数学入門公開講座

平成4年8月4日（火）から8月13日（木）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 確率論の話題から（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　楠　岡　成　雄

確率論に関連した4つの話題（シャノンの情報理論、確率制御の話題、シミュレーテッド・アニーリング、乱数の理論）について話を行う予定である。どのように問題をとらえるかといった考え方について話の力点を置いて話していく。

2. 「保証書」付き数値計算法（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　室　田　一　雄

計算機のできる数値計算は、所栓は誤差を含んだ近似計算である。それでも、その計算結果に従って橋は作られ列車は走る。数値計算誤差につきまとう不安感を一掃し、ぼんやりとした計算結果に基づいてはっきりとした結論を導き出す手法について解説する。

3. 「時間とミクロ世界・マクロ世界」（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　小　嶋　泉

「時間とは何か？人が問わなければ、私はそれを知っている。だが人に説明しようとすると、私は最早それを知っていない」――時間を巡る謎のとらえどころのなさは、聖アウグスティヌスのこの有名な言葉によく表わされている。自然法則を書き下す上で時間概念は不可欠であり、今世紀の物理学革命も時空間概念の根本的変革と軌を一にして達成された。それによってこの「謎」はどう解き明されたのか？時間概念を軸に、基本的な物理法則とその論理構造を概観し、そこから、自然の運動・構造・歴史を理論的・数学的に記述することの意味を改めて考え直してみたい。

4. グラフと組合せ論（7時間）

京都大学数理解析研究所・助手　松　本　眞

グラフ理論や組合せ論の世界は、まだいまいち体系的ではありませんが、たとえばかつての四色問題などのように、誰でも問題の内容がすぐ理解できるのに、証明はいまだ満足にされていないような楽しい予想が小石のように転がっています。こうした楽しそうな部分をつまみぐいして、平易にグラフと組合せ論の紹介をします。

時　間　割

時間 ＼ 日	8月4日(火)	5日(水)	6日(木)	7日(金)	8日(土)	9日(日)	10日(月)	11日(火)	12日(水)	13日(木)
13:15～15:00	楠岡	楠岡	楠岡	楠岡	休		小嶋	小嶋	小嶋	小嶋
15:00～15:15	休憩						休憩			
15:15～17:00	室田	室田	室田	室田	講		松本	松本	松本	松本

４．グラフと組合せ論　（７時間）

京都大学数理解析研究所・助手 松 本　 眞

1992, AUGUST 10,11,12,13　　　15:15-17:00

グラフと組み合わせ論

松本　眞

グラフ理論や組み合わせ論は、数学では歴史の浅い、いまだ体系の整っていない分野といえます。

近年では、代数的組み合わせ論、数学基礎論との関係、アルゴリズムと計算量の理論との関係など、かなり体系的で深い理論が構築されているのも事実ですが、ここではできるかぎり体系的であることをやめて、一話一話を独立完結した話とし、小学校算数程度の基礎知識しか必要としない話題にしぼって、未解決の問題や最近はじめて解けた問題をもりこみながら、おもしろそうな部分だけをつまみ食い的に紹介して行こうと思っています。

したがって、4回のお話のうち、どれを休んでも、またどこで途中で抜けても全体への影響はないはずです。必要なものは、パズルやクイズへの興味と、多少の忍耐力で、大学教養程度の数学の知識は全く不要です。

このテキストは、四日分の話の教科書として使うためのものではなく、「どんな話をするのか」を示すためのものです。これを見て、面白そうだとか、くだらなさそうだからやめようとかきめていただくためのもののつもりです。

1　グラフ

次のパズルは、某フジＴＶ系のクイズ番組「たけし・逸見の平成教育委員会」から無断で借用したものです。

問題 1　くまの親子、とらの親子、ライオンの親子の三組の親子が川の左岸にいる。左岸には小さな船が一隻ある。この船を使って、全員が右岸に移りたい。ただし、以下のルールがある。

1. 船に乗れるのは一度に一匹か二匹。
2. 誰も乗っていない船は動かない。
3. どの動物も、親がいれば子供を守る。
4. 守ってくれる自分の親がいないのに他人の親がいるときは、子供は喰い殺されてしまう。

最小何手で全員が右岸に移れるか？

例えば、最初にくまの親ととらの親が船にのって右岸に出発すると、右岸につく頃にはくまの子供もとらの子供も左岸でライオンに喰い殺されてしまいます。

また、たとえばくまの親子が右岸にいる場合、とらの子供とライオンの子供が二人で船で左岸から右岸にわたったとすると、右岸到着のときにとらの子供とライオンの子供はくまの親に喰い殺されます。

問題 2　次の図のように川に橋がかかっている。全ての橋をちょうど一回ずつ渡ることができるか？

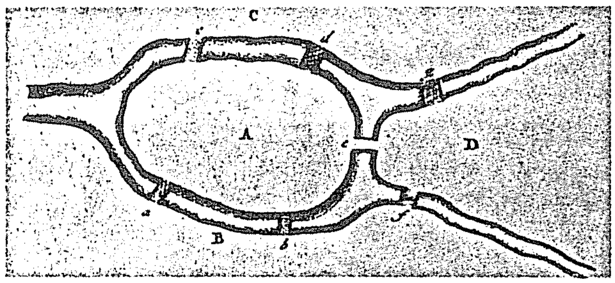


Figure I.12. The seven bridges on the Pregel in Königsberg.

プレーゲルの七橋問題

問題 3　大阪を走る六つの地下鉄線（御堂筋線、谷町線、四つ橋線、中央線、千日前線、境筋線）を全部一度ずつ使って途中下車することなく回ることができるか？さらに、乗り初めの駅と終わりの駅を一致させることができるか？

これらの問題は、もちろん知能を駆使して解くことのできる問題ですが、時間をかけてうまい図をかきさえすればだれにでも一目で解ける問題です。

1.1　連結性

問題 1 に対しては、次のような図をかきます。

親	く	と	ら	
子	く	と	ら	船

これで、左岸にいる動物の全てと船のある無しを記述します。次にどんな状態に移れるでしょうか？一匹だけ船に乗るとすると、親だけが乗るのは不可能です。なぜなら、例えばくまの親が船に乗ると、船がでたとたんにくまの子どもが喰い殺されてしまうからです。そこで、一匹だけ船に乗るなら、子供ということになります。したがって、次の状態は

親	く	と	ら	親	く	と	ら	親	く	と	ら
子		と	ら	子	く		ら	子	く	と	

の三通りあります。次に、二匹が船に乗るとすると、子ども同士が船に乗るか、一組の親子が船に乗るかしかありません。前者の場合

親	く	と	ら
子	く		

親	く	と	ら
子		と	

親	く	と	ら
子			ら

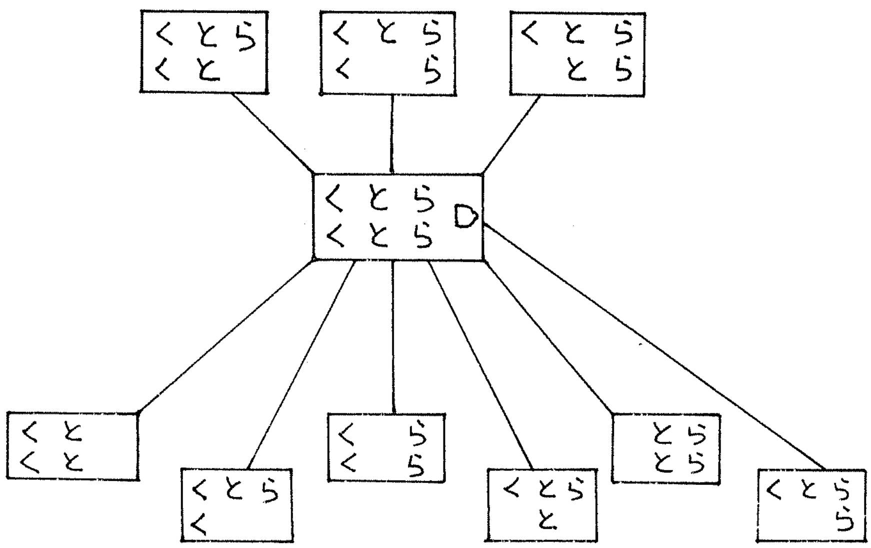
の三通り、後者の場合

親		と	ら
子		と	ら

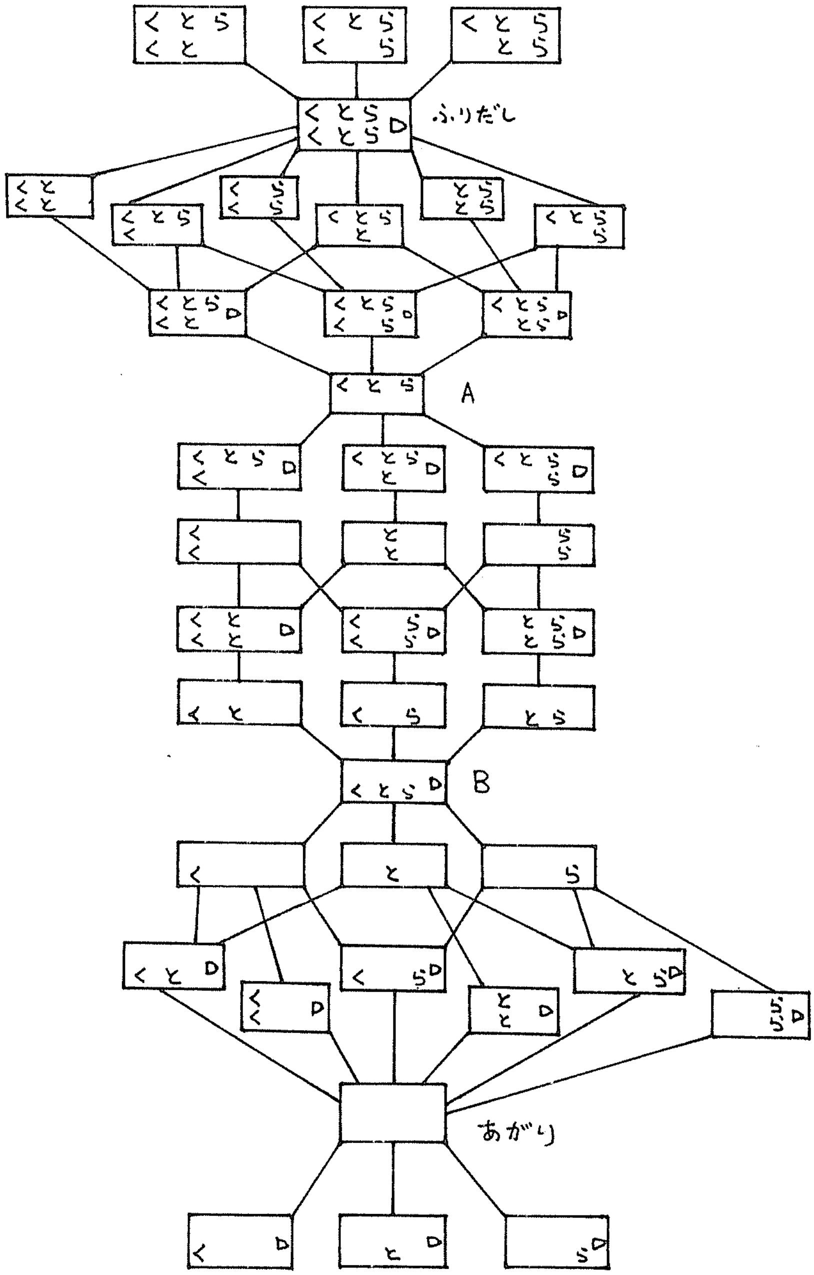
親	く		ら
子	く		ら

親	く	と	
子	く	と	

の三通りあります。こうして移りあえる状態を互いに線で結びます。



次に、これらの状態から移れる状態を全て書いて、線で結びます。これを繰り返していくと、次の図を得ます。


ふりだし
A
B
あがり

これで、全員が渡るのに必要な最短手順は十一手であることがわかります。このような図のことを、「グラフ」とよびます。各点のことを「頂点」「点」などとよび、点と点を結ぶ各線分を「辺」とよびます。

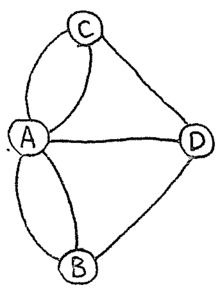
この図をよくみると、「一度は左岸に親三匹だけが残され、次に子ども三匹だけが残される」こともすぐわかります。それは、このグラフから頂点A、Bをとりのぞくと、グラフが切れてしまうからです。

グラフがつながっていることを、「連結である」といいます。頂点A、Bをのぞくと、グラフは三つに切れてしまいます。このそれぞれのグラフのことを、「グラフから頂点を除いたあとの連結成分」といいます。この例では、連結成分は三個です。

もし、問題1でさらに「親だけが三匹一緒になると、けんかを始めてしまう」という条件を加えると、もう問題は解けません。全員左岸にいる状態から始めた場合、A、Bを除いたあとの第一の連結成分が到達し得る全ての状態です。

1.2　一筆書き

問題2は、オイラーの一筆がき定理として有名な問題です。「島」を頂点とし、橋を辺としてグラフを書くと、次のグラフを得ます。



さて、この図形を一筆書きするとします。一筆書きでは、始点と終点だけに奇数本の線がでて、ほかの点ではでている線の数が偶数本です。しかし、上のグラフには奇数本の線のでている頂点が4つあります。したがって、この図を一筆書きするのは不可能です。

ある頂点からでている辺の数を、その頂点の次数といいます。

定理１　（オイラー、１７３６年）グラフが一筆書きできる必要十分条件は、グラフが連結で、しかも次数が奇数になるような頂点が多くて二つであることである。

数学の世界にグラフが初めて現れたのが、このオイラーの定理だといわれています。全ての辺を一度だけ通る道を「オイラー通路」といい、始点と終点が一致しているオイラー通路を「オイラー閉路」といいます。

1.3　ハミルトン閉路

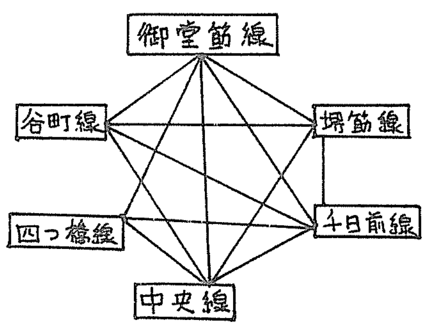
この章から、グラフに次の条件を加えます。

条件　グラフには、二つの点を結ぶ辺はあっても一本とする。また、辺の両端の点が一致することはないとする。

上の条件を満たすグラフを「単純グラフ」といいます。次の例の１、２は単純グラフではありません。

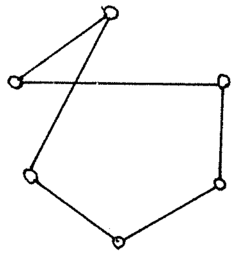
1　　　2

問題３に対しては、次のようなグラフをこしらえます。六つの地下鉄線を頂点とし、乗換のできる駅がある時には辺で結びます。すると、次のようなグラフを得ます。



問題は、「どの頂点をも一度だけ通る道があるか。どの頂点をも一度だけ通る始点と終点の一致した道（閉路という）があるか。」と言い替えられますか

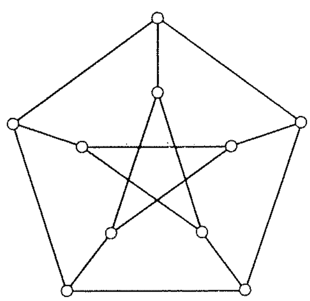
ら、例えば次のような道が答を与えます。



この問題にあらわれたような、「全ての頂点を一度だけ通る閉路」のことを「ハミルトン閉路」と呼びます。与えられた一般のグラフに対して、ハミルトン閉路が存在するかどうか判定する問題は、なかなかむずかしい問題です。（計算量の言葉を使うと、「ＮＰ完全」であることがわかっていて、オイラーの一筆がき問題とは似ているようでずっとむずかしい問題となっています。）ハミルトン閉路の存在する簡単な必要十分条件はいまだに知られていません。簡単な必要条件は、

命題１　グラフＧにハミルトン閉路があるならば、Ｇから勝手に何点かを取り除いたとき現れる連結成分の数は取り除いた点の数以下である。

証明は、ハミルトン閉路だけに注目すれば簡単です。この条件が十分条件になっていないことは、次のグラフ（反例の王様ペテルセングラフ）によってわかります。



さて、最初の未解決予想を述べられるところにきました。これは１０年以上前から予想されながら、いまだに証明も反証もされていません。

予想 1　連結グラフGがつぎの条件を両方満たせばハミルトン閉路をもつ。

1. 頂点の数が3以上。
2. グラフGが連結でなくなるように勝手に何点かとりのぞいたとき、現れる連結成分の数は除いた点の個数の半分以下。

ハミルトン閉路をもつ十分条件は、ほとんど知られていませんが、次のものが有名です。

定理 2　（ディラック）グラフGのどの点の次数も全頂点の数の半分以上なら、Gはハミルトン閉路をもつ。

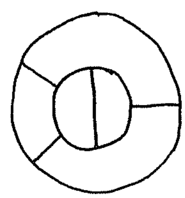
この定理によれば、問題3はグラフをかかなくても各地下鉄線から他の線三つ以上に乗り換えられることを確かめさえすれば、答が出せました。

1.4　採色数

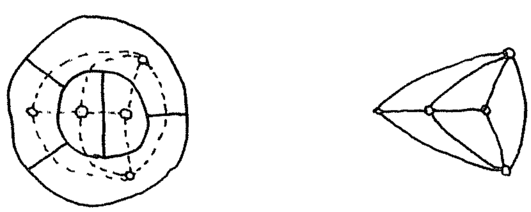
四色問題は、最近計算機を使って解かれた有名な難問として知られています。

問題 4　どんな地図でも、四色あれば隣あう二国を別の色にするように塗り分けることができるか。

例　次の地図を四色で塗り分けよ。



地図の塗り分けは、その「相対グラフ」の点採色とみなすことができます。



相対グラフ

約束１　グラフの点採色とは、各頂点に色をつけること。

約束２　グラフに点採色を行ったとき、自動的に辺にも次の条件で色がついてしまうものとする。

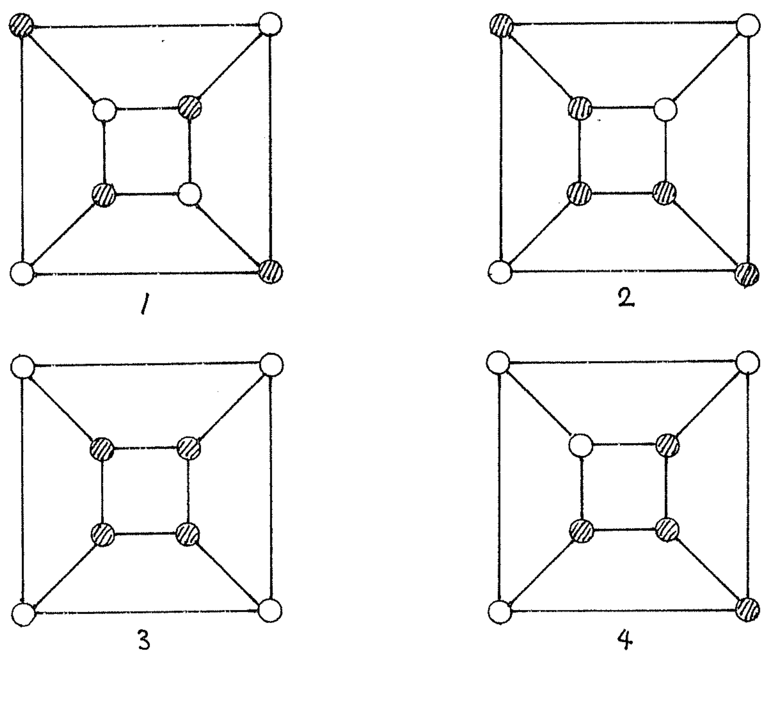
1. 両端が同じ色で塗られている時は、その色に染まる。
2. 両端が違う色で塗られているときは、無色のまま。

定理３　平面上に点、辺が重ならないようにかかれたグラフ（平面グラフという）は、点を四色に塗って辺を無色のままにできる。

この定理の証明はこのお話の範囲を越えるのでできません。ここでは、よく似た問題で数年間未解決でありながら全く小学生的な方法で解かれた問題と、未解決の問題を述べたいと思います。

約束３　グラフの「点線形樹化採色」とは、点採色であって、どの色（例えば青）に注目しても、青色の辺たちは枝分かれもしないし閉じた道もつくらないようになる採色のこと。

例　次の１、２の採色は点線形樹化採色だが、３、４はそうではない。



1　2　3　4

次の定理は、数年間未解決で難問と思われてきましたが、おととしシンガポールの数学者によってあっさりと解かれてしまいました。

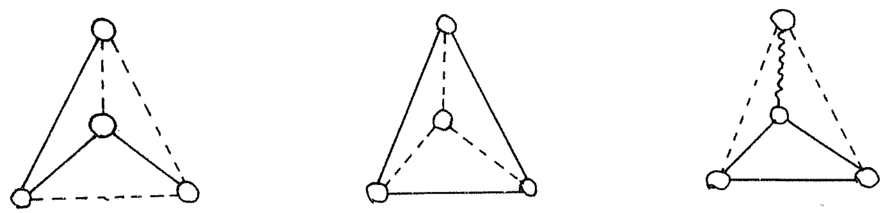
定理４　平面グラフは三色で点線形樹化採色できる。

次は未解決予想です。

約束４　グラフの辺採色とは、各辺に色を塗ること。

約束５　グラフの「辺線形樹化採色」とは、辺採色であって、どの色（例えば青）に注目しても、青色の辺たちは枝分かれもしないし閉じた道もつくらないようになる採色のこと。

例　次の１は辺線形樹化採色だが、２、３はそうではない。



1　　2　　3

次の予想は、やはり１０年以上の歴史をもつ難問ですが、上の問題のようにあっさりと解けてしまうかも知れません。

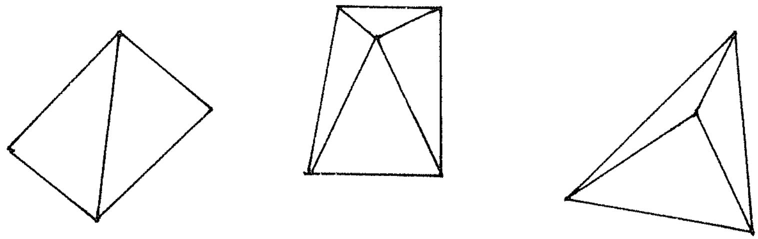
予想２　グラフＧのどの頂点の次数も皆同じｒであるとする（ｒ－正則グラフという。）このとき、（ｒ＋１）／２以上色の種類があれば、辺線形樹化採色ができる。

注　上の予想は $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ では正しい。

1.5　多面体の剛性

厚紙を多角形に切り抜いて、辺をセロテープで張り合わせます。たとえば、六角形と五角形を使ってサッカーボールをつくることができます。このとき、

サッカーボールはへにゃへにゃとは動きません。この性質を剛性といいます。次の例の１、２は動きますが、３は動きません。



1. 三角形２枚　　2. 底のない四角すい　　3. 底のない三角すい

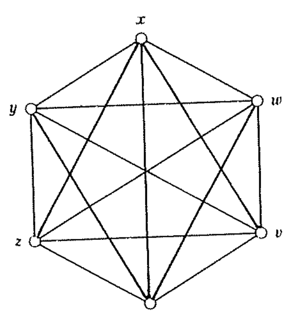
オイラーは、閉じた多面体（サッカーボールのように、ふちのない、あなのあいていない多面体）は剛性をもつと予想していたようです。コーシーは、１８１３年に凸多面体は剛性をもつことをグラフ理論を用いて証明しました。また、１９７７年、コネリーは凹多面体で変形するものをつくりました。これらを紹介しようと思います。

2　ラムゼー理論

ふつうの人が三人あつまると、そのうち二人は同性です。

ふつうの人が六人あつまると、そのうちある三人が互いに友達であるか、あるいはある三人が互いにともだちではありません。これは五人ではなりたちません。なぜなら、五人を五角形にならべてとなりの人同士が友達であるとすると、どの三人を選んでも友達と友達でないひとがまじってしまいます。

グラフの言葉でいうと、下のグラフ（６次の完全グラフ、Ｋ６とよばれる）を二色で辺採色したときに、一色からなる三角形がある、といいかえられます。



ラムゼー理論は、このように「どんなｋとどんな構造に対しても、ある十分おおきいものをもってくれば、ｋ分割したときそのどれかに指定された構造がはいっている」ことを主張します。

この理論の入り口を紹介し、ついでに確率的存在証明の有効な例をいくつか紹介します。

3　交差族と高木関数

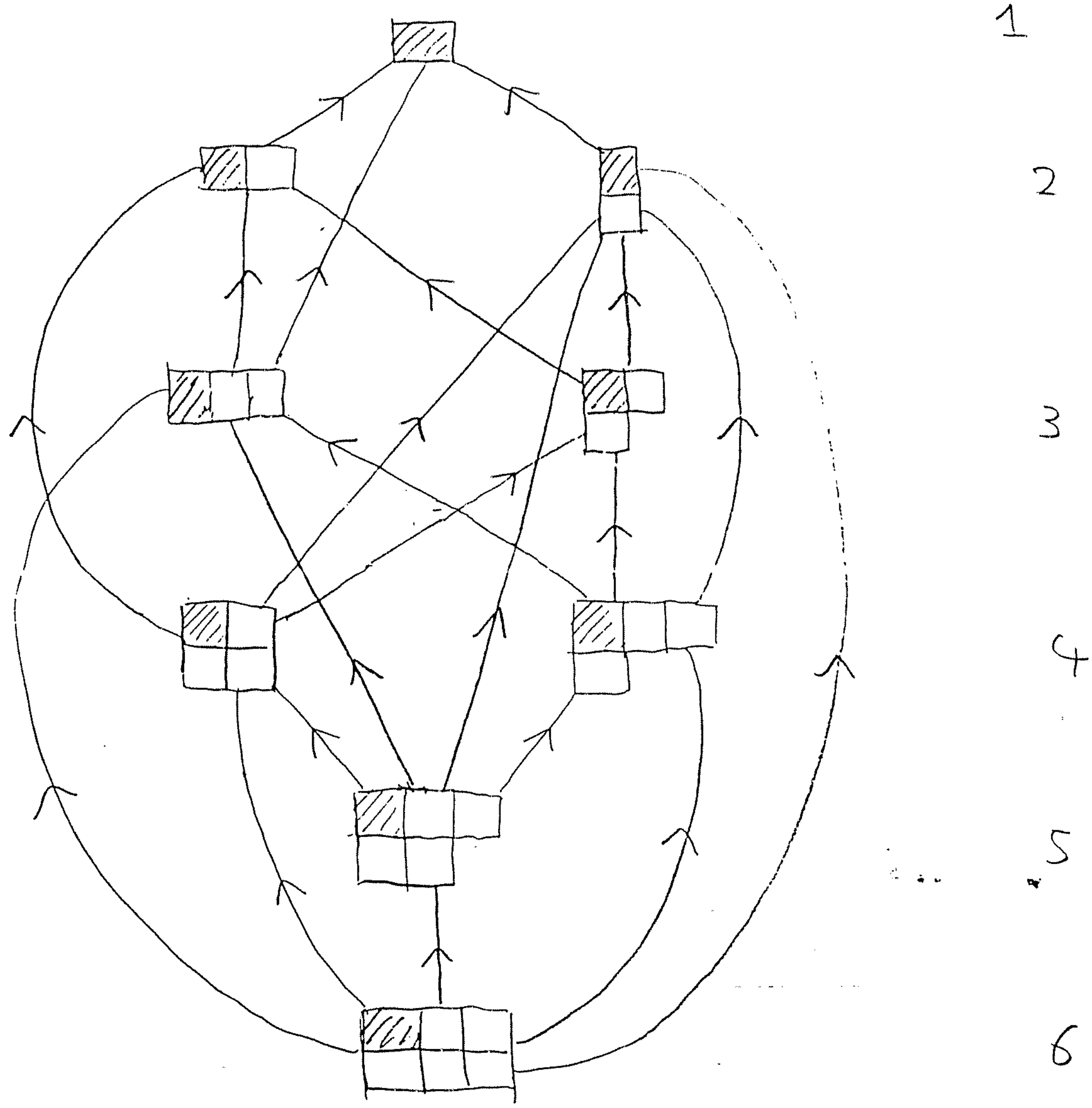
ｎ個の元からなる集合Ｘを固定します。Ｘの部分集合の集合のことを、Ｘの部分集合族といい、ふつうＦであらわします。

Ｆが交差族であるとは、Ｆのどの二元も（それらはＸの部分集合である）交わりを持つことをいいます。Ｆにさまざまな制限をつけて、Ｆの元の個数の最大値が研究されています。なにせ数学的構造が貧弱ですから、ろくな道具がありません。もっとも有用な道具は、クルスカル・カトナの定理です。

ところが最近、このクルスカル・カトナの定理に現れる評価関数が、高木貞治が導入したいたるところ微分不可能で連続な関数「高木関数」に一様に収束することが証明されました。

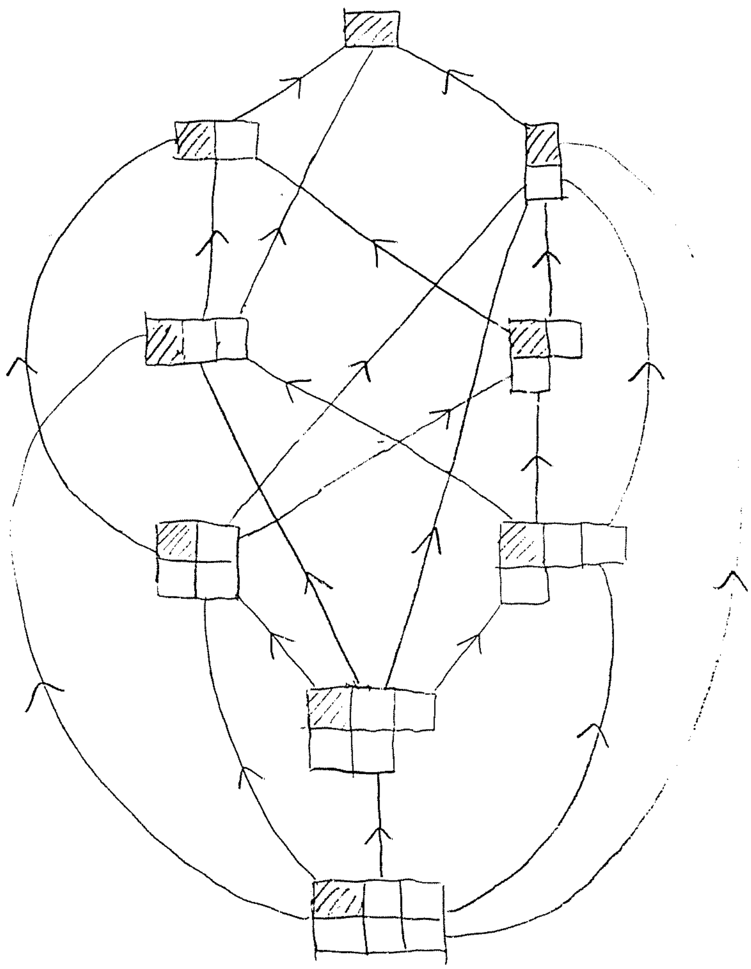
全く関係のないように見える二分野に独立に現れた二つの関数の関係をながめたいと思います。

この原稿にかかれたことを全てお話に盛り込むかどうかはまだわかりません。もし、受講される方々の中で、「こんな問題を考えているのだけれどどうだろうか」という方がいらっしゃいましたら、連絡を下さい。全てにお返事はできないかも知れませんが、参考にさせていただきたく思います。



'92, 8/13. 松本.

チョンプの有向グラフ．（  の場合）



1

2

3

4

5

6

'92，8/13．松本．