数学入門公開講座

平成５年８月３日（火）から８月６日（金）まで

京都大学数理解析研究所

平成5年度(第15回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，平成5年8月3日～8月6日開催)

講師及び内容

1．論理とコンピュータ（6時間）

京都大学数理解析研究所・助手　服　部　隆　志

コンピュータのプログラムは多くの場合、コンピュータの動作を順序正しく指定するような形になっています。それに対して、論理プログラミングと呼ばれる方法は、数学的な論理式をそのままプログラムとして使います。ここでは、論理プログラミングがどのように働くのか、その数学的基礎はどうなっているのかを考えていきます。また、論理プログラミングに関係する話題もいくつか紹介します。

2．組紐群について（6時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　織　田　孝　幸

組紐は太古からある日本の伝統工芸であるが、数学として組紐群（braid group）の研究は1930年ごろから、トポロジーの問題である結び目（knot）や絡み輪（link）の研究の助けとするため、E.Artin によって系統的に調べ始められた。

ここ10数年これが数学の他のいろいろな分野（物理数学、共形場の理論、C^*環、整数論 etc.）とも関連することが分かってきて、多くの研究がなされている。

組紐群について基本的な事実について簡単な入門的話しをする。

3．渦運動と乱流（6時間）

京都大学数理解析研究所・助手　大木谷　耕　司

流体力学に現われる基礎方程式の解の振舞いについては、数学的には未知な点が多い。ここでは、渦運動を中心に基礎方程式の解説からはじめ、現在までに知られている厳密解を紹介する。さらに、数値解析的に得られた解を通して、乱流について話しをする。乱流の‘大きな’カオスとしての側面にも触れる予定である。

時　　間　　割

日 / 時間	8月3日(火)	4日(水)	5日(木)	6日(金)
11：00～12：30	服部	服部	服部	服部
12：30～13：45	休　憩			
13：45～15：15	織田	織田	織田	織田
15：15～15：30	休　憩			
15：30～17：00	大木谷	大木谷	大木谷	大木谷

平成5年度(第15回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成5年8月3日～8月6日開催)

渦運動と乱流

京都大学数理解析研究所・助手　大木谷 耕司

1993, AUGUST 3,4,5,6,　15:30 ~ 17:00

渦運動と乱流

大木谷耕司

1993 年 8 月

1 流体の運動方程式

1.1 ナヴィエストークス方程式

流体力学では流体（即ち、液体や気体）を流体粒子という粒の集まりからなると見なし、その運動を考えます。具体的には、水や空気を思い浮かべて下さい。一つ一つの流体粒子は、マクロなスケールから見ると極めて小さいものですが、それでも莫大な数の分子を含んでいます。このような理想化のもとで、ニュートンの古典力学を流体に適用したものが、オイラー方程式とよばれる最も基礎的な運動方程式です。

流体の密度を ρ とすると運動方程式は

$$\rho \times (\text{加速度}) = \text{力}$$

となります。

時刻 t で 空間の点 $\boldsymbol{x}$ にある粒子の持つ速度を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ と書くことにします。この時この流体粒子のもつ加速度は一見すると $\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ となると思いそうですが、これは正しくありません。なぜなら、時刻 t で点 $\boldsymbol{x}$ にいた粒子は、少し時間が経つと一般には同じ場所にはいなくなるからです。後の時刻 $t+\delta t$ で粒子が占める点 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ をと書くとこの粒子の加速度は

$$\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}\delta t, t+\delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\delta t} \approx \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}. \tag{1.1}$$

ここで、最も簡単な場合、力は流体粒子が互いに及ぼし合う圧力勾配だけで、圧力を p と書くとこれは $-\nabla p$ と表せます。したがって、流体の運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p/\rho \tag{1.2}$$

となります。これが、オイラー方程式です。オイラー方程式は、速度場の無限大の自由度のため偏微分方程式です。

粒子は流されるため左辺第２項が現われるのですが、これは、速度について２次の量で非線形です。最も簡単な場合、流体は圧縮されないと仮定します。（このような仮定を設けても流れは十分な現実性を保っていることが知られています。）このことを密度が一定の場合に式で表すと、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{1.3}$$

となります。注意しなければいけないのは、圧力は速度とは独立な変数ではないということです。実際、(1.2) の発散をとると

$$-\nabla^2 p/\rho = \nabla\cdot((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}) \tag{1.4}$$

が得られます（ここで、密度は ρ 場所によらず一定とします）。各瞬間の速度場が分かれば、圧力はのポアソン方程式（ポテンシャル問題）を解けば得られます。たとえば、個体壁がなくて無限遠で流体が静止している場合には、

$$\frac{p}{\rho} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla'\cdot((\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')\cdot\nabla')\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'))}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x}' \tag{1.5}$$

$\frac{1}{4\pi}$

となります。ここで、速度は空間全体で分かっている事が必要であり、このことは流体の相互作用は局所的ではないということを意味します。この非局所性は、非線形性とあいまって運動方程式の性質を調べることを難しくしています。

現実の流体には内部摩擦があり、粘性と呼ばれています。導出は省略しますが、上の、オイラー方程式に拡散項を加えることによって非常に良い近似で、粘性流体の運動を表すことができます;

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p/\rho + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1.6}$$

これは、ナヴィエストークス方程式と呼ばれ、極めて適用範囲が広い基礎方程式です。非常に小さい粘性率に対するナヴィエストークス方程式の解がいわゆる乱流(乱れた流れ)であると考えられます。

1.2 渦度方程式

非線形項の働きを解釈するためには流体粒子の自分の周りの回転を考えるのが便利です。このような自転は渦度と呼ばれ数学的には回転というベクトル演算を速度に施して表します。すなわち、渦度というベクトル場は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \tag{1.7}$$

で定義します。(1.2) 式の回転をとると、圧力項が消去できて

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}. \tag{1.8}$$

という形の渦度を支配する方程式（渦度方程式と呼ばれています）が得られます。

この式によれば、空間内のある一点での渦度の時間変化は、対流（左辺第１項）、粘性拡散（右辺第２項）、そして右辺第１項からなっていることが分かります。特に、右辺第１項

$$(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

は渦度方向の速度勾配という意味を持ち一般に渦度の増加をもたらします。この渦伸長項の性質を明らかにすることが流体力学に関する数学的問題の中で最も重要なものひとつである、といっても過言ではありません。

ナビエストークス方程式を連続の式をの下で解く事と、渦度方程式を連続の式の下で解くことは同値です。ナビエストークス方程式の圧力項に由来する非局所性は、渦度方程式では、速度を渦度によって表す際の非局所的な関係としてのこっていることに注意して下さい。

1.3 付録：ベクトル解析の公式

参考のため、以下に流体力学で良く使うベクトル解析の公式を列挙しておきます。

勾配

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{1.10}$$

発散

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{1.11}$$

回転

$$\nabla\times\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \tag{1.12}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{1.13}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.14}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.15}$$

2 引き伸ばしを示す厳密解

非線形波動方程式のソリトンの理論では、広い範囲の非線形方程式の一般解が線形方程式を取り扱う方法を拡張することによって得られることが知られています。ナヴィエストークス方程式では、乱流をも表現し得るということを思い起こせば、（実際、数値解析的にカオス的な振舞いが確認されている）方程式そのものを線形化し一般的に厳密解を得ようと試みは望むべくもないことが納得できるでしょう。しかしながら、非常に特殊な場合ではありますが、幾つかの簡単な厳密解が知られていて、乱流中の局在構造のモデルとして受けとられています。

以下に、これらを紹介します。ポイントは線形で厳密に解ける拡散方程式（熱伝導方程式）に問題を帰着させることです。

2.1 バーガース - 神部 - マイーダの渦

次のような平均流をともなう流れを考えることにしましょう；

$$\boldsymbol{u}(x,y,t) = (-\alpha x + u(x,y,t), -\beta y + v(x,y,t), (\alpha+\beta)z) \tag{2.1}$$

ただし、α, β は定数とし、u, v は無限遠ですみやかに 0 になるとします。

この時、渦度方程式および連続の式は

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (-\alpha x + u)\frac{\partial\omega}{\partial x} + (-\beta x + v)\frac{\partial\omega}{\partial y} = (\alpha+\beta)\omega + \nu\nabla^2\omega, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

となります。連続の式からある関数 ψ （流れ関数という）が存在して速度は

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.4}$$

と書くことができます。ここでさらに、$\alpha = \beta$、そして ω, ψ は $r = \sqrt{x^2+y^2}$ だけの関数と仮定すると、

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

となり、対流項を消去することができ、線形化できます。次に、渦度を $\omega = \exp[2\alpha t]\Omega$ のように変換すると方程式は

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \alpha x\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \alpha y\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \nu\nabla^2\Omega \tag{2.6}$$

となります。さらに、空間と時間を

$$X = \exp[\alpha t]x, Y = \exp[\alpha t]y, T = (1-\exp[2\alpha t])/2\alpha \tag{2.7}$$

のように変換すると、結局、拡散方程式

$$\frac{\partial\Omega}{\partial T} = \nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right) \tag{2.8}$$

が得られます。この方程式の一般解は

$$\Omega(X,Y,T) = \frac{1}{4\pi\nu T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(X,Y,0)\exp\left[-\frac{(X-X')^2+(Y-Y')^2}{4\nu\cancel{t}}\right]\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y' \tag{2.9}$$

T

と書くことができ、従って、元の変数では、

$$\begin{aligned}\omega(\boldsymbol{x},t) &= \exp[2\alpha t]\Omega(\exp[\alpha t]\boldsymbol{x}, (\exp[2\alpha t]-1)/2\alpha) \\ &= \frac{\alpha\exp[2\alpha t]}{2\pi\nu(\exp[2\alpha t]-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\boldsymbol{X}',0)\frac{\alpha(\exp[\alpha t]\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}')^2}{2\nu(\exp[2\alpha t]-1)}\mathrm{d}\boldsymbol{X}'\end{aligned} \tag{2.10}$$

exp[−　]

となります。この解は十分時間が経った時、つまり、$t \to \infty$ の極限で、

$$\omega(x,t) \to \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu}\exp[-\alpha r^2/2\nu] \tag{2.11}$$

という定常解に近付くことが分かります。ここで、Γ は

$$\Gamma = \int\int \mathrm{d}x'\omega(x',0) \tag{2.12}$$

で、循環と呼ばれます。(2.11) はバーガースの渦管と呼ばれ乱流の中の微細構造の候補のひとつです。このような定常解は、平均流による引き伸ばしの効果と粘性による散逸つりあってもたらされたものです。なお、~~曲~~座標 (r,θ,z) では、対応する速度場は

円柱

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{2}\alpha r, \\ u_z &= \alpha z, \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}(1-\exp[-\alpha r^2/4\nu]) \end{aligned} \tag{2.13}$$

と書けます。同様な解は、$\alpha > 0, \beta = 0$ の場合にも得られ、この時の渦度の大きな領域は層状をなします。

- J.M. Burgers, Adv. Appl. Math. **1**(1948)171.
- T. Kambe, J. Phys. Soc. Jpn. **52**(1983)834.
- A. Majda, Commun. Pure and Appl. Math. **XXXIX**(1986)S187.

2.2 サリヴァンの渦

バーガースの渦管を拡張したものとして、サリヴァンによる定常解があります。これは~~曲~~座標 (r,θ,z) を用いて、

円柱

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{2}\alpha r + \frac{6\nu}{r}(1-\exp[-\alpha r^2/4\nu]), \\ u_z &= \alpha z(1-3\exp[-\alpha r^2/4\nu]), \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}G(\alpha r^2/4\nu)/G(\infty), \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで

$$G(s) = \int_0^s \exp\left[-\int_0^p (1+3(\exp(-q)-1)/q)\mathrm{d}q\right]\mathrm{d}p \tag{2.15}$$

のように表せます。この解は内部構造をもつ点がバーガースの渦管と異なります。

- R.D. Sullivan, J. Aerospace Sci., **26**(1959)767.
- T. Tatsumi and M. Yamada, in *Recent Studies on Turbulent Phenomena* 1985, p.65.

2.3 高岡の渦

バーガースの渦では渦度は本質的に1個の座標にしか依存していません。このため、この解が表し得る流れも非常に簡単なものでしかありませんでした。最近、バーガースの渦と似たような解で、渦度が2個の座標依存性を持つクラスが見つけられました。ここでは、この解の構成法の概略を紹介します。

まず、次のような流れを考えます。

$$u(x,y,t) = (-\alpha x, -\beta y, (\alpha+\beta)z + w(x,y,t)) \tag{2.16}$$

$$\omega(x,y,t) = (\omega_1, \omega_2, 0) \tag{2.17}$$

$$\omega_1 = \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y}, \omega_2 = -\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} \tag{2.18}$$

これは、撹乱の速度が 1 成分でその渦度が 2 成分であることに注意して下さい（バーガース渦とはちょうど逆）。この時、渦度方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_1}{\partial t} &= \left(\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}\right)\omega_1 + \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1 + \nu \nabla^2 \omega_1, \\
\frac{\partial \omega_2}{\partial t} &= \left(\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}\right)\omega_2 + \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2 + \nu \nabla^2 \omega_2, \\
0 &= \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) w
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となります。ここで、速度、渦度、時間および空間を

$$\begin{aligned}
U_1 = u_1 \exp[\alpha t], \Omega_1 = \omega_1 \exp[\alpha t], \\
X = x\exp[\alpha t], T = t
\end{aligned} \tag{2.20}$$

など、のように変換すると、各微分演算は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T} + \alpha X \frac{\partial}{\partial X} + \beta X \frac{\partial}{\partial Y}, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \exp[\alpha t] \frac{\partial}{\partial X}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

のように変換されます。新しい変数では、渦度方程式は

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial T} = \nu \left(\exp[2\alpha T] \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial X^2} + \exp[2\beta T] \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial Y^2} \right) \tag{2.22}$$

という形の拡散方程式に帰着します。この一般解は

$$\Omega_1(\boldsymbol{X}, T) = \frac{1}{4\pi\nu\sqrt{D_1 D_2}} \int\int \Omega_1(\boldsymbol{X}', 0) \exp\left[-\frac{(X-X')^2}{4\nu D_1} - \frac{(Y-Y')^2}{4\nu D_2} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{X}' \tag{2.23}$$

とかけます。ここで、

$$D_1 = (\exp(2\alpha T) - 1)/2\alpha, D_2 = (\exp(2\beta T) - 1)/2\beta \tag{2.24}$$

です。あとは、元の変数へ戻せば求める解がえられます。（Ω_2 についても同様。）

渦度が空間構造を持つというこの解の特徴を生かして、渦のつなぎかえを論じることができます。

- M. Takaoka, J. Phys. Soc. Jpn. **60**(1991)2602.

3 バーガース方程式

3.1 1次元のバーガース方程式

非線形性および散逸性が類似であるという意味で、ナヴィエストークス方程式の 1 次元モデルとしてしばしば用いられるものに次のバーガース方程式があります。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

これは Hopf-Cole 変換

$$u(x,t) = -2\nu[\ln\phi(x,t)]_x \tag{3.2}$$

で拡散方程式に帰着され、一般解が厳密に得られることで有名です。（この節では添え字は微分を表します；$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$）実際、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\nu[\ln\phi(x,t)]_{x,t} = -2\nu[\ln\phi(x,t)]_{t,x} = -2\nu(\phi_t/\phi)_x \tag{3.3}$$

一方、

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(\nu u_x-u^2/2)_x=-2\nu^2(\phi_{xx}/\phi)_x \tag{3.4}$$

これらより、

$$(\phi_t/\phi)_x=\nu(\phi_{xx}/\phi)_x \tag{3.5}$$

が得られます。つまり、

$$\phi_t=\nu\phi_{xx}+C(t)\phi \tag{3.6}$$

となります。ここで、変換 $\phi\to\phi\exp(-\int^t C(s)\mathrm{d}s)$ を行なえば、拡散方程式

$$\phi_t=\nu\phi_{xx} \tag{3.7}$$

に帰着します。元の変数では、一般解は

$$u(x,t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-x')t^{-1}\exp[-(x-x')^2/4\nu t-1/2\nu\int u(x',0)]\mathrm{d}x'}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(x-x')^2/4\nu t-1/2\nu\int u(x',0)]\mathrm{d}x'} \tag{3.8}$$

となります。このモデルは空間が1次元であるため、流れに非圧縮性を持たせることができず、圧力の効果を検討することができません。むしろ、圧縮性流体の有限振幅波のよい記述になっています。

3.2 3次元のバーガース方程式

いまの1次元モデルを3次元に拡張したものを考えることもできます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{3.9}$$

ここで解として、

$$\boldsymbol{u}(x,t)=-2\nu\nabla\ln\phi(x,t) \tag{3.10}$$

という形を仮定しましょう（Hopf-Cole 変換と類似に注意)。これを（3.9）に代入し整理すれば、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(-2\nu\frac{\partial\phi}{\partial t}+2\nu^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2})+\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(2\nu\frac{\partial\phi}{\partial t}-2\nu^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2})=0 \tag{3.11}$$

が得られます。したがって、

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\nu\nabla^2\phi \tag{3.12}$$

が成立する時、確かに、（3.10）という形が解となることが分かります。具体的には、

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\frac{t^{-1}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{x}',0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\exp[-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2/4\nu t]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}{\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\boldsymbol{x}',0)\exp[-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2/4\nu t]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}, \tag{3.13}$$

ここで

$$\phi(\boldsymbol{x},0)=\exp\left[\frac{1}{8\nu t}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\right] \tag{3.14}$$

となります。この解の場の構造は複雑なものとなっていますが、渦なしの特殊解（圧縮性）であるので、残念ながら乱流との関係は深くはありません。むしろ、非局所性を放棄すれば（つまり、圧力項を無視すれば）非線形項を消去し得るという例と考えられます。

- J.M. Burgers, Adv. Appl. Math. bf 1(1948)171.
- E. Hopf, Commun. Pure Appl. Math. bf 3(1950)201.
- J. A. Dutton, *The Ceaseless Wind*, Dover 1986, p.214.

4　数値解、乱流とカオス

流体の運動方程式は非線形であるため、上で見たような特殊な場合を除くと解析的な解を見い出すことは困難です。むしろ、線形方程式に帰着されない場合の解の振舞いに興味があると言った方が良いかも知れません。そこで、より一般的な解の性質を知るためには、数値解析的な方法がどうしても必要になります。そこでは、無限次元の偏微分方程式を有限個の（しかし非常に多くの）常微分方程式の集まりに置き換え近似的な解を求めます。こうして得られた数値解を３次元グラフィックなどによって可視化することによって、方程式の簡単さ（数学的な意味ではなく物理的な意味）からは想像もできないような複雑な構造を流れが持つことが明らかになってきました。講座では、そのような例をいくつか紹介したいと思います。

また、乱流のもうひとつの側面として、最近注目を集めている決定論的カオス、つまり、時間発展のルールは簡単であるにもかかわらず、そのルールが非線形である場合には長時間に及ぶ結果を予想することができないという現象、が挙げられます。この点に関しても乱流の数値解析によって得られた結果を紹介したいと思います。

このように乱流にはナヴィエストークス方程式の特殊解によってモデル化できるような局在した構造という面とそのカオス性に基づく統計という面があります。このような両面を融合するようなナヴィエストークス方程式に基づく乱流の統計理論をつくることは将来に残された課題といえます。

追加文献

公開講座の程度をやや越えますが、流体方程式の具体的な解について以下の文献があります。

K. Ohkitani,
“A survey on a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations and a model for turbulence”,
Publ. RIMS Kyoto Univ. 40-4(2004)1267-1290.
P. G. Drazin and N. Riley,
“The Navier-Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions
(London Mathematical Society Lecture Note Series)”
(Cambridge University Press, 2006)
岡本久，“ナヴィエ - ストークス方程式の数理”(東京大学出版会, 2009)