平成7年度(第17回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成7年8月7日～8月11日開催)

数学入門公開講座

平成7年8月7日（月）から8月11日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．p 進数と整数論（6時間15分）　京都大学数理解析研究所・助手　辻　雄

p 進数（p は素数）は、今世紀の初頭 K. Hensel によって導入されたもので、実数が少数展開できるように、p 進数は $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n p^n$（$a_n = 0, 1, \cdots, p-1$, n_0 はある整数）という展開を持つ。実数の世界ではこの無限和は収束しないが、p 進数の世界では収束する。有理数に関する問題、例えば不定方程式、を考えるとき、p 進数で同じ問題を解いてみることによって、もとの有理数の場合も解けることが多く、現在では整数論における基本的な手法となっている。この講義では、p 進数の概念およびその基本的な性質について述べた後、関連する整数論の問題を幾つか紹介する予定である。

2．微分方程式とその応用（6時間15分）　京都大学数理解析研究所・助手　谷口　雅治

微分方程式は様々な自然現象をよりよく記述し得る有用な道具の一つである。化学や生物学におけるある種の形態形成過程においては一様にみえる初期状態から不均一な空間パターンが自律的に生じる現象が知られている。この現象を説明するモデルとして反応拡散方程式をもちいたチューリングの拡散不安定性の仮説が知られている。

本講義ではこの仮説を中心に話題を展開する予定です。

3．マトロイド理論とアルゴリズム（6時間15分）　京都大学数理解析研究所・助手　岩田　覚

マトロイドとは、ベクトル集合の線形独立性・線形従属性の組合せ論的側面を抽象化して得られたものであるが、効率的に解くことのできる組合せ最適化問題を統一的に扱う枠組として、工学的にも極めて重要な概念である。本講座では、多くの具体例を織り交ぜながら、マトロイドに関する最適化問題が効率的に解ける仕組みについて解説する。

時　　間　　割

時間 ＼ 日	8月7日(月)	8日(火)	9日(水)	10日(木)	11日(金)
10：30～11：45	辻	辻	辻	辻	辻
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	谷口	谷口	谷口	谷口	谷口
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	岩田	岩田	岩田	岩田	岩田

微分方程式とその応用

京都大学数理解析研究所・助　手　　谷　口　雅　治

1995, AUGUST 7,8,9,10,11,　　13:00 ~ 14:15

微分方程式とその応用

谷口雅治

１９９５年8月

この講義ノートの内容は以下の通りです。第１章において放物型の偏微分方程式でもっとも簡単なものといえる熱伝導方程式を紹介します。第２章においてこの方程式の拡散効果による解の平滑化と平均化（または一様化）を説明します。第３章においてはチューリングの拡散不安定性といわれるものを解説します。これは２種類またはそれ以上の化学物質がそれぞれ拡散しながらお互いに反応し合うときに「拡散係数の差」が一様な状態を不安定化させるというものです。すなわち逆説的ないい方では、状態を一様にするはずの拡散効果があるから一様な状態が不安定化するという興味深い現象のメカニズムを解説します。

1 熱方程式

はじめに熱方程式（または熱伝導方程式ともいう）について述べる。１次元区間 $[0,1]$ におかれた針金のような熱伝導体を考える。この熱伝導体と外界との熱のやりとりは両端 $x=0,1$ においてのみ行なわれるという設定のもとで考えよう。時刻 t における点 x の温度を $u(x,t)$ で表す。一点 $x_0 \in (0,1)$ を定め、 x_0 を含む小さな区間 V で熱量のやりとりをみる。時刻 t における V の熱量は

$$\int_\alpha^\beta cu(x,t)\,dx$$

となる。ここで c は単位長さあたりの熱量容量であり定数とする。時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの微小時間 Δt における V の熱量の変化は

$$\int_\alpha^\beta (cu(x,t+\Delta t)-cu(x,t))\,dx \approx \int_\alpha^\beta c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx\Delta t$$

となるはずである。熱には温度の高い方から低い方へながれるという拡散効果があり、Fourier の熱伝導法則によるとそのながれる量は温度勾配に比例している。Δt の時間の間に両端を通って流入した熱量は

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(\beta,t)\Delta t - k\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t)\Delta t$$

で表される。ここで $k>0$ は定数である。よって熱量の保存を式で表すと

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta cu_t(x,t)\,dx\Delta t &= \left(k\frac{\partial u}{\partial x}(\beta,t) - k\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,t)\right)\Delta t\\ &= \int_\alpha^\beta k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx\Delta t\end{aligned}$$

となる。両辺を $(\beta-\alpha)\Delta t$ で割ってから α,β を x_0 に近づけれると

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t) = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t)$$

をえる。左辺の定数

$$\kappa = \frac{k}{c}$$

は拡散係数とよばれる。この方程式が熱方程式とよばれる方程式である。

熱方程式はまたの名を拡散方程式ともいう。これは水のような媒質のなかで化学物質を混入したときにこの物質の構成粒子がブラウン運動によって拡散していく過程をモデル化したものとも考えられるからである。この場合 $u(x,t)$ は化学物質の濃度を表している。静止した媒質のなかの物質の拡散に関しては「拡散流量は濃度勾配に比例する」という Fick の法則が知られている。熱の伝導における Fourier の法則を Fick の法則におきかえれば、化学物質の濃度は $u_t = u_{xx}$ を満たすことがわかる。u_{xx} の項を拡散項という。

2 熱方程式の拡散効果による一様化と平滑化

1 次元区間 $[0,1]$ において熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{1}$$

を考える。ここで境界においては熱の出入りがない断熱境界条件をおく

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \qquad t>0. \tag{2}$$

初期条件として $L^2(0,1)$ に属する正値関数 $a(x)$ によって

$$u(x,0)=a(x) \tag{3}$$

が与えられているとしよう。まず (1) と (2) を満たす関数を $T(t)\phi(x)$ の形で求めてみる。(1) に代入して

$$T'(t)\phi(x)=T(t)\phi''(x)$$

となる。両辺を $T(t)\phi(x)$ でわって得られる

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

を $-\lambda$ とおく。t と x はお互いに独立な変数だから λ は t にも x にもよらない定数であることがわかる。これより

$$T'(t)=-\lambda T(t) \qquad \phi'(x)=-\lambda\phi(x)$$

がえられる。$T(t)\phi(x)$ が境界条件 (2) を満たすためには

$$\phi'(0)=0=\phi'(1)$$

が必要になる。$\phi(x)$ に関してつぎの固有値問題が導かれた。

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x)=\lambda\phi(x) \qquad \text{in } (0,1) \\ \frac{d\phi}{dx}(0)=0, \quad \frac{d\phi}{dx}(1)=0. \end{aligned}$$

この固有値は $\lambda_n=n^2\pi^2$ $(n=0,1,\ldots)$ であり固有関数は

$$\phi_n(x)=\begin{cases} 1 & n=0 \\ \sqrt{2}\cos n\pi x & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

となる。この $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(0,1)$ において正規直交系をなしている。

各 n に対して、$e^{-\lambda_n t}\phi_n(x)$ は (1) と (2) を満たすことがわかる。したがって初期条件 (3) を新たに考慮すれば良い。$a(x)$ を

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a, \phi_n)_{L^2(0,1)}\phi_n(x) \tag{4}$$

と展開しておく。(1), (2), (3) の解は

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(x) \tag{5}$$

で与えられる。ここで

$$\alpha_n = (a, \phi_n)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 a(x)\phi_n(x)\,dx$$

である。Parseval の等式から

$$\|a\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2 \tag{6}$$

が成り立っている。この (5) の右辺は $t > 0$ のときに t, x に関して無限回連続微分可能となることが以下の議論からわかる。実際、(5) を t に関して m 回、x に関して ℓ 回項別微分して得られる級数の第 n 項は

$$\alpha_n(-\lambda_n)^m \exp(-\lambda_n t)\left(\sqrt{\lambda_n}\right)^{\ell}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x + \ell\pi/2\right) \tag{7}$$

となる。ここで $t_0 > 0$ を任意にひとつ定めておく。$t \geq t_0$ のときに

$$|(7)| \leq \sqrt{2}|\alpha_n|(\lambda_n)^{m+\ell/2}\exp(-\lambda_n t_0) \leq \frac{\sqrt{2}|\alpha_n|M}{\lambda_n t_0^{m+1+\ell/2}} \tag{8}$$

となる。ここで定数 M は

$$M = \sup_{s>0} s^{m+1+\ell/2}e^{-s} < +\infty$$

で与えられている。Schwarz の不等式によって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}|\alpha_n|M}{\lambda_n t_0^{m+1+\ell/2}} \leq \frac{\sqrt{2}M}{t_0^{m+1+\ell/2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\right)$$

$$\leq M\|a\|^2_{L^2(0,1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

が成り立つ。このことから (5) を t, x について項別に微分した級数の優級数として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}|\alpha_n|M}{\lambda_n t_0^{m+1+\ell/2}}$$

をとることができるので、この級数は $[0,1] \times (0,\infty)$ において広義一様に収束する。$m=0$, $\ell=0$ととれば (5) の右辺は $[0,1] \times (0,\infty)$ において広義一様収束して有限の値を定めることがわかる。(5) の右辺を t (または x) で項別微分して得られる連続関数も広義一様収束することがわかったので項別微分定理によって (5) 自身も t (または x) で微分可能であることがわかる。(5) を t, x について任意の回数だけ微分したものが広義一様収束するから項別微分定理を繰り返しつかえば (5) は t, x について何回でも連続微分可能な関数であることがわかる。これは $t=0$ での初期値 $a(x)$ がたとえ不連続なギザギザしたグラフをもつ関数であっても、一瞬ののちの $t>0$ では $C^{\infty}[0,1]$ に属するなめらかな関数になってしまうことを意味している。すなわち熱方程式は平滑化する性質をもっていることがわかる。

次に平均化について説明しよう。(1) を $[0,1]$ において積分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)\,dx &= \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{x=0}^{x=1} = 0 \end{aligned}$$

が $t>0$ に対して得られる。これは $u(x,t)$ の平均値である

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx$$

が時間に関して不変な保存量であることを表している。(5) によって

$$u(x,t) - \alpha_0 = e^{-\lambda_1 t}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)t}\phi_n(x) \tag{9}$$

が得られる。$t>0$ に対して

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)t}\phi_n(x)\right| &\le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}|\alpha_n| e^{-(\lambda_n-\lambda_1)t} \\ &\le \sqrt{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_n-\lambda_1)t}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ。ここで $t_0 > 0$ を任意に固定し

$$M' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - \lambda_1)t_0} < \infty$$

とおくと、すべての $t \geq t_0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(\lambda_n - \lambda_1)t} \leq M'$$

となる。(10) の右辺は $\sqrt{2}\|a\|_{L^2(0,1)}M'$ で抑えられるから

$$|u(x,t) - \alpha_0| \leq \sqrt{2}\|a\|_{L^2(0,1)}^2 M' e^{-\lambda_1 t} \tag{11}$$

がすべての $t \geq t_0 > 0$ に対して成り立つことがわかる。すなわち $t \to \infty$ のときに解 $u(x,t)$ が定数関数 α_0 に一様に収束し、その収束の早さは指数関数的であることがわかる。α_0 は初期関数 $a(x)$ の平均

$$\alpha_0 = \int_0^1 a(x)\,dx$$

であったからこれは熱方程式の拡散効果による初期状態の平均化をあらわしている。

3 拡散効果があるから一様でなくなる！？... 拡散不安定性について

チューリングの拡散不安定性はある種の形態形成モデルに対して提案された。具体的には発生初期の過程にある生物を構成する均質な細胞群がしだいしだいに分化してさまざまな組織を形成することは形態形成（morphogenesis）とよばれる。この過程においては各細胞の中にある二種類の化学物質（morphogens）がそれぞれの濃度に応じて細胞間を拡散しながら自己および相互反応をおこなうと考えられている。このときこの化学物質が均一でなく局在することにより細胞の分化が引き起こされると考えられる。この「局在」がどのようにして起こるのだろうか？ 物質の反応の仕方はその空間的位置にはよらず、その位置における物質の濃度のみによるとする。そうすると当然、化学物質はすべての細胞間に均等に配分されるのではないかと考えられる。実際、二つの化学物質の拡散係数に差がなければそうなる。しかしもしそこに差があればその差が均質な状

態を不安定にし化学物質の局在を引き起こし得ることがつぎの方程式 (12) で指摘された。一次元に並んだ細胞列を考え、細胞間における二種類の化学物質の濃度をそれぞれ u, v とする。ここでは細胞列の両端で物質のやりとりがない境界条件で考える。細胞列の長さを $L>0$ とし、次の線形拡散方程式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv \end{aligned} \qquad 0<x<L,\ t>0 \tag{12}$$

境界条件は

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t), \quad v_x(0,t) = 0 = v_x(L,t) \tag{13}$$

となる。この方程式 (12) に対し自明解 $(u,v) \equiv (0,0)$ の安定性を調べる。この方程式の解はフーリエ級数によって

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} U_n(t) \\ V_n(t) \end{pmatrix} \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{14}$$

と展開される。各 n に対して (U_n, V_n) の満たすべき式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt}(t) &= -\mu \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 U_n(t) + aU_n(t) + bV_n(t) \\ \frac{dV_n}{dt}(t) &= -\nu \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 V_n(t) + cU_n(t) + dV_n(t) \end{aligned} \tag{15}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} U_n(t) \\ V_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$$

の形の解を求めてみよう。これを (15) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \lambda_n + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - a & -b \\ -c & \lambda_n + \nu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。これが $(0,0)$ でない (u_n, v_n) をもつためには

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_n + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - a & -b \\ -c & \lambda_n + \nu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - d \end{pmatrix} = 0$$

が必要十分条件となる。すなわち２次方程式

$$\lambda_n^2+\left((\mu+\nu)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-a-d\right)\lambda_n+\left(\mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-a\right)\left(\nu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-d\right)-bc=0 \quad (16)$$

が得られる。２次方程式を解いてすべての n に対して $\mathrm{Re}\,\lambda_n < -\delta < 0$ がある $\delta > 0$ にたいして得られるならば、自明解 $(u,v)=(0,0)$ に

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}\cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (17)$$

の形の摂動が加わってもすべて時間とともに指数関数的に減衰することがわかる。このときこの形をしていない一般の摂動についても適当な意味で小さければ時間とともに減衰する。実際、この場合には線形方程式 (15) の１次独立な２組の解としてその成分が

$$e^{t\lambda_n}\times(t \text{ の多項式})$$

の形をしているものをとることができる。ここで、λ_n は (16) の二つの根のいずれかを表す。線形方程式 (15) のすべての解はこの２組の線形結合で表せるから $\mathrm{Re}\,\lambda_n < 0$ より $(U_n(t),V_n(t))$ は $t\to\infty$ で指数的に減衰することがわかる。(14) において各 $(U_n(t),V_n(t))$ が減衰するから $(u(x,t),v(x,t))$ は $t\to\infty$ で自明解 $(0,0)$ に近づくことがわかる。この場合 $(0,0)$ は漸近安定であるとよばれる。一方、もし $0<\mathrm{Re}\,\lambda_n$ となる n が少なくとも一つ存在すれば (50) で与えられる摂動は時間とともにしだいに大きくなる。この場合は自明解 $(0,0)$ は不安定であるという。

ここで $(U_0(t),V_0(t))$ はつぎの常微分方程式を満たす

$$\begin{aligned} \frac{dU_0}{dt}(t) &= aU_0(t)+bV_0(t) \\ \frac{dV_0}{dt}(t) &= cU_0(t)+dV_0(t) \end{aligned} \qquad (18)$$

この方程式 (18) に対して自明解 $(0,0)$ が安定であるという条件で考えよう。すなわち

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_0-a & -b \\ -c & \lambda_0-b \end{pmatrix}=0$$

の根 λ_0 は $\mathrm{Re}\,\lambda_0<0$ を満たす十分条件をもとめる。もし

$$a+d<0, \quad ad-bc>0 \qquad (19)$$

という条件を課せば

$$\lambda_0 = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

により $\mathrm{Re}\,\lambda_0 < 0$ となる。以下、(19) を仮定しよう。これは方程式 (12) の自明解 $(0,0)$ に空間に関して一様な摂動が加えられてもその摂動は時間とともに減衰するということを表している。条件 (19) により a か d の一方は負となる。もし両方とも負ならば (16) においてすべての n に対して、$\mathrm{Re}\,\lambda_n < -\delta < 0$ となる $\delta > 0$ が存在することがわかり、自明解 $(0,0)$ は安定であることがわかる。以下では a と d が異符合である場合を考えよう。一般性を失うことなく

$$a > 0, \quad d < 0$$

を仮定する。u と v の拡散係数に差がない場合と差がある場合 ($\nu < \mu$ と $\mu < \nu$) にわけて話しをすすめる。まず、$\mu = \nu$ である場合には

$$\begin{aligned}
&\left(\mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - a\right)\left(\nu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - d\right) - bc \\
&= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \nu^2 - (a+d)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \nu + ad - bc > 0
\end{aligned}$$

となるので2次方程式 (16) において第3項が正となるのですべての n に対して $\mathrm{Re}\,\lambda_n < -\delta < 0$ となる $\delta > 0$ が存在するから自明解 $(0,0)$ は漸近安定になる。これはすなわち、u と v の拡散係数に差がない $\mu = \nu$ の場合は空間的に一様な小さい摂動が加えられてもそれが減衰するような系であれば、一般の空間的に一様でない小さい摂動に対しても系は安定であることになる。

次に $0 < \nu < u$ である場合を考える。いま $d < 0$ かつ $a + d < 0$ であるから

$$\begin{aligned}
&\left(\mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - a\right)\left(\nu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - d\right) - bc \\
&= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \mu\nu - a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \nu - d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mu + ad - bc \\
&\geq \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \mu\nu - (a+d)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \nu + ad - bc > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。この場合も2次方程式 (16) において第3項が正となるのですべての n に対して $\mathrm{Re}\,\lambda_n < -\delta < 0$ となる $\delta > 0$ が存在して、自明解 $(0,0)$ は漸近安定になる。

さて今度は、$0 < \mu < \nu$ である場合はどうなるのであろうか?

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = y$$

とおくと (16) の左辺の第3項 $Y(y)$ は

$$Y(y) = \mu\nu y^2 - (\mu d + \nu a)y + ad - bc$$

となる。もし μ, ν が

$$\mu d + \nu a > 0, \quad (\mu d + \nu a)^2 - 4\mu\nu(ad - bc) > 0 \tag{20}$$

を満たせば $Y(y) = 0$ は二つの根 α と β $(0 < \alpha < \beta)$ を持つことがわかる。条件 $0 < \mu < \nu$ を満たしながらかつ (20) を満たす (μ, ν) が存在することは (20) において $\mu \to 0$ としてみればわかる。L を適当に大きくとれば

$$\alpha < y = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < \beta$$

を満たすすべての n に対して

$$Y\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) < 0$$

となる。これらの n について2次方程式 (16) は正の根 λ_n をもつ。すなわち

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \cos\frac{n\pi x}{L}$$

の形の摂動は時間とともにだんだん大きくなっていく。すなわち拡散係数 μ, ν が $0 < \mu < \nu$ と (20) を満たす場合には、拡散方程式 (12) において自明解 $(0, 0)$ が不安定であることがわかる。この不安定化の原因は方程式 (12) の反応項である $au + bv$ と $cu + dv$ ではないことが条件 (19) で保証されている。不安定化を引き起こしたのは u と v の拡散係数 μ, ν に差があることが原因である。これがチューリングの拡散によって引き起こされる不安定性のメカニズムである。

References

1. 藤田, 池部, 犬井, 高見, 数理物理学に現れる偏微分方程式 I,II, 岩波書店, 1977.
2. 三村昌泰, 生物の増殖と空間分布, 非線形の現象と解析（山口昌哉編）, 日本評論社, 1979.
3. A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. Roy. Soc. London **B237** (1952), 37–72.