数学入門公開講座

平成８年８月５日 (月)から８月９日(金)まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．プログラミング言語、状態と型　（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助手　ガリグ　ジャック

チューリング機械とラムダ計算（帰納関数論）という、最も一般的な二つのコンピュータの抽象化が根本的に違う点は状態の扱いである。前者では、無限な書き込み可能なテープという形で残されているのに、後者では跡形もなく消えている。プログラミング言語を研究するには、後者が望ましいので、状態を再び導入し、ラムダ計算が持っている型（範疇）体系に埋め込む必要がある。

本講座では、両方の抽象化を紹介し、状態に関する諸問題を考える。

2．リーマン面　（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　古田　幹雄

一変数の多項式 f (z) は、複素数 z に対して別の複素数 f (z) を対応させる写像です。z は複素数全体のなす平面の上を動きます。ここで、平面のかわりに球面や、トーラスを考えたらどんな世界が広がっているでしょうか。リーマン・ロッホの定理の紹介を目標とします。

3．「漸近挙動を巡って：太鼓の形と酔歩」（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教授　髙橋陽一郎

“Can you hear the shape of a drum?” は故 M. Kac の有名な論文のタイトルである。鼓や太鼓やドラムの音を聴いて、その幾何学的な形がわかるかという問いかけである。

また、酔歩は乱歩（random walk）とも呼ばれ，デタラメさ（randomness）とは何かを数学として問うときに最も基本的な、現代確率論の概念である。

これらについて語ることを通じて、漸近挙動ということばの意味をわかってもらえることを期待しつつ、解析学における「等式」の意味を考えてみたい。

時　間　割

時間＼日	8月5日(月)	6日(火)	7日(水)	8日(木)	9日(金)
10：30～11：45	ガリグ	ガリグ	ガリグ	ガリグ	ガリグ
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	古田	古田	古田	古田	古田
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	髙橋	髙橋	髙橋	髙橋	髙橋

平成8年度(第18回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成8年8月5日～8月9日開催)

リーマン面

京都大学数理解析研究所・助教授　古　田　幹　雄

1996, AUGUST 5,6,7,8,9,　13:00 ~ 14:15

平成8年度(第18回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，平成8年8月5日～8月9日開催)

リーマン面

古 田 幹 雄

0．はじめに

1次元の図形は本質的に「直線」と「円周」の2つしかありません。直線は実数によって目盛をつけることができます。円周も角度で目盛をつけることができ、いずれにせよ、実数で目盛ることができます。

一方、2次元の図形、つまり曲面には、様々なものがあります。曲面には簡単に目盛をつけることはできません。かりにできたとしても、2つの実数が必要になります。しかし、ここで、2つの実数のかわりに、ひとつの複素数を使ってみたらどんなものでしょう。もちろん、簡単に目盛をつけることができないことには変わりません。部分部分では目盛ることができても、全体を一度に目盛ることは一般には不可能です。しかし、それにもかかわらず、複素数を考えることにより、曲面の世界がただの図形を扱うのとは違った深い奥行きをもつことが知られています。曲面をこのような立場からはじめて扱ったのはリーマンでした。とりあえずおおざっぱに言うなら、部分部分で複素数を目盛に使っている曲面のことを現在「リーマン面」と呼びます。

このノートでは、「リーマン面」の持つ豊かさの一端の紹介を目標とします。予備知識としては、「複素数の加減乗除」と「微分」の定義を仮定します。9節以降では「ベクトル空間とその次元」の定義をも予備知識として仮定します。「積分」は、リーマン面の理論において重要な役割をはたすのですが、このノートでは触れません。

1．リーマン面とはどんなものか

「リーマン面」の最も簡単で基本的な例は、複素数全体の集合です。複素数全体の集合は、平面とみなすことができます。これを「複素平面」とよびます。ここで、複素数を係数とする1変数多項式を考えてみます。変数が複素数の範囲を動くと、多項式の値も複素数となります。変数をこの平面の各点を動くものとみなします。値のほうは平面ではなく、数のまま考えます。このようにして、1変数多項式を、平面上の複素数に値をとる関数と思うことができます。1変数多項式がこのようにあらわしている関数を、もう少し一般化した関数のことを「正則関数」と呼びます。正確にいうなら、「正則関数」とは、複素平面のどの点をとっても、その点の近くでは1変数多項式によっていくらでも良く近似できる関数のことのことです。

逆にいえば、平面を複素数全体と同一視することにより、平面から複素数への写像に対して「それは正則関数である／ない」という区別をつけることができるようになります。

ひとことでいえば、ある曲面が、「リーマン面である」とは、その曲面の一部から複素数への写像が与え

られたときに、「それは正則関数である／ない」という区別がつくうまい基準が定まっていることです。ですから、ひとつの曲面にたいして、それをリーマン面とみなすための基準を２通りあたえることもできます。つまり、リーマン面とは、曲面と基準のペアのことです。曲面が同じでも、基準が違えば、異なるリーマン面と考えるわけです。この基準のことを専門用語では「複素構造」と呼んでいます。リーマン面の正確な定義は繁雑なのでこのノートでは述べません。定義は論理的には決して難しくはありませんがその意味するところを理解するのはまた別のことです。このノートでは、あとで例をあげて説明することにします。

２．複素数の性質

でも、なぜ、複素数を考えるのでしょうか。これまでのところ、実数のかわりに形式的に複素数をもってきたに過ぎません。そう見えます。もちろん実数のかわりに複素数にすると１次元から２次元になりますが、それだけのことなのでしょうか。そもそも複素数は、２次方程式を解くために導入されたものでした。それさえ導入すれば2次方程式だけでなく、どんな高次の方程式も解があることになる、というのがガウスによる「代数学の基本定理」でした。これは、代数の世界では実数よりも複素数が基本的な地位を占めていることを示唆します。しかし、だからといって「代数学の基本定理」が幾何学の世界で図形を複素数で目盛ることと関係がありそうだとはすぐには思われません。

複素数の世界のもつ顕著な性質は「代数学の基本定理」だけではありません。リーマン面を扱うときに実際に使うのは「（各点の近くで）１次式によって｀良く’近似できる関数は、（各点の近くで）何次の多項式によってでも｀よく’近似できる」という定理です。これは、実数の世界では全く成り立ちません。

例えば、実数の範囲でｘの３乗の絶対値という関数を考えると、これは、いたるところ１次式でうまく近似できます。特に、ｘ＝０の近くでは（０に値をもつ）定数関数で近似できます。これは１次式として、また２次式としても、「良い近似」になっています。しかし、３次以上の多項式を使ってｘ＝０の近くで「良い近似」はできません。どうしても、３次のオーダーの誤差がでてしまいます。

では、複素数の範囲で同じことを考えるとどうなるでしょう。ｘの３乗の絶対値という関数を考えると、これは、ｘ＝０の近くでは（０に値をもつ）定数関数で近似できます。これは１次式として「良い近似」です。しかし、ｘ＝０以外の点では、１次式で近似することができないことを示せます。つまり、この関数はそもそも複素数の範囲では「各点の近くで１次式で近似できる」という性質をもたないことがわかります。

正確にいうなら、「各点の近くで１次式で近似できる」とは、複素数の範囲で「微分」ができるということです（さらに便宜上導関数が連続になることをも仮定します）。「各点の近くで多項式でいくらでも近似できる」とは、複素数の範囲で「何回でも微分できる」ということです。つまり、複素数の世界では、「一回微分できれば、何回でも微分できる」ということです。

複素数の範囲で関数を考えるとき、上の定理は極めて基本的かつ重要な性質です。このノートでは、これを証明ぬきで認めることにします。

3．閉リーマン面の「種数」

以後、曲面というときには、球面か、ドーナツの表面か、ドーナツを2個くっつけたものの表面か、ドーナツを3個くっつけたものの表面か・・・を考えることにします。このような曲面に複素構造が付与されたリーマン面を「閉リーマン面」とよぶことにします。

直観的には、ひとつに繋がっており、無限には広がっておらず、端のないもの、を考えるということです。（厳密にいえば、「向きのある曲面」に限定して考える、ということでもあります。たとえば「クラインの壷」は考えません。リーマン面には必ず「向き」があるので、これで十分です。ですから、これ以上ここでは「向き」については言及しません。）

すると、閉リーマン面は、複素構造を忘れると、ただの曲面ですから、ドーナツをいくつくっつけたものの表面か、ということをまず考えることができます。ドーナツの個数を「種数」といいます。球面の種数は0と定義します。種数がいくつであるかは、閉リーマン面の最も基本的な性質です。

4．「有理型関数」と「極」

複素構造をも考えたとき、ひとつのリーマン面の上で、一体どんな事柄をくりひろげられるのでしょうか。リーマン面の性質というのが、そのくりひろげられかたの多彩な有様そのものであるような、どんな事柄を私たちは考えることができるのでしょうか。

リーマン面の上には、多項式の拡張として正則関数という概念がありました。同様に、有理式の拡張として「有理型関数」という概念があります。ここで、有理式とは、2つの互いに素な多項式の比の、分数の形をした式のことでした。「有理型関数」とは、どの点の近くでも、2つの正則関数の比として表わされる関数のことです。

有理式の分母の多項式が0になる点では、有理式の値は定義されていません。しいて言えば、無限大になるわけです。このような点を「極」といいます。分母の多項式の0の重複度のことを、「極」の「位数」あるいは「重複度」といいます。「有理型関数」に対しても、「極」とその「位数」あるいは「重複度」が定義されます。

リーマン面の上に、一つの点を選びます。そして、ひとつの自然数 d を選びます。このとき「その点で位数 d の極をもち、他では極をもたない有理型関数が存在するか」という問題を考えます。このような問題を通じて、リーマン面の個性、そして、ひとつのリーマン面の上の点達の間の個性が浮かび上がってきます。このことの説明を講義では目指します。

５．目標

講義で説明したいことは次のことです。

・リーマン面、正則関数、有理型関数、種数についての説明と例。６節

・種数が同じでも閉リーマン面にはなおも「個性」がみられること。８節

・とはいえ種数によって閉リーマン面の性質はかなり規定されること。９節

・ひとつの閉リーマン面の上の点達の間でも「個性」がみられること。１０節

・以上の状況をひとまず総括する定理があること：リーマン・ロッホの定理。１１節

６．リーマン面、正則関数、有理型関数、種数

リーマン面の例を挙げます。復習をかねて、これまで述べたこともまとめておきます。

（１）複素平面

複素数全体のなす集合のことですが、それを平面として幾何学的にとらえたものです。

・多項式：　複素数を係数とする１変数多項式のことですが、それを複素平面の上の関数であって複素数に値をとるものとして扱います。定義域は図形であり、値域は数であるとみなします。

・正則関数：　複素平面のどの点をとっても、その点の十分近くでは、多項式によっていくらでも良く近似できる関数のことです。指数関数は、多項式ではない正則関数の例です。

・有理型関数：　複素平面のどの点をとっても、その点の十分近くでは、あるひとつの恒等的には０でない多項式をかけておくと、多項式によっていくらでも良く近似できる関数のことです。有理式がその例です。本当は、複素平面全体の上の写像としては定義されていません。無限大に発散する点があります。そのような点を、極といいます。

・最大値の原理（の弱い形）：　定数関数以外の正則関数は、絶対値が極大値をとる点をもちません。（仮に絶対値がある点で最大値をとったとすると、それを良く近似する多項式は定数関数しかないことを示せます。これからわかります。）

（２）球面：種数０

２つの複素平面を張合わせたものとみなせます。具体的には、２つの複素平面の座標を各々z、wとすると、$zw=1$のときにそれらの座標で表わされる点同士を張合せることによって球面がえられます。球面をこのようにみなすと、球面から複素数への写像に対して、それが「正則」であるとか、「有理型」であるとかの概念を定義することができます。なお、２つの複素平面のうち、zで表わされるものに注目するならば、球面はその複素平面に、１点を付け加えたものになっています。このような見方をするとき、この１点のことを「無限遠点」とよびます。

・球面上の正則関数：　定数関数しかありません。（最大値の原理からわかります。）

・球面上の有理型関数：　（zの）有理関数しかありません。（上の、球面上の正則関数の分類からわかります。）

・極と零点：　球面上の有理型関数の極の個数は、零点の個数と等しくなります。ただし、重複度も含めて数えることにします。（有理関数の具体的な表示をみるとわかります。）

（３）トーラス：種数１

複素平面上の平行四辺形をとり、その向かい合った辺を（平行移動によって）張合せて得られます。図形的にはドーナツの表面と同じ形です。この形をトーラスといいます。しかし、今はさらに、もともとの複素平面の座標を考えると、このトーラスから複素数への写像に対して、それが「正則」であるとか、「有理型」であるとかの概念を定義することができます。従って、これは種数１の閉リーマン面とみなすことができます。

・トーラス上の正則関数：　定数関数しかありません。（最大値の原理からわかります。）

・トーラス上の有理型関数：　「楕円関数」とよばれます。具体例はたとえば無限和によって与えられます。

・極と零点：　有理型関数の極の個数は、零点の個数と等しくなります。ただし、重複度も含めて数えることにします。（有理型関数を、トーラスから球面への写像とみなすことができます。極にたいしては無限遠点を対応させます。このとき、どちらの個数も、この写像が何重の「被覆」であるかという数と一致します。次の項を参照。）

（４）被覆

・被覆：　$w(w-2)=z$ によって w に対して z を対応させることを考えます。これを、w の表わす複素平面から z の表わす複素平面への写像とみなします。すると、$w=1$ が $z=-1$ に写る以外は、２点が１点に写っています。このとき　w の表わす複素平面のことを「（z の表わす複素平面の）点 $z=-1$ で分岐する２重被覆」といいます。また、その写像のことを「被覆写像」といいます。

・球面［トーラス］の被覆：　同様に、球面［トーラス］の上の相異なる 偶数個の $2n$ 個の点をとってくるとき、「（球面［トーラス］の）それらの点で分岐する２重被覆」を考えることができます。それを M とかくと、M には閉リーマン面の構造が入ります。このとき M の種数は $n-1$ ［n］であることを示すことができます。

・一般の閉リーマン面の間の被覆写像：　２つの閉リーマン面の間の写像が与えられたとします。この写像が「被複写像」であるとは、２つの閉リーマン面を部分部分で目盛る複素数を用いてその写像を記述するとき定数でない正則関数になることをいいます。重要なことは、このときある自然数 d があって、有限個の例外の点を除くと、ほとんどのところで、この写像が d 対 1 の対応になっていることです。このときこの写像を「d 重被覆写像」といいます。なぜ、ほとんどどこでも d 対 1 なのでしょうか。それは、ひとことで言うなら、正則関数が、決して面を裏返さないからです。もし、裏返ることがあれば、このようなことはいえません。「有限個の例外点」を分岐点といいます。

（５）一般の閉リーマン面

この講義ノートでは、リーマン面の定義は述べません。しかし、「任意の閉リーマン面の上には少なくともひとつの（実は無限個の）定数でない有理型関数が存在する」ことがしられています。この定理の証明のためには閉リーマン面の上で解析学を展開する必要があるので、証明には立ち入ることができません。しかし、この定理を認めるならば、有理型関数を被覆写像とみなすことにより、「任意の閉リーマン面は、球面の被覆として表わされる」ことがわかります。

・閉リーマン面上の正則関数：　定数関数しかありません。（最大値の原理からわかります。）

・閉リーマン面上の有理型関数の極と零点：　極の個数は、零点の個数と等しくなります。ただし、重複度も含めて数えることにします。（有理型関数を、閉リーマン面から球面への写像とみなすことによってわかります。）

７．なぜリーマン面を考えるのか

そもそもなぜリーマン面などというものを考えるのでしょうか。これまでは、複素平面の上で正則関数や有理型関数を考えてるだけでなく、もう少し一般の曲面の上で同じようなことを考えてみよう、としか説明してきませんでした。一般化は確かに数学において豊かな対象をみつけるための有力な手段です。もっとも、ときには抽象的な一般論のための一般論に陥ることもあります。しかし、いずれにせよ、リーマン面の歴史の出発点は、決して単に複素平面を一般化することが動機だったのではありませんでした。

複素平面上で、関数の性質を研究していると、どうしても、「多価関数」つまり、ひとつの数に２つ以上の値が対応しているような拡張された関数を視野にいれざるを得なくなります。「多価関数」を、普通の関数と同様に扱うには、複素平面の被覆を考える必要があります。完結した理論をつくるには、複素平面は狭すぎました。そして複素平面からあふれだしていった理論の流れのただ中で、逆に、様々な曲面こそが物事の自然な出発点であると看破したのがリーマンでした。

「多価関数」は、「積分」を通じて自然にあらわれます。残念ながらこのノートでは、リーマン面の理論の出発点でもあり、現代数学の中心的話題のひとつにもまさに当時と同一の文脈のままで姿をあらわす「積分」に関係した話題にふれることはできません。

８．種数が同じでもリーマン面には「個性」がみられる

（１）種数０のとき

種数が０の閉リーマン面の例としては、６節（２）で２つの複素平面をはりあわせて作った球面がありました。実は、「種数０の閉リーマン面は、これひとつしかない」ことがしられています。なぜでしょうか：

６節（５）で任意の閉リーマン面は球面の被覆として表示できると（証明ぬきで）のべました。この事実を使って考えましょう。仮に、それが２重以上の被覆であったとします。すると、種数が０より大きくなってしまうことが、幾何学的な考察からわかります。（講義で説明します。）ですから、種数が０であれば、丁度１重の被覆でなくてはなりません。すると、どこにも分岐点はないことになり、被覆写像によってこの閉リーマン面は球面と１対１の対応があることがわかります。つまり、このリーマン面は普通の球面と同じ

ものです。

定理　　種数０の閉リーマン面は、ひとつしかない。

（２）種数１のとき

では種数１ではどうでしょうか。６節（３）において、複素平面上の平行四辺形ごとに種数１の閉リーマン面をつくることができることを示しました。これらはすべて曲面としては全く同じ形をしています。しかし、リーマン面としては同じものなのでしょうか？実は

定理　　種数１の閉リーマン面は、無限個存在する。

が次のような筋道でわかります：　複素平面の上の２つの平行四辺形を考えます。それらからつくられる種数１の閉リーマン面を考えます。それらの閉リーマン面の間に１対１の対応がついて、その対応によって「正則関数である／ない」という条件が同一の条件になっていると仮定します。これがリーマン面として同じものであるということです。ところで、複素平面は、平行四辺形を敷き詰めて覆うことができます。２つの平行四辺形があるので、２通りの敷き詰め方があります。すると、２つの閉リーマン面の間に与えられた１対１対応をつかって、２つの複素平面の間に１対１対応をつくることができます。この対応は、正則関数になることが示せます。最大値の原理をつかって少し考えると、この正則関数は、複素数を係数とする１次式であることを示せます。（講義で説明します。）複素係数の１次式によって与えられる１対１対応は、相似変換であることがすぐわかります。もとの２つの平行四辺形は、必ずしもこの１次式によって写りあうものであるとは限りません。ですから２つの平行四辺形は、必ずしも互いに相似であるとは限りません。しかし、複素平面を平行四辺形で敷き詰めたときの頂点達全体のなす点集合を考えると、対応する２つの点集合は、互いに相似でなくてはならないことがわかります。一方、互いに相似でない「点集合」をつくる平行四辺形は無数にあります。これから、種数１の閉リーマン面が無数にあることがわかります。

ここでは証明にはふれられませんが、逆に、種数１の閉リーマン面は、すべて、平行四辺形からえられることがわかっています。

（３）虚数乗法

上の議論では、２つの種数１の閉リーマン面の間の１対１対応を考えましたが、ひとつの種数１の閉リーマン面を固定し、自分自身の上への１対１対応を考えることもできます。

複素平面を平行四辺形で敷き詰めたときの頂点達全体のなす点集合を考えると、それが平行移動ではない相似変換によって自分自身にぴったり重なるためには、この点集合は、だいぶ特別なものでなくてはなりません。すなわち、あらかじめ相似変換で動かしておくと、この点集合全体が、足し算、引き算と掛け算で閉じているようにできることがわかります（演習問題）。このとき、この点集合から出発して加減乗除をおこなって得られる複素数全体を考え、記号 k で表わしておきます。k は、「虚２次体」と呼ばれるものになり、数論の対象です。

クロネッカーは、k の数論と、種数１の閉リーマン面の理論とが深く結び付いていることを予想しました。

それは「クロネッカー青春の夢」とよばれ、高木貞次により、「類体論」の完成とともに証明されました。この理論を「虚数乗法論」といい、その延長上に、「フェルマー予想」の解決の鍵となった志村・谷山の理論と予想があります。

（４）種数２以上のとき

種数２以上のときも閉リーマン面は無限個あります。種数をｇとすると、３ｇ−3 個の複素数のパラメータを用いて記述される自由度の「無限個」であることがしられています。

９．種数と微分形式：　種数によってわかること

どんな閉リーマン面に対しても、その上の正則関数は定数関数しかありませんでした。これでは閉リーマン面の個性はさっぱりわかりません。有理型関数を考えることは、正則関数より一般のものを考えることにあたりますが、この節では、また別のやりかたで、正則関数の変種を考えることにします。

閉リーマン面Ｍをいくつかの部分にわけて、その各々では複素数の目盛が定まっているとします。以後、目盛のことを「局所座標」と呼びます。たとえば、x, y, z が局所座標だとします。これらはところどころ重なって定義されていますが、どれも、全体の上では必ずしも定義されてはいません。

「Ｍの上の正則関数」とは、具体的にいうなら、３つの正則関数 $f(x), g(y), h(z)$ であって、次の条件をみたすもののことといえます：Ｍの点ｐで、たとえば、局所座標ｘとｚとが定義されているならば、

$f(x(p)) - h(z(p)) = 0$ が成立する。その他の重なりでも同様。

上の条件を少し弱めて、次の条件を考えます：局所座標ｘとｚとが同時に定義されている部分において、

$f(x(p)) - h(z(p))$ は定数関数になっている。その他の重なりでも同様。

つまり、定数関数を無視するならば、Ｍ全体の上ではりあわさっているということです。

「定数関数を無視する」ためのよい方法は、微分することです。今の場合、ｘで微分すると

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dh(z)}{dz}\ \frac{dz}{dx}$$

となります。この関係式を形式的に dx を両辺にかけて $f'(x)dx = h'(z)dz$ とかくことにします。

ここで $f'(x), g'(y), h'(z)$ の変りに初めから別の記号を使って $F(x), G(y), H(z)$ とかくならば、今考えている「正則関数の変種」は、局所座標の重なりにおいて

$F(x)dx = H(z)dz$ などの関係をみたすものとして表現することができます。

このようなものを「正則微分形式」といいます。正則微分形式全体の集合は、自然に複素数上のベクトル空間をなします。

次の定理は、閉リーマン面の性質のあるものが、曲面のトポロジカルな条件だけから決定されてしまうことを意味します。

定理　種数 g の閉リーマン面の上の0でない正則微分形式は（重複も数えると）$2g-2$ 個の零点をもつ。

定理　種数 g の閉リーマン面の上の正則微分形式全体は、次元 g のベクトル空間となる。

前者は、本質的に曲面の性質（トポロジー）のみを用いて証明されます。それに対して後者は、より深い定理であり、証明のためには閉リーマン面の上で解析学を展開する必要があります。ここでは証明に言及できません。具体例で確かめるにとどめます。

（0）種数0のとき

上の定理は、正則微分形式が0しかないことを意味しています。実際、球面が2つの局所座標 z, w をもち、両者が $zw=1$ によって結び付いているとき、正則微分形式とは、2つの多項式 $F(z), G(w)$ であって、$F(z)=G(1/z)(-1/z^2)$ をみたすものとみなせます。しかし、このような多項式は、0しかありません。

（1）種数1のとき

上の定理は、正則微分形式が定数倍をのぞくと1個だけ存在すること、そして、それが零点をもたないことを意味しています。実際、座標 z をもつ複素平面の上の平行四辺形から種数1の閉リーマン面をつくるとき、dz の定数倍が正則微分全体を与えます。dz はどこにも零点を持ちません。

10．ひとつのリーマン面の上の点達の間の「個性」

種数が0または1の閉リーマン面と、種数が2以上の閉リーマン面とは、だいぶ性質がちがいます。そのひとつは、種数が0か1のときには、閉リーマン面の上の点達がいわば均質で「個性」が見られないのに対し、種数が2以上になると、点達の間で「個性」がみられるようになります。もともと、曲面をみていただけでは、種数にかかわりなく、点達の間に何の「個性」もみられないので、この現象は、リーマン面の複素構造を反映していることになります。つまり、点達の「個性」の有様をつぶさに調べることにより、その点達がのっている閉リーマン面自体の個性を研究する道筋がひらけます。ここでは、種数2の場合に「点達の個性」の例をあげるにとどめます。

（0）種数0のとき

まず直観的にいうなら、球面は回転について対称です。どの2点をとっても、適当な回転によって一方を他方へ重ね合せることができます。実際、回転は、球面のリーマン面としての構造を保っています。（回転が、球面の6節（2）の局所座標を使うと1次分数式で表わされることからわかります。）ですから、いわば、球面の上の点達は対等であり「個性」はありません。

（1）種数1のとき

平行四辺形から種数1の閉リーマン面が作られる状況を考えます。するとそこでは平行移動を考えることができます。そして、やはりどの2点をとっても、適当な平行移動によって一方を他方へ重ね合せることができます。ですから、この種数1の閉リーマン面の上の点達はやはり対等であり「個性」はありません。

（２）種数２のとき

球面の上に相異なる６点をとり、そこで分岐する２重被覆をＭとおくと、これは種数２の閉リーマン面です。実は、種数２の閉リーマン面は、必ずこのようにしてえられることがしられています。分岐点に対応するＭの６個の点は、特別な性質をもっています。すなわち、Ｍの上の任意の正則微分形式はこれら６個の点のどれかで０になるときは必ず重複度が２になります。そして、ほかの点で０をとるときには重複度は必ず１になります。（講義で説明できたらします。）

すなわち、この種数２の閉リーマン面の上の点達は、対等ではなく、いわば、「個性」がみられます。

１１．リーマン・ロッホの定理とはどのようなものか

最後に、９節の定理を拡張した定理を紹介します。

定理（リーマン・ロッホの定理の特別な場合）

種数ｇの閉リーマン面の上の任意の点ｐと、任意の自然数ｄに対して、

（１）ｐ以外には極をもたず、ｐでは位数がｄ以下の極をもつ有理型関数全体、と

（２）正則微分形式であって、ｐに位数が少なくともｄの零点をもつもの全体

とを考える。すると（１）の次元から（２）の次元をひいた差は、１＋ｄ－ｇに等しい。

（１）の次元も（２）の次元も、点ｐをいろいろ動かすと、変わるかもしれません。それは点ｐの個性です。しかし、その差は、常に一定になるというのが定理の主張です。また、（２）の次元は、ｄが２ｇ-２より大きいと０になることが９節の定理からわかり、その場合は、この定理は、（１）の次元を正確に与えています。

この定理のひとつの性格は、ある条件をみたす有理型関数の存在を主張している点です。実際にそれがどんな有理型関数であるかはわからないのですが。これは必ずしも弱点ではありません。むしろ、具体的に有理型関数を作れないような状況においても、この定理によって、とにかく存在が保証されることは、リーマン面の議論を進めるに当たって、強力な役割を果たします。例えば、種数２の閉リーマン面が必ず球面の２重被覆としてあらわされることも、この定理の（簡単な）応用として示されます。

この定理の拡張は小平邦彦先生により「複素曲面」の分類に有効に使われました。（ちなみにリーマン面とはいわば「複素曲線」です。）その後グロタンディエクにより一般化され、さらにアティヤ・ジンガーによる「指数定理」においてひとつの頂点に達した後、その広範な影響は、今日に至るまで現代数学のなかに脈うっています。こうした事柄の解説はこの講義ノートにゆるされた容量をはるかに越えます。ここで強調したい唯一のことは、いまは言葉だけあげているこうした現代数学の源流が、はるかリーマンにまでさかのぼるということです。

訂正

7ページ目　「（3）虚数乗法」の節において

●下から8行目

誤　「1対1対応」

正　「多対1対応」

●下から6行目

誤　「自分自身にぴったり重なるためには」

正　「自分自身の中に含まれるように移されるためには」