用して行列の形で書き下すと

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{N-1,1} & \cdots & a_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_h^1-e_h^N \\ \vdots \\ e_h^{N-1}-e_h^N \\ e_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(h^2) \\ \vdots \\ O(h^2) \\ * \end{pmatrix}$$

従って，$e_h^k-e_h^N=O(h)\,(1\le k\le N-1)$ を得ることになる．更に(3.2), (3.6)より

$$e_h^1+e_h^2+\cdots+e_h^N=O(h).$$

以上の結果を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_h^1 \\ e_h^2 \\ \vdots \\ e_h^{N-1} \\ e_h^N \end{pmatrix} = O(h)$$

となり，この連立方程式を解いて，$\|e_h\|_\infty\le Ch$ を得る．（詳細は拙著[9].）これによって，境界要素解の一様収束が $O(h)$ で示されたことになる．定理の形で述べれば次の通りである．

定理 2. u を(3.1), (3.2)の解とし，u_h を(3.8), (3.9)の解とするとき，u と Γ に依存するが h に

は依存しない正定数 C が存在して $\|P_h u - u_h\|_\infty \le Ch$ を満たす. ∎

以上の議論で注意すべきことは, 行列 K_h の成分 $a_{j,k}$ の計算に際しては, Γ 上の積分が厳密(exact)にできることを仮定していることである. §2 でも注意したが, 多くの実用的数値計算では曲線 Γ を多角形で近似して数値積分を行なっている. また, この近似から生じる誤差は, 近似の方法によっては離散化誤差の主要項になり得る. そこで, 次に境界の近似も含めた高精度のスキームについて説明する.

Γ 上に N 個の節点 $\{z_{2j-1}\}_{j=1,\cdots,N}$ を時計回りに取り, 2点 z_{2j-1}, z_{2j+1} を結んで得られる線分を γ_j とする. $\bigcup_{1\le j\le N}\gamma_j$ は Γ に内接する多角形 $\tilde{\Gamma}$ を作るが, その各辺 γ_j における単位外向き法線ベクトルを $\vec{\nu}_j$ と表わす. 線分 γ_j の長さを $|\gamma_j|$ と表わし, '分割巾' h を $h=\max_{1\le j\le N}|\gamma_j|$ と定義する. 節点数 N の増加によって細分していくが, その際に次の仮定 B を満たすように γ_j を決めるものとする.

仮定 B. h に依存しない正定数 M が存在して, $\max_{1\le j\le N}|\gamma_j| \;/\; \min_{1\le j\le N}|\gamma_j| \le M$ を満たすものとする. ∎

まず $\vec{n}_z$ を近似する $\tilde{\Gamma}$ 上のベクトルを構成することから始める. ベクトル $\vec{\eta}_j$ を

$$\vec{\eta}_j = \frac{|\gamma_j|\vec{\nu}_{j-1} + |\gamma_{j-1}|\vec{\nu}_j}{\||\gamma_j|\vec{\nu}_{j-1} + |\gamma_{j-1}|\vec{\nu}_j\|_2} \qquad (1\le j\le N) \tag{3.12}$$

によって定義する. ただし, $\vec{\nu}_0, \gamma_0$ はそれぞれ $\vec{\nu}_N, \gamma_N$ と一致するものとする. このベクトルは $\vec{n}_{z_{2j-1}}$ を近似するベクトルで, Γ の滑らかさが C^3 級であることから次の評価を得る.

補題 4. h には依存しない正定数 C が存在して, $\|\vec{\eta}_j - \vec{n}_{z_{2j-1}}\|_\infty \le Ch^2$ となる. ∎

次に, γ_j の中点を z_{2j} とし, $\tilde{\Gamma}$ 上に別の N 個の節点 $\{z_{2j}\}_{j=1,\cdots,N}$ を定める. $\tilde{z}$ によって $\tilde{\Gamma}$ 上の点を表わす. 今便宜上, $\tilde{z}$ は線分 $\overline{z_{2j-1}z_{2j}}$ 上にあるものとする. 2点 $\tilde{z}$ と z_{2j} の間の距離を λ とするとき, $\tilde{z}$ におけるベクトル $\vec{m}_{\tilde{z}}$ を次のルールによって定める. (図1を参照せよ.)

$$\vec{m}_{\tilde{z}} = \left(1-\frac{2\lambda}{|\gamma_j|}\right)\vec{\nu}_j + \frac{2\lambda}{|\gamma_j|}\vec{\eta}_j \tag{3.13}$$

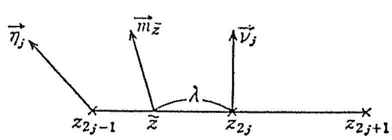


図 1

同様に $\tilde{z}$ が線分 $\overline{z_{2j}z_{2j+1}}$ 上の場合についても $\vec{m}_{\tilde{z}}$ を定義する.

このルールによって $\tilde{\Gamma}$ 全体でベクトル $\vec{m}_{\tilde{z}}$ を定義することができる. そして $\vec{m}_{\tilde{z}}$ は Γ の法線ベクトル $\vec{n}_z$ を $O(h^2)$ で近似するものになっている(詳細は拙著[9]).

$\tilde{\Gamma}$ 上の函数空間――$C^0(\Gamma)$ の近似空間に相当するもの――を構成する準備として, 次の仮定 C を満足する $2N$ 個の区分的一次函数 $\{\tilde{\phi}_j\}_{j=1,\cdots,2N}$ を作る.

仮定 C. (i) $\tilde{\phi}_j \in C^0(\tilde{\Gamma})\,(1\le j\le 2N)$

(ii) $\tilde{\phi}_j(z_k) = \delta_{j,k} \quad (1\le j, k\le N)$

(iii) $\tilde{\phi}_j$ は各線分 $\overline{z_jz_{j+1}}$ 上では線型函数である. $(1\le j, k\le 2N)$ ∎

これらの'小さな'区分的一次函数から, '大きな'区分的一次函数 $\{\tilde{\varPhi}_j\}_{j=1,\cdots,2N}$ を次のルールによって構成する.

$$\tilde{\varPhi}_j = \tilde{\phi}_j + \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_{j-1} + \tilde{\phi}_{j+1}) \qquad (1\le j\le 2N) \tag{3.14}$$

ただし, $\tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}_{2N}$, $\tilde{\phi}_{2N+1} = \tilde{\phi}_1$ とする. この $\{\tilde{\varPhi}_j\}$ を基底函数とする $\tilde{\Gamma}$ 上の有限次元函数空間 $\tilde{V}_h^1, \tilde{V}_h^2$

を

$$\tilde{V}_h^1 = \text{linear span of } \{\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_3, \cdots, \tilde{\phi}_{2N-1}\}$$
$$\tilde{V}_h^2 = \text{linear span of } \{\tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_4, \cdots, \tilde{\phi}_{2N}\}$$

によって構成する．また $C^0(\Gamma)$ から $\tilde{V}_h^1$ への collocation operator $\tilde{P}_h$ を次の通り定義する．

$$\begin{array}{cccc} \tilde{P}_h; & C^0(\Gamma) & \longrightarrow & \tilde{V}_h^1 \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & f(z) & \longmapsto & \sum_{1\le j\le N} f(z_{2j-1})\tilde{\phi}_{2j-1} \end{array}$$

以上の準備の下に，(3.1), (3.2) の離散化を与える．求めるべき数値解 $\tilde{u}_h$ を

$$\tilde{u}_h = \sum_{1\le j\le N} \tilde{u}_h^j \tilde{\phi}_{2j}$$

と表わす．この $\tilde{u}_h$ は $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h^2$ であると同時に $\tilde{u}_h = (\tilde{u}_h^1, \cdots, \tilde{u}_h^N)^T$ によって $\boldsymbol{R}^N$ の元と見なすこともできる．この同一視のルールによれば，境界上の積分作用素 K の離散版を与えることと，その表現をする行列 $\tilde{K}_h = (\tilde{a}_{j,k})$ を与えることとは同値である．そこで，(3.7) の場合と同様に $\tilde{a}_{j,k}$ を与えることによって離散積分方程式を構成する．まず $\alpha_{j,k}$ を次のように定義する．

$$\alpha_{j,k} = \frac{1}{2}\delta_{jk} + \int_{\tilde{\Gamma}} G(z_{2j}, \tilde{y}) \cdot \vec{m}_{\tilde{y}} \tilde{\phi}_{2k}(\tilde{y}) d\sigma_{\tilde{y}}, \qquad 1 \le j, k \le N$$

この $\alpha_{j,k}$ を用いて　$\tilde{a}_{j,k} = \alpha_{j,k} - (1/N) \sum_{1\le i\le N} \alpha_{j,i}$　$(1 \le j, k \le N)$　を定める．この $\tilde{K}_h$ の要素に対しては補題2と同様な次の評価を受ける．

補題5. 上のように定めた $\tilde{a}_{j,k}$ に対しては次の評価を得る．

(i)　$-C_1 h \le \tilde{a}_{j,k} \le -C_2 h$,　$(1 \le j, k \le N,\ j \ne k)$

(ii)　$C_3 \le \tilde{a}_{j,j} \le C_4$,　$(1 \le j \le N)$

(iii)　$\sum_{1\le k\le N} \tilde{a}_{j,k} = 0$

ただし C_1, C_2, C_3 は h には依存しない正定数であって，$C_3 \fallingdotseq C_4 \fallingdotseq 1/2$ である．∎

この補題により，行列 $\tilde{K}_h$ は rank $\tilde{K}_h = N-1$ であるから，K_h の場合と同様に連立方程式の右辺の与え方を配慮する必要がある．

函数 $r(z)$ の近似に相当する $\tilde{r}_h = (\tilde{r}_h^1, \cdots, \tilde{r}_h^N)^T$ を次のように決める．

$$\tilde{r}_h^k = \int_{\tilde{\Gamma}} g(z_{2k}, \tilde{y})(\tilde{P}_h f_N)(\tilde{y}) d\sigma_{\tilde{y}} \qquad 1 \le k \le N-1$$

とし，$\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \cdots, \tilde{\mu}_N)^T$ を $\tilde{K}_h^T \tilde{\mu} = 0$, $\tilde{\mu}_N \ne 0$ とするときに $\tilde{r}_h^N = -(1/\mu_N) \sum_{1\le k\le N-1} \tilde{\mu}_k \tilde{r}_h^k$ とする．これによって $\tilde{r}_h$ は $\tilde{r}_h \in R(\tilde{K}_h)$ となるように与えられたことになる．次に (3.2) の離散版であるが，これは，$\int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}_h d\sigma_{\tilde{y}} = 0$ と与えれば良い．即ち $\{d_k\}_{k=1,\cdots,N}$ を $d_k = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\phi}_{2k} d\sigma_{\tilde{y}}$ $(1 \le k \le N)$ とするときに

$$d_1 \tilde{u}_h^1 + d_2 \tilde{u}_h^2 + \cdots + d_N \tilde{u}_h^N = 0$$

をもって (3.2) の離散化とする．以上より解くべき離散化境界積分方程式は次の連立方程式となる．

$$\begin{cases} \tilde{K}_h \tilde{u}_h = \tilde{r}_h & (3.15) \\ d_1 \tilde{u}_h^1 + \cdots + d_N \tilde{u}_h^N = 0 & (3.16) \end{cases}$$

数値解の一様収束評価であるが，基本的には (3.8), (3.9) の解と (3.1), (3.2) の解を評価した方法と同じ方法を用いる．(3.8), (3.9) の場合は，種々の離散化による離散化誤差が $O(h^2)$ であることが必要であったが，今の場合もこの条件を満たしている．（むしろ，この評価を得るように，様々な工夫をしながら (3.15), (3.16) を与えたと言うべきであろう．）従って，次の結果を得る．（詳細は拙著[9].）

定理3. u を(3.1), (3.2)の解とし，$\tilde{u}_h$ を(3.15), (3.16)の解とするとき，u, Γ には依存するが h には依存しない正定数 C が存在して，$\|\tilde{u}_h - \tilde{P}_h u\|_\infty \leq Ch$ を満たす．▮

これによって境界要素解の一様収束評価を得たわけであるが，収束のオーダーについては不満の残るところである．離散化誤差が $O(h^2)$ になるように様々な工夫をしながら，収束評価が $O(h)$ だからである．この点については，証明方法の改善によって $O(h^2)$ の評価が最近証明された．詳細は早川・磯[8]に譲る．

以上の議論においは K_h あるいは $\tilde{K}_h$ の成分評価のために，領域 Ω の凸性が主要な働きをしている．この仮定を取り除いて一様収束評価を与えることは，今後の課題である．また，$(\mathrm{P_D})$ に対する境界積分方程式(2.6)を境界の離散化まで含めて近似した場合の一様収束評価についても未解決である．

§4. 熱方程式の第二種初期値・境界値混合問題に対する境界要素法

Ω を E^2 の有界領域とし，その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は C^2 級の滑らかさをもつものとする．(Ω は弱い意味で凸であれば良い．) このとき，次の第二種初期値・境界値混合問題(the second initial-boundary value problem)を考える．

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, T] & (4.1) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \bar{\Omega} & (4.2) \\ \dfrac{\partial}{\partial n}u(x,t) + m(x,t)u(x,t) = f(x,t) \qquad (x,t) \in \Gamma \times (0,T] & (4.3) \end{cases}$$

ただし，$m(x,t)$, $f(x,t)$ は $\Gamma \times [0,T]$ 上の C^2 級の函数で，$u_0(x)$ は $\bar{\Omega}$ の C^2 級の函数とする．ラプラス方程式の場合と同様に，(熱方程式の)全空間での基本解を利用して，問題(P)を $\Gamma \times (0,T)$ という円柱境界上の積分方程式に転換する．基本解を $v^*(\xi,t;\ x,\tau)$ と表わすと，$v^*(\xi,t;\ x,\tau)$ は次の式で与えられる．

$$v^*(\xi,t;\ x,\tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\right)^2 \exp\left(-\frac{|\xi-x|^2}{4(\tau-t)}\right) H(\tau-t)$$

ただし，H は Heaviside 函数を表わす．$x \in \dot{\Omega}$ のとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow +0} \int_0^{\tau-\varepsilon} \int_\Omega \left\{ u(\xi,t)\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\xi\right) v^*(\xi,t;\ x,\tau) - v^*(\xi,t;\ x,\tau)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\xi\right) u(\xi,t) \right\} d\xi dt = 0$$

を計算することから，

$$\begin{aligned} u(x,\tau) = &-\int_0^\tau \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi,t;\ x,\tau) u(\xi,t) d\sigma_\xi dt + \int_0^\tau \int_\Gamma v^*(\xi,t;\ x,\tau) \frac{\partial}{\partial n} u(\xi,t) d\sigma_\xi dt \\ &+ \int_\Omega u_0(\xi) v^*(\xi,0;\ x,\tau) d\xi \qquad (0 < \tau \leq T,\ x \in \dot{\Omega}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る．これはラプラス方程式の場合の(2.4)に相当する式である．この式で Ω の内点の x を境界 Γ 上の点 z に近づける極限をとることになるが，その際に積分の主値の概念が必要になる．ここでは離散化の都合も考慮して，次の定義を採用することにする．$\partial_\Gamma, \partial_t$ を正数とする．$S = \Gamma \times [0, T]$ とし，$B_\partial(z) = \{(\xi,t) \in S \mid |\xi - z| < \partial_\Gamma,\ \tau - \partial_t < t \leq \tau,\ z \in \Gamma\}$ と定める．更に $S_\partial = S \setminus B_\partial(z)$ とする．

定義. $g(\xi,t)$ を S 上の C^2 級の函数とするとき，次式によって主値積分
$\mathrm{p.v.} \displaystyle\int_0^\tau \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi,t;\ x,\tau) g(\xi,t) d\sigma_\xi dt$ を定義する．

$$\text{p. v.}\int_0^\tau\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi, t;\ x, \tau) g(\xi, t) d\sigma_\xi dt$$
$$= \lim_{\delta\tau\downarrow+0}\lim_{x\to z}\left\{\iint_{S_\delta}\frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi, t;\ x, \tau) g(\xi, t) d\sigma_\xi dt\right.$$
$$\left.+\iint_{B_\delta(z)}\frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi, t;\ x, \tau)(g(\xi, t)-g(z, t)) d\sigma_\xi dt\right\} \tag{4.5}$$

ただし，点 x は点 z に対して内向き法線方向から近づくものとする．∎

この定義に従って(4.4)で $x\to z$ という極限をとると次式を得る．

$$\frac{1}{2}u(z, \tau)+\text{p. v.}\int_0^\tau\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi, t;\ z, \tau) u(\xi, t) d\sigma_\xi dt$$
$$=\int_0^\tau\int_\Gamma v^*(\xi, t;\ z, \tau)\frac{\partial}{\partial n} u(\xi, t) d\sigma_\xi dt+\int_\Omega u_0(\xi) v^*(\xi, 0;\ z, \tau) d\xi,$$
$$z\in\Gamma$$

ここに与えられた境界条件(4.3)を代入すると，解くべき境界積分方程式は次の通りである．

$$\frac{1}{2}u(z, \tau)+\text{p. v.}\int_0^\tau\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_\xi} v^*(\xi, t;\ z, \tau) u(\xi, t) d\sigma_\xi dt$$
$$+\int_0^\tau\int_\Gamma v^*(\xi, t;\ x, \tau) m(\xi, t) u(\xi, t) d\sigma_\xi dt$$
$$=\int_0^\tau\int_\Gamma v^*(\xi, t;\ x, \tau) f(\xi, t) d\sigma_\xi dt+\int_\Omega u_0(\xi) v^*(\xi, 0;\ x, \tau) d\xi \tag{4.6}$$

次に離散化であるが，ラプラス方程式の場合と同様に次のように境界の近似を行なう．Γ 上に N_Γ 個の節点 $\{z_j\}_{j=1,\cdots,N_\Gamma}$ を時計まわりにとる．2点 z_j と z_{j+1} を結んで得られる線分を γ_j と表わし，Γ に内接する多角形 $\tilde{\Gamma}=\bigcup_{1\le j\le N_\Gamma}\gamma_j$ を構成する．また γ_j における単位外向き法線ベクトルを $\vec{\nu}_j$ と表わす．更に $\Delta\Gamma=\max_{1\le j\le N_\Gamma}|\gamma_j|$ とする．このとき，ラプラス方程式の場合と同様に仮定Bが満足されているものとする．t 方向の離散化については，$0\le t\le T$ を N_T 個の区間に等分割し，$\Delta T=T/N_T$ とおき分点 $\{t_k\}_{k=0,\cdots,N_T}$ を $t_k=k\Delta T\ (0\le k\le N_T)$ とする．$\{\tilde{S}_j^k\}_{\substack{1\le j\le N_\Gamma\\1\le k\le N_T}}$ を $\tilde{S}_j^k=\gamma_j\times\{t\,|\,t_{k-1}\le t\le t_k\}$ と定めると，多角柱領域の境界 $\tilde{S}=\tilde{\Gamma}\times[0, T]$ は，$\tilde{S}=\bigcup\tilde{S}_j^k$ となる．この各 $\tilde{S}_j^k$ が熱方程式の初期値・境界値混合問題の場合の境界要素である．$\Gamma\times[0, T]$ で与えられた函数を $\tilde{\Gamma}\times[0, T]$ 上で近似するために，次の仮定Dを満足する $\tilde{\Gamma}$ 上の区分的一次函数 $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1,\cdots,N_\Gamma}$ を用意する．

仮定D.　(i)　$\tilde{\varphi}_j\in C^0(\tilde{\Gamma})$　$(1\le j\le N_\Gamma)$

(ii)　$\tilde{\varphi}_j(z_k)=\delta_{j,k}$　$(1\le j, k\le N_\Gamma)$

(iii)　$\tilde{\varphi}_j$ は各 γ_k 上では線型函数である．$(1\le j, k\le N_\Gamma)$　∎

t 方向には，階段函数 $\{\chi_k\}_{k=1,\cdots,N_T}$ を次のように定める．

$$\chi_k(t)=\begin{cases}0 & t\notin[t_{k-1}, t_k]\\ 1 & t\in[t_{k-1}, t_k],\end{cases}\qquad 1\le k\le N_T$$

この2つの函数の組 $\{\tilde{\varphi}_j\}, \{\chi_k\}$ の直積によって $\tilde{\Gamma}\times[0, T]$ の函数の組 $\{\varphi_j^k\}$ を次のように決める．

$$\varphi_j^k=\tilde{\varphi}_j\times\chi_k\qquad(1\le j\le N_\Gamma,\ 1\le k\le N_T)$$

$\tilde{\Gamma}\times[0, T]$ 上の有限次元函数空間 W_h を $\{\varphi_j^k\}_{\substack{1\le j\le N_\Gamma\\1\le k\le N_T}}$ の linear span によって定め，collocation operator P_h を

$$
\begin{array}{rcl}
P_h : C^0(\Gamma\times[0,T]) & \longrightarrow & W_h \\
\Psi & & \Psi \\
u(x,t) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{1\le j\le N_\Gamma \\ 1\le k\le N_T}} u(z_j,t_k)\varphi_j^k
\end{array}
$$

によって定義する．これによって，$\Gamma\times[0,T]$ 上の函数は，$\tilde{\Gamma}$ 方向には区分的一次に，t 方向には階段函数によって近似されたことになる．

以上の準備の下に，求めるべき数値解を

$$\tilde{u}_h=\sum_{\substack{1\le j\le N_\Gamma \\ 1\le k\le N_T}}\tilde{u}_j^k\varphi_j^k$$

と表わし，境界積分方程式(4.6)の近似を次のように与える．($d\tilde{S}=d\sigma_{\tilde{\xi}}dt$ とする．)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{u}_i^1+\sum_{1\le j\le N_\Gamma}\int_{\tilde{S}_j^1}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_1)P_hm\tilde{u}_hd\tilde{S} \\
&\quad=\sum_{1\le j\le N_\Gamma}\int_{\tilde{S}_j^1}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_1)P_hfd\tilde{S}+\int_{\tilde{\Omega}}u_0(\xi)v^*(\xi,0;\ x_i,t_1)d\xi \\
&\qquad\qquad(1\le i\le N_\Gamma)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{u}_i^k+\sum_{\substack{1\le l\le k-1\\1\le j\le N_\Gamma}}\int_{\tilde{S}_j^l}(\nabla_{\tilde{\xi}}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)\cdot\vec{\nu}_j)\tilde{u}_hd\tilde{S} \\
&\quad+\sum_{\substack{1\le l\le k\\1\le j\le N_\Gamma}}\int_{\tilde{S}_j^l}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)P_kmbla\tilde{u}_hd\tilde{S} \\
&\quad=\sum_{\substack{1\le l\le k\\1\le j\le N_\Gamma}}\int_{\tilde{S}_j^l}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)P_hfd\tilde{S}+\int_{\tilde{\Omega}}v^*(\xi,0;\ x_i,t_k)u_0(\xi)d\xi \\
&\qquad\qquad(1\le i\le N_\Gamma,\ 2\le k\le N_T)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

行列表現をするために，次のように $a_{i,j}^{l,k}, h_{i,j}^{l,k}, G_i^k$ を定める．

$$a_{i,j}^{l,k}=\int_{\tilde{\Gamma}}\int_{t_{l-1}}^{t_l}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)P_hm\tilde{\psi}_jd\sigma_{\tilde{\xi}}dt\qquad(1\le k\le N_T,\ 1\le l\le k,\ 1\le i,j\le N_\Gamma)$$

$$h_{i,j}^{l,k}=\int_{\tilde{\Gamma}}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\nabla_{\tilde{\xi}}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)\cdot\vec{\nu}\tilde{\psi}_jd\sigma_{\tilde{\xi}}dt\qquad(1\le k\le N_T,\ 1\le l\le k-1,\ 1\le i,j\le N_\Gamma)$$

$$h_{i,j}^{0,1}=0\qquad(1\le i,j\le N_\Gamma)$$

$$G_i^k=\int_{\tilde{\Gamma}}\int_0^{t_k}v^*(\tilde{\xi},t;\ x_i,t_k)P_hfd\sigma_{\tilde{\xi}}dt+\int_{\tilde{\Omega}}v^*(\xi,0;\ x_i,t_k)u_0(\xi)d\xi\qquad(1\le k\le N_T,\ 1\le i\le N_\Gamma)$$

これらを用いれば，(4.7), (4.8) は次のような行列表示の連立方程式になる．

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{pmatrix}1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{i,j}^{k,k}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}u_1^k\\ \vdots\\ u_{N_\Gamma}^k\end{pmatrix} \\
&\quad=-\sum_{l=1}^{k-1}\left\{\begin{pmatrix}a_{i,j}^{l,k}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_{i,j}^{l,k}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}u_1^l\\ \vdots\\ u_{N_\Gamma}^l\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G_1^k\\ \vdots\\ G_{N_\Gamma}^k\end{pmatrix}\qquad(1\le k\le N_T)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

この連立方程式を k について帰納的に解いていけば良い．未知数に対する係数行列 $(1/2)I+(a_{i,j}^{k,k})$ は，差分法の陽的公式の場合と同様な次の性質をもつ．

補題 6. $\Delta\Gamma$ と ΔT に無関係で Γ にのみ依存する正定数 K が存在して，$\Delta T/\Delta\Gamma^2\le K$ のとき，(4.9) の係数行列 $(1/2)I+(a_{i,j}^{k,k})$ は優対角行列になり，$\|((1/2)I+(a_{i,j}^{k,k}))^{-1}\|_\infty\le C$ となる．ここに C は $\Delta\Gamma, \Delta T$ に依存しない正定数である．∎

$a_{i,j}^{k,k}$ の評価によってこの補題は得られる．(詳細は拙著[8])

一様収束については，次の定理を得る．

定理 4. 補題 6 と同じ仮定を $\Delta\Gamma, \Delta T$ が満足する．u を (4.4) の解，u_h を (4.9) の解とするとき

$$\sup_{(\xi,t)\in\tilde{S}} |u_h - P_h u| \leq C\Delta\Gamma$$

が成立する．ただし，C は $\Delta\Gamma$ に依存せず，u と Γ に依存する正定数である．∎

証明のためには，特異積分の離散化に伴う打ち切り誤差の評価を行なえば良い(拙著[8])．

第一種初期値・境界値混合問題については，岡本[16]，大西[18]の仕事がある．

§5. 結び

境界要素法は，線型方程式の境界値問題を全空間での基本解を利用して境界積分方程式に転換し，その積分方程式を有限要素空間を利用して離散化する方法である．従って，**基本的には線型微分方程式で基本解の数値的取り扱いが可能なものに限られる**．この点では差分法や有限要素法に比べて汎用性に大きく欠ける．これまでの数値解析(アルゴリズムの開発)においては，汎用的解法の追求が大きな地位を占めてきた．数値計算のエンドユーザーの立場に立つと汎用的解法は便利である．しかし，今後の数値解析の研究はその方向のみでは済まされないであろう．ある特殊な問題に対する fast solver は，やはり価値が大きい．境界要素法の今後の研究はその方面を狙うべきではなかろうか．**境界要素法の長所は，①内部問題と外部問題を同等に扱える．②解くべき線型連立方程式のサイズが小さい．③不要な点での解の値を求めずに済む**．というようなことが挙げられると思う．自由表面の問題や線型偏微分方程式で非線型の境界条件を課すような問題には有力な数値解法になると思う．Navier Stokes 方程式等の非線型方程式に対する境界要素解析は，日本大学の登坂宣好氏のグループで精力的になされている．この近年，かなりの改良がなされている．

謝辞．この論説を書くにあたり，大阪大学の早川款達郎先生には構成についての御示唆を頂きました．また福岡大学の大西和榮先生には幾つかの資料を提供して頂きました．この場を借りて，両先生に御礼を申し上げたいと思います．

文　　献

[1] Arnold, D. & Wendland, W. L., On the asymptotic convergence of collocation methods, Math. Comp., 41 (1983), 349-381.

[2] Bamberger, A. & Duong, T. H., Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la difraction d'une onde acoustique par une surface libre, Ecole Polytechnique Rapport interne No. 107 (1984).

[3] Brebbia, C. A., The boundary element method for engineers, Pentech Press, 1978.

[4] Brebbia, C. A. & Walker, S., Boundary element techniques in engineering, Butterworth, 1980.

[5] Ciarlet, F. G., The finite element method for elliptic problems, North Holland, 1978.

[6] Ciarlet, F. G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, 1982.

[7] Hayakawa, K. & Iso, Y., High-order uniform convergence estimates for boundary solutions for Laplace's equation (in preparation).

[8] Iso, Y. & Onishi, K. et al., Numerical convergence of boundary solution in transient heat conduction problems, Topics in Boundary Element Research vol. 3, Springer-Verlag, 1987.

[9] Iso, Y., Uniform convergence theorems of boundary solutions for Laplace's equation (to appear in R. I. M. S.).

[10] Jaswon, M. A., Integral equation methods in potential theory I, Proc. Royal. Soc. A, **275** (1963), 23-32.

[11] Katsurada, M. & Okamoto, H., A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SecIA, **35** (1988), 507-515.

[12] Kellogg, O. D., Foundation of potential theory, Springer-Verlag, 1967.

[13] 小林昭二, 境界要素法の歴史から, 数理科学 **12**, (1982). 7-9.
[14] Le Roux, M., Équation intégrale pour la problème du potentiel electrique dans le plan, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (18 février, 1974) Série A 541-544.
[15] Nedelec & Planchard, Une méthode variationnelle d'elements finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans R^3, Rairo. 7ème année, décembre 73, 105-129.
[16] Okamoto, H., Application of the Fourier transform to the boundary element method, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, **35** (1988), 345-362.
[17] Onishi, K., Convergence in the boundary element method for heat equation, TRU mathematics Science University of Tokyo 17-2 (1981), pp. 213.
[18] Onishi, K., Convergence of an integral equation method to convective heat transfer (to appear in 数理解析研究所講究録, 境界要素法の数学的理論とその周辺(Ⅰ)).
[19] Rizzo, F. J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., **25** (1967), 83-95.
[20] Rizzo, F. J. (北原道弘訳), 境界要素法―その初期の歴史＝私見, 数理科学 2, (1988), 62-71.
[21] Raviard, P. A. & Thomas, J. M., Introduction a l'analyse numerique des equation aux derivees partielles, Masson (1983).
[22] Symm, G. T., Integral equation methods in potential theory II, Proc. Royal. Soc. A, **275** (1963), 33-46.
[23] Wendland, W. L., Asymptotic convergence of boundary element method, Lecture Note No. 20, the University of Maryland, 1981.

以上は引用した文献であるが, この他にも日本人の研究を中心に次のものがある。

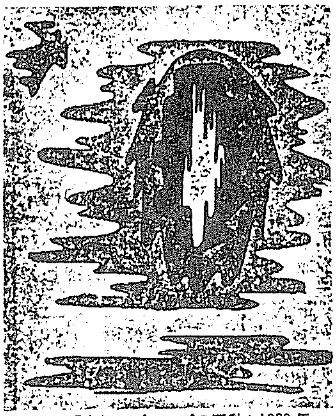
☆神谷紀生・大西和榮, 境界要素法による計算力学, 森北出版, 1985.
☆境界要素法研究会編, 境界要素法の応用, コロナ社, 1987.
☆数理解析研究所講究録, '境界要素法の数学的理論とその周辺(Ⅰ), (Ⅱ)', (近刊).
☆境界要素法論文集, vol. 1 (1984), vol. 2 (1985), vol. 3 (1986), vol. 4 (1987), vol. 5 (1988).

この論文集の入手については, 境界要素法研究会(東京都新宿区西新宿 2-7-1, 新宿第一生命ビル 24F, (株)構造計画研究所気付)に照会すればよい.

(1988年10月22日提出)

(いそ ゆうすけ・京都大学数理解析研究所)

特集／境界要素法



クレー「大気のグループの運動」1929 年.

境界要素法の数理
——積分方程式の数値解法

登坂　宣好

1.　はじめに

数理モデルとして構成された微分方程式の境界値問題は変分法や積分方程式法によっても定式化され解析することができる．微分方程式の境界値問題は差分法等の近似解法によって解析されることが多いが，変分法の近似解法である有限要素法がコンピューターの急速な発達に支えられて発展し，最近では多くの分野で汎用性のある有力な解析法として定着し，かつ普及している．

一方，積分方程式法はその核 (Kernel) としてのグリーン関数の構成や特異核の処理等の問題点から，ポテンシャル論等の限定された分野を除き余り使用されていなかったが，最近，“境界要素法”という“境界積分方程式”の数値解法が有限要素法との対比において注目されるようになってきた．

Southampton 大学土木工学科を中心として使い始められた境界要素法[1,2,3]は境界積分方程式の組織的な数値解析法であるから，その長所と短所は境界積分方程式の有する特性に起因することになろう．

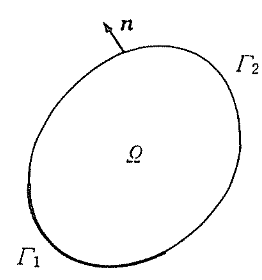
微分方程式の境界値問題を積分方程式表現に変換する際に重要な役割を演ずるのは対象とする微分作用素の“基本解”や Green 関数であり，それらは一般に特異性を有する関数である．特に，境界積分方程式はそのような基本解により誘導されるので，基本解の有する性質を有効に利用することから，有限要素法では不適な無限領域問題等に力を発揮することができる．数値計算上では，解析対象領域の次元数が一つ減る境界領域のみの離散化だけでよいという利点が生じる．このように境界要素法は大きな特徴を有するが，必ずしも全ての問題に対して有力であるとは限らず，基本解の構成が困難な非自己随伴問題や連成問題，固有パラメーターの決定が複雑な固有値問題，さらに高階問題等はそのようなものとなろう．

そこで，本論では，これらの問題に対する適用性をひろげるために，境界積分方程式を含む積分方程式の組織的な数値解法という視点で境界要素法の数理的 background に関して述べることにより，積分方程式の再評価を試みたい．

2.　境界値問題の積分方程式表現

2-1.　境界値問題

3次元ユークリッド空間 E^3 の open bounded domain Ω と Lyapunov 曲面[4]として与えられるその境界 $\partial\Omega=\Gamma$ を解析対象領域とえらぶ．Γ は二つの部分 Γ_1, Γ_2 ($\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$) に分割されているものとする（図1）．



domain Ω & boundary Γ

図 1　解析対象領域

理工学を初めとして多くの分野で生ずる現象の数理モデルは微分方程式の境界値問題に帰着することが多い．その中でも楕円型微分方程式が基本的であるので，以下では次の境界値問題を対象としてえらぶことにする（一般的な微分作用素に関する定式化については文献7) を参照)．

基礎微分方程式はヒルベルト空間 H_u 上で定義された楕円型微分作用素 A に関する次式とする．

$$Au \equiv (L+Q)u = f(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{in } \Omega) \qquad (1)$$

ただし

$$Lu \equiv -u,_{ii}, \quad Qu \equiv B_k(\boldsymbol{x})u,_k + C(\boldsymbol{x})u \quad (1)'$$

ここで，$u \in H_u, B_k, C \in C(\bar{\Omega}), f \in L_2(\Omega)$ とし，$,i$ はベクトル $\boldsymbol{x} \in \Omega$ の成分 x_i に関する偏微分記号を表わし，総和に関する規約を使用するものとする．なお作用素 A はその主要部 L と Q との和として与えられ，(1)′ 式より，L は自己随伴であるが，Q の存在により，A は非自己随伴となる．Q が存在しない場合，(1)式は Poisson 方程式となる．

境界条件式は各境界上で Dirichlet 型と Neumann 型として与えられる次の混合型境界条件式とする．

Dirichlet 条件 $\quad u = a \qquad (\text{on } \Gamma_1) \quad (2)$

Neumann 条件 $\quad q \equiv u,_i n_i = \dfrac{\partial u}{\partial n} = b \qquad (3)$

$(\text{on } \Gamma_2)$

ただし，n_i は Γ 上の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の i 方向成分とし，$q = \partial u/\partial n$ は u の $\boldsymbol{n}$ 方向導関数，さらに a および b は境界上の given element とする．

以下では，領域の任意の点を field point ($\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{X} \in \Gamma$) または source point ($\boldsymbol{y} \in \Omega$, $\boldsymbol{Y} \in \Gamma$) として区別し表わす（図2）．

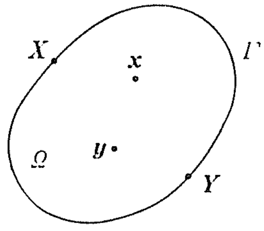


図 2 Field Point & Source Point

2-2. 積分方程式表現

境界値問題をそれと等価な積分方程式に変換する方法として，Green 関数による古典的方程式やポテンシャル論の適用等が知られている．

最近，Brebbia は“重みつき残差表現”を利用する汎用性の高い誘導法を提案し，各種の近似解法 (Galerkin 法，差分法，Moment 法等) を体系化し，“重み関数”として“基本解”を採用する場合に積分方程式が得られることを示した[2]．この方法論により，ポテンシャル問題に対する Green の公式や弾性論における Betti の相反定理といった個々の関係式を使用することなく，一般的に積分方程式が誘導できることになる．ここでは，基礎式の弱解に対する表現式から出発して，積分方程式を求めることを考えることにしよう．

(1)式の弱解は任意の $\varphi \in H_u$ に対して，

$$\int_\Omega \{-u,_{ii} + B_k(\boldsymbol{x})u,_k + C(\boldsymbol{x})u - f(\boldsymbol{x})\}\varphi d\Omega = 0 \qquad (4)$$

なる表現式で与えられる．発散定理を2回適用することにより次式を得る．

$$\int_\Omega [-\varphi,_{ii} - \{B_k(\boldsymbol{x})\varphi\},_k + C(\boldsymbol{x})\varphi] u d\Omega$$
$$= \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi d\Omega + \int_\Gamma (q\varphi - u\varphi,_i n_i) d\Gamma$$
$$- \int_\Gamma B_k(\boldsymbol{x}) n_k u \varphi d\Gamma \qquad (5)$$

または，境界条件式(2，3)を考慮して次式となる．

$$\int_\Omega [-\varphi,_{ii} - \{B_k(\boldsymbol{x})\varphi\},_k + C(\boldsymbol{x})\varphi] u d\Omega$$
$$= \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi d\Omega$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \{q\varphi - a(\varphi,_i n_i + B_k(\boldsymbol{x}) n_k \varphi)\} d\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma_2} \{b\varphi - u(\varphi,_i n_i + B_k(\boldsymbol{x}) n_k \varphi)\} d\Gamma \qquad (6)$$

ここで，(5)または(6)式の左辺には(1)式の微分作用素 A の随伴作用素 A^*,

$$A^*\varphi = -\varphi,_{ii} - (B_k(\boldsymbol{x})\varphi),_k + C(\boldsymbol{x})\varphi$$

が現われていることに注意しよう．

まず，φ として，次式で定義される Adjoint System と呼ばれる問題を満足する関数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，即ち Adjoint 問題の Green 関数をえらぶことにする．

$$-\varphi_{,ii}-(B_k(\boldsymbol{x})\varphi)_{,k}+C(\boldsymbol{x})\varphi=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (\text{in } \Omega) \tag{7}$$

$$\varphi=0 \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{8}$$

$$\varphi_{,i}n_i+B_k(\boldsymbol{x})n_k\varphi=0 \quad (\text{on } \Gamma_2) \tag{9}$$

ただし，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は Dirac デルタ関数とする．

この $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を用いるならば，(6)式は次の関係式

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Omega f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega-\int_{\Gamma_1}a\frac{\partial g}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma+\int_{\Gamma_2}bg(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{10}$$

となる．この式は問題(1～3)の解 u の積分表現を与え，右辺の第1項は密度 f のニュートンポテンシャル，第2項は密度 a の2重層ポテンシャル，第3項は密度 b の1重層ポテンシャルとしての表現を有していることになる[4]．従って，解 u を求めるには(7～9)式を満足する Green 関数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を構成すればよいことになるが，一般には困難である．

そこで，次に φ の条件を緩和し，(7)式のみを満足する φ，即ち(7)式の基本解 $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ をとるならば，(5)式は次の積分方程式となる．

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Omega f(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega+\int_\Gamma q(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma-\int_\Gamma u(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma-\int_\Gamma B_k(\boldsymbol{Y})n_k(\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{11}$$

この式は(10)式とは異なり，境界積分項の1重層または2重層ポテンシャルの密度が未知の u または q で表現されている．

(10, 11) 式の誘導に際しては(7)式の変数係数微分方程式の基本解が不可欠のものであったが，次に A の主要部 L のみに対する基本解を利用した誘導を考えてみることにする．

φ として，L に対する次式

$$-\varphi_{,ii}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (\text{in } \Omega) \tag{12}$$

および境界条件式(8, 9)を満足する Green 関数 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ をえらぶならば，(6)式は次の積分方程式となる．

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Omega\left[\begin{array}{l}f(\boldsymbol{y})+B_{k,k}(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\\-C(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\end{array}\right]h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega+\int_\Omega B_k(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})h_{,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega-\int_{\Gamma_1}a\frac{\partial h}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma+\int_{\Gamma_2}bh(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{13}$$

この式は領域の積分項に作用素 Q に対応した未知関数 u を含むことが特徴である．

最後に φ として，境界条件式を緩和し，(12)式のみを満足する基本解 $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を採用するならば，(5)式は次のような積分方程式に帰着する．

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Omega\{f(\boldsymbol{y})+B_{k,k}(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})-C(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\}\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega+\int_\Omega B_k(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\omega_{,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\Omega-\int_\Gamma u(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\omega}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma+\int_\Gamma\{q(\boldsymbol{Y})-B_k(\boldsymbol{Y})n_k(\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y})\}\cdot\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{14}$$

2-3. 積分方程式表現の体系

以上，境界値問題(1～3)に対して等価な4種類の積分方程式表現を誘導することが出来た．(10)式は古典的な解の積分表現であり，(11)式は Fredholm 型積分方程式であるが，(13)と(14)式とはその中間型とも言うべき型式を有しているので，Hybrid 型積分方程式と呼ぶことにする．なお，(11)式より，いわゆる境界積分方程式を導くことが出来る（次章参照）．本章のまとめとして，境界値問題の積分方程式への変換を図式的に次ページの表1で示しておくことにする．

3. 境界積分方程式

3-1. 境界積分方程式の誘導

Fredholm 型積分方程式 (11) の右辺は境界上で未知な u と q を含んでいるので，左辺の u が境界点 $\boldsymbol{X}$ に関するものとして与えられるならば，未知量は全て境界上のものとなる．この場合の関係式を特に，境界積分方程式という．この式から境界上の未知量を定め，さらにそれらを(11)式に代

表 1　積分方程式の体系

微分方程式の境界値問題			
基本式: $Au=(L+Q)u=f$ 境界条件式: $u=a$, $q=b$.	Aの adjoint 問題のGreen関数	→	解uの積分表示
	Lの adjoint 問題のGreen関数	→	Hybrid 型積分方程式
	$L=L^*$ の基本解	→	Hybrid 型積分方程式
	A^* の基本解	→	Fredholm 型積分方程式 ↓ 境界積分方程式

入することより，Ωの任意の点のuを全て定めることが出来る．これが境界積分方程式法による解法の手順であり特徴でもある．

境界積分方程式表現を得るには，特異性を有する基本解 $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ の $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{X}$ に対する挙動に基づく1重および2重層ポテンシャルの性質を知らなければならない．ポテンシャル論[4]を参照すると，2重層ポテンシャルおよび1重層ポテンシャルの法線方向導関数は$\boldsymbol{x}$から$\boldsymbol{X}$への極限操作に対して不連続性を有することがわかる．

これらの性質を考慮することによって，(11)式は $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{X}$ なる極限に対し，次の境界積分方程式に帰着する．

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{X})=\int_\Omega f(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{y})d\Omega+\int_\Gamma q(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma-\int_\Gamma u(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma-\int_\Gamma B_k(\boldsymbol{Y})n_k(\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{15}$$

3-2. Laplace 式の境界積分方程式表現

(1)式の特殊な場合（$f(\boldsymbol{x})\equiv 0$，$Q$を零作用素）として与えられる Laplace 式をとり上げ，各種の境界条件式に対する境界積分方程式を(15)式より導き，以下に示すことにする．

・Dirichlet 問題（内部）

$$\frac{1}{2}a+\int_\Gamma a\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma=\int_\Gamma q(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{16}$$

・Neumann 問題（内部）

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{X})+\int_\Gamma u(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma=\int_\Gamma b\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{17}$$

・混合型問題

$$\frac{1}{2}u(\boldsymbol{X})=\int_\Gamma q(\boldsymbol{Y})\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma-\int_\Gamma u(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{18}$$

ただし，上式中に含まれる(12)式の基本解ψは以下で与えられる．

$$\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|}\quad (3\text{次元}), \tag{19}$$

および

$$\psi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|}\quad (2\text{次元}) \tag{19$'$}$$

ここで，(16)式は未知量qに関する第1種 Fredholm 型，(17)式はuに関する第2種 Fredholm 型積分方程式であることがわかる．

3-3. Direct および Indirect Method

ポテンシャル論によれば，Laplace 式の解である調和関数は1重層または2重層ポテンシャルにより構成され，内部 Dirichlet 問題や Neumann 問題に対して Fredholm 型積分方程式によって以下のように定式化されることがわかっている[4]ので，前節の(16, 17)式との比較をしてみよう．

内部 Dirichlet 問題（3次元）は解uの2重層 potential 表現

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Y}\|}\mu(\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{20}$$

を用いることにより，第2種 Fredholm 型積分方程式

$$\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{X})=-\frac{1}{4\pi}a+\int_\Gamma\frac{\partial\psi}{\partial n}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\mu(\boldsymbol{Y})d\Gamma \tag{21}$$

で与えられる．(21)式の未知量は2重層 potential の密度μであって，(16)式の物理的な未知量qとは異なる仮想的な量である．(21)式よりμを定めることによって，(20)式に代入し，初めて物理量uが決定することになる．

次に，内部 Neumann 問題（3次元）はuの1

重層 potential 表現

$$u(\boldsymbol{x})=\int_\Gamma \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Y}\|}\sigma(\boldsymbol{Y})d\Gamma \qquad (22)$$

から，その法線方向導関数（$\boldsymbol{x}$ を変数とする）を求めることから，次の第2種 Fredholm 型積分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{X})=\frac{1}{4\pi}b-\int_\Gamma \frac{\partial\psi}{\partial n_X}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\sigma(\boldsymbol{Y})d\Gamma \qquad (23)$$

に帰着する．この式の未知量は仮想的な1重層 potential の密度 σ であり，(17)式の未知量 u とは異なる．(23)式より σ を定めたならば，(22)式を用いて u を決定することが出来る．

以上の比較より，ポテンシャル論で与えられる積分方程式法を classical source density approach とか indirect boundary integral method と呼び，前節の積分方程式法の立場を direct approach といって両者を区別することができる[2)]．

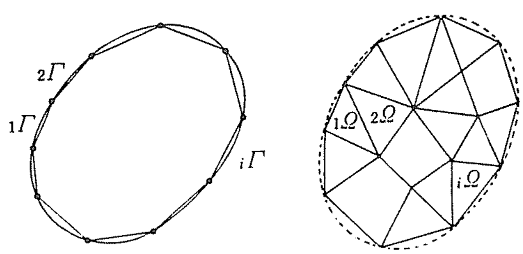
4. 離散化手法

任意形状を有する領域に対する積分方程式の解を解析的に求めることは不可能であるから，近似的に解析するための離散化手法を考える．積分方程式の近似解法については各種の方法が知られているが，ここでは有限要素法で展開されている離散化手法をとり入れることによって，積分方程式の数値解法を組織化することができ，境界要素法もその中に含まれることになる．

積分方程式の離散スキームは解析対象領域と境界の有限要素分割，要素上における未知量の有限次元近似，定積分の数値積分公式による近似化という三つの基本的な手法から成り立っている．

4-1. 領域の有限要素分割

解析対象領域を有限要素法の手法にならい，有限個の要素とよばれる部分領域の和に分割する．



境界要素 (segment)　　内部要素 (cell)

図 3　境界および内部要素

内部 Ω と境界 Γ を各々，M，N 個の内部要素（または cell）$_i\Omega$，境界要素（または segment）$_i\Gamma$ とよばれる要素の和として次のように分割し近似する．

$$\Omega \fallingdotseq \bigcup_{i=1}^{M} {}_i\Omega\ ,\quad \Gamma \fallingdotseq \bigcup_{i=1}^{N} {}_i\Gamma \qquad (24)$$

境界積分方程式(18)の場合には，Ω に関する積分項を含まないので，境界要素分割だけでよいことから境界要素法とよばれることになる．しかしながら，非同次式の Poisson 式のみならず，Hybrid 型積分方程式を対象とする際には，内部および境界の要素分割が必要となる．

4-2. 未知関数の有限次元近似

積分方程式はその積分項に未知な $u, q \in H_u$ を含んでいるので，部分要素内の有限個の値で離散的に表現することにすれば，有限要素法で開発されているスキームを全て利用することが出来る．

未知関数 u およびその導関数 q をヒルベルト空間の有限次元部分空間への射影によって近似化すると，その有限次元部分空間を張る基底関数の組 $\{\mu^\alpha(\boldsymbol{x})\}_{\alpha=1}^{G}$，$\{\lambda^\beta(\boldsymbol{X})\}_{\beta=1}^{H}$ を用いて，次のように有限次元近似表現を与えることができる[5)]．

$$u(\boldsymbol{x})\fallingdotseq \sum_{\alpha=1}^{G}\bar{u}_\alpha\mu^\alpha(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{for } \boldsymbol{x}\in {}_i\Omega) \quad (25)$$

$$u(\boldsymbol{X})\fallingdotseq \sum_{\beta=1}^{H}u_\beta\lambda^\beta(\boldsymbol{X}) \qquad (\text{for } \boldsymbol{X}\in {}_i\Gamma) \quad (26)$$

$$q(\boldsymbol{X})\fallingdotseq \sum_{\beta=1}^{H}q_\beta\lambda^\beta(\boldsymbol{X}) \qquad (\text{for } \boldsymbol{X}\in {}_i\Gamma) \quad (27)$$

上式で，基底関数 μ^α，λ^β を interpolation 関数とするならば，係数 $\bar{u}_\alpha, u_\beta, q_\beta$ は部分要素上の節点値とみなすことができる．

上の未知量の離散化表現式の一番簡単な表現は各部分要素上で一定値となる場合で，上式は

$$u(\boldsymbol{x})\fallingdotseq\bar{u}_0,\quad u(\boldsymbol{X})\fallingdotseq u_0,\quad q(\boldsymbol{X})\fallingdotseq q_0 \qquad (28)$$

となり，$\bar{u}_0, u_0, q_0$ は各部分要素の中央点における節点値と考える．このような近似化を“一定要素”とよんでいる[1,2)]．

この近似化は有限要素法では採用されないものであり，最も単純なスキームであるにもかかわらず，精度の良い近似解が得られることが多く，境界要素法の利点の一つであろう．

4-3. 定積分の数値積分による近似

積分方程式に含まれる定積分項の計算の実行に

あたっては closed form で表現される場合を除いて，適当な数値積分公式を用いることによって近似的に行う必要がある．従って，数値積分公式の選択が重要となり，精度の良いものを使用する必要がある．一般的には積分点を多くとる公式を用いた方が得られる近似解の精度が良くなる[12]．

特異性を有する基本解を含む定積分において，field point と source point とが一致する場合にはその定積分は存在しないことになるので，その実行に当っては，Cauchy の主値とか Hadamard の発散積分の有限部分という意味において計算することになるので注意を要する．このような積分の実行には Cauchy の主値積分がその特別な場合として含まれるような超関数による pf 積分の概念[6] を利用することが便利であろう．

4-4. 離散化方程式

以上の離散化手法を積分方程式に適用すると，離散的な代数方程式を得る．ここでは1例として，(18)式の離散化表現を与えることにしよう．

(18)式を節点 $\boldsymbol{X}_i$ について，(26, 27)式を考慮して書き換えると，次の離散化方程式となる．

$$\frac{1}{2}u_i+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{H}h_{ij}{}^{\beta}u_{\beta}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{H}g_{ij}{}^{\beta}q_{\beta} \qquad (29)$$

ただし，$u_i=u(\boldsymbol{X}_i)$，各 segment 上の定積分は数値積分公式により積分点 ${}_{\xi}\boldsymbol{Y}$ と重みファクター Δ_{ξ} より近似的に次式で与えられるものとする．

$$\int_{j\Gamma}\lambda^{\beta}(\boldsymbol{Y})\phi(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})d\Gamma \fallingdotseq \sum_{\xi}\Delta_{\xi}\lambda^{\beta}({}_{\xi}\boldsymbol{Y})\phi(\boldsymbol{X}_i,{}_{\xi}\boldsymbol{Y})\equiv g_{ij}{}^{\beta} \qquad (30)$$

$$\int_{j\Gamma}\lambda^{\beta}(\boldsymbol{Y})\frac{\partial\phi}{\partial n}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})d\Gamma \fallingdotseq \sum_{\xi}\Delta_{\xi}\lambda^{\beta}({}_{\xi}\boldsymbol{Y})\frac{\partial\phi}{\partial n}(\boldsymbol{X}_i,{}_{\xi}\boldsymbol{Y})\equiv h_{ij}{}^{\beta} \qquad (31)$$

(29)式を全ての節点に対して構成し，節点ベクトル $\boldsymbol{U},\boldsymbol{Q}$ に関して表現すると次の行列表現

$$\boldsymbol{HU}=\boldsymbol{GQ} \qquad (32)$$

となり，与えられた節点ベクトルに対して未知節点量を決定することが出来る[1,2]．

5. 例題（非自己随伴型2点境界値問題）

次の非自己随伴型2点境界値問題[2] に対して，展開してきた理論を例示することにする．

$$\text{基　礎　式：}u_{,xx}-u_{,x}+u=0 \quad (0<x<1) \qquad (33)$$

$$\text{境界条件式：}u(0)=0, \quad u(1)=1 \qquad (34)$$

この問題の弱解表現より得られる関係式

$$\int_0^1(\varphi_{,xx}+\varphi_{,x}+\varphi)u\,dx =\varphi_{,x}(1)+\varphi(1)-[u_{,x}\varphi]_0^1 \qquad (35)$$

の左辺に注目し，φ として，次の微分方程式

$$\varphi_{,xx}+\varphi_{,x}+\varphi=\delta(x-y) \qquad (36)$$

の基本解 ϕ をとるならば，(35)式より境界積分方程式を誘導することができる．

ここでは，φ として，(33)式の主要作用素に関する次の微分方程式の基本解 ω を採用してみよう．

$$\varphi_{,xx}=\delta(x-y) \qquad (37)$$

するとこのような φ に対して，(35)式は次の Hybrid 型積分方程式となる．

$$u(x)=-\int_0^1 u(y)\{\omega_{,y}(x,y)+\omega(x,y)\}dy +\omega_{,y}(x,1)+\omega(x,1)-[u_{,y}(y)\omega(x,y)]_0^1 \qquad (38)$$

ただし，

$$\omega(x,y)=\frac{1}{2}|x-y|\ , \qquad (39)$$

$$\omega_{,x}(x,y)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,(x-y) \qquad (39)'$$

(38)式を台形公式を用いて離散化することによって得られた連立方程式の各分割数に対する近似解と正解との比較を表2に示す．

表 2　近似解と正解との比較

x ＼ 手法	正　解	Hybrid 型積分方程式法			
		$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$
0.25	0.193818	——	0.193690	0.193786	0.193810
0.50	0.428994	0.428571	0.428884	0.428966	0.428987
0.75	0.700663	——	0.700642	0.700658	0.700662

6. おわりに

以上，境界値問題の積分方程式による近似解法という立場から"境界要素法"の特徴を述べてきた．現在のところ，境界要素法は各種の問題に対して活発な研究が行なわれているので，今後ますますその発展が期待できる．新しい近似解析法の

発達は我々を取りまく現象に関する多くの知見をもたらすことだろう．

本論では詳しく述べられなかったが，特に境界要素法がにが手とする固有値問題[8]，非自己随伴問題[9]に対して Hybrid 型積分方程式法が有効であることが示されている．またシェル（曲面板）の曲げ問題に現われる高階連成問題に対しては作用素に注目し，正準分解を導入して得られる連立 Hybrid 型積分方程式法が有効である[10,11,12]．さらに連続体どおしの相互作用問題も境界要素法によって定式化できることが示されている[13,14,15]．この他，非線型問題への適用，境界要素法と有限要素法等他の解析手法との接合解法が発展しつつある．最後に，有限要素法の誤差評価と同様に，境界要素法における近似解の誤差評価の問題に解答が与えられなければならないと考える．

参　考　文　献

1) Brebbia, C. A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press (1978)
2) Brebbia, C. A. & S. Walker: Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths (1980)
3) Banerjee, P. K. & R. Butterfield: Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw Hill (1981)
4) Kellogg, O. D.: Foundations of Potential Theory, Springer (1929)
5) Oden, J. T. & J. N. Reddy: An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley & Sons (1976)
6) 今井功：応用超関数論 I，サイエンス社 (1980)
7) 登坂宣好：「積分方程式による境界値問題の近似解法」(その1．一般的定式化) 日本建築学会論文報告集第 321 号 pp. 49-55 (1982. 11)
8) 登坂宣好，角田和彦：「積分方程式による固有値問題の近似解析」(投稿中)
9) Tosaka, N. & K. Kakuda: "An Integral Equation Method for Non-Self-Adjoint Eigenvalue Problems and Its Applications to Non-Conservative Stability Problems" (submited)
10) 登坂宣好：「正準型境界値問題の積分方程式表現について」日本鋼構造協会第15回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集 pp. 23-28. (1981. 7)
11) 角田和彦，登坂宣好：「基本解を利用した偏平シェル解析」同上 pp. 29-34 (1981. 7)
12) 角田和彦，登坂宣好：「積分方程式による偏平殻の固有値解析」第28回構造工学シンポジウム論文集 pp. 183-190 (1982. 2)
13) 登坂宣好：「連続体における連成問題の近似解法について」第31回応用力学連合講演会論文抄録集 pp. 351-352, (1981. 11)
14) 登坂宣好：「弾性体の連成問題の定式化について」第28回構造工学シンポジウム論文集 pp. 175-182. (1982. 2)
15) Tosaka, N. & K. Kakuda: "Numerical Approximations of Coupled Fluid-Structure Systems" Finite Element Flow Analysis (edited by T. Kawai), pp. 803-810. University of Tokyo Press (1982)

(とさか・のぶよし，日本大学・生産工学部)