数学入門公開講座

平成９年８月４日（月）から８月８日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．代数曲面の世界 （6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　中山　昇

2変数の多項式 $F(X, Y)=0$ で定義された図形というと、たとえば

$$F(X, Y)=(X/a)^2+(Y/b)^2-1=0,\ F(X, Y)=Y-X^2=0,\ F(X, Y)=XY-1=0,\ \ldots$$

など、楕円、放物線、双曲線、といろいろ思い浮かびますが、代数幾何学ではもっと一般にn変数のk個の多項式

$$F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ \ldots,\ F_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

の共通零点集合を研究しています。たとえば $XY=Z^3+W^3=1$ で定義される図形はK3曲面という名前の曲面の1部分になります。代数曲線、代数曲面はこのような図形（代数多様体）の中でそれぞれ1次元、2次元のものです。代数曲線は種数によって大きく性格が異なります。代数曲面では種数だけでは足りなくて小平次元を考えます。今回は代数曲面の小平次元による分類の概略を紹介します。

2．数値積分と複素関数論 （6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教授　森　正武

台形公式、シンプソン公式、ガウス公式などはコンピュータ出現のはるか以前に確立した数値積分の基本的な手法であり、その後、数学解析の対象としては比較的地味な存在であった。しかし、解析の道具として複素関数論を導入すると、状況は一変する。各々の公式は複素対数関数の有理関数近似によって導かれ、また誤差解析もグラフィックスと組み合わせて魅力ある対象となる。さらに、新しい強力な数値積分公式を次々と創り出すことができる。

この講義では、数値積分と複素関数論という二つの古典的テーマにコンピュータを組み合わせて実を結んだ、応用数理の新しい成果を紹介する。

3．「超対称性の物理と数学」（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　河合　俊哉

超対称性（supersymmetry）とはボゾン（互いに可換な粒子）とフェルミオン（互いに反可換な粒子）の間に成り立つ対称性であり、現在の理論物理の様々な分野で活躍している。また数学との関係も極めて密接である。本講座では、この超対称性の入門的解説を中心に行なうとともに、その応用にも触れたいと思っている。

時　間　割

時間＼日	8月4日(月)	5日(火)	6日(水)	7日(木)	8日(金)
10：30～11：45	中山	中山	中山	中山	中山
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	森	森	森	森	森
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	河合	河合	河合	河合	河合

平成9年度(第19回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成9年8月4日～8月8日開催)

超対称性の物理と数学

京都大学数理解析研究所・助教授　河　合　俊　哉

1997, AUGUST 4,5,6,7,8,　14:45 ~ 16:00

超対称性の物理と数学

河合 俊哉

1 はじめに

御存知のように物理学とは自然界を記述する基本法則を探ろうとする学問です。もしも実験で何か今までの知識で説明できないおもしろい現象が発見されたとするとそれをうまく説明する基本的な理論はないかと頭をひねります。歴史の教えるところによるとそうやって見出され確立された数々の物理法則は、必ずと言っていいほど美しい数学で記述されています。そしてその物理法則が基本的であればあるほど、数学との関係はより深くなっていくように見えます。そういう背景があるので、現代の理論物理学者は、自然を相手にしているようで、実は常にある種の数学的審美観が意識の底にあるようです。

物質の基本的構成要素は何でそれを支配する原理は何かと問うのが素粒子物理学ですが、微細な構造を探れば探るほど、皮肉なことに、実験装置は巨大になり、実験から情報を得ることが困難になってきます。それでも世界中の実験物理学者が国際的協力のもとに、懸命に研究を続けています。

一方理論物理学者は想像力を逞しくして色々な理論を提案し検討します。提案された理論が良いか悪いか判断することは、物理学が実証科学を標傍する限り、最終的には実験による検証を待たねばなりませんが、その前に理論物理学者はまずその理論を先程述べたような審美観に照らし合わせてみることから始めます。自然の基本原理は美しい数学的言葉で記述されるべきであるというような信念があるのです。逆にそこそこ実験事実をうまく説明する理論があっても、それが審美的な観点から納得のいく数学的枠組で記述されていないとしたら、その理論は基本的ではなく、

本当はもっと基本的な理論が背後に潜んでいるのではないかと疑ってかかります。この様な純粋に理論的な戦略が常に成功を収めるという保証はありません。しかしながら、理論物理学者がおもしろがって研究した対象というのは、その時すぐさま目標としていたことと結びつかなかったとしても、後になって、違ったコンテクストで利用されたり、数学の源泉となったりして花開くことも多々あるというのも歴史の教えるところです。

理論物理学者が過去において大切にしてきた美意識の中に対称性という概念があります。根本原理は何らかの意味で対称性に基礎をおくものでなくてはならないだろう、ということです。この公開講座では「超対称性」と呼ばれる対称性を紹介したいと思います。これは理論物理学者が考えだした仮想的な対称性で、丸いとか平らであるとかいう対称性に比べると直観的には説明しにくいものですし、実際に自然が採用しているかどうかは今のところわかりせん。しかしながら、様々な理由から関心を持たれ、研究が続けられてきました。その結果わかってきたことは超対称性は非常に豊富な内容を含んでいるということです。また数学との関わりも密であるということも明らかになってきました。現在も、多くの人たちが超対称性のある物理系の持つ興味深い性質を解明しようと努力しています。本講座でこのような超対称性の面白さの一端なりとも紹介できれば、と考えています。

このテキストでは超対称性のある物理系を考察するとき、一体どういう考え方が基本になるかということを、講義の前に概念的に理解しておいてもらうことが目標です。実際に超対称性を考えることによってどういう御利益があるのか、どういう面白いことがあるのかということを知るには適当な例をじっくり調べてみるのが一番ですが、非自明な例を解析することは物理的にも数学的にもかなり準備が必要になりますので、それは講義での目標にすることにしましょう。

2 準備

超対称性の概念を説明するために、最も簡単な例を考えることにしたいのですが、そのためには、少し量子力学の言葉に慣れておく必要があります。（もちろん、ここで量子力学の詳しい解説をするわけにはいきませんが。）

量子力学の道具立てとして必要なものとして、「ヒルベルト空間」と「線型作用素」というものがあります。これは線型代数で習う複素ユークリッド線型空間とその上の線型変換を拡張したような概念なので、その場合を少し復習することにします。$\mathbf{C}$ を複素数体とします。V が有限次元複素ユークリッド線型空間であるとは V が有限次元複素線型空間であって、任意の二元 x、y に対して内積 $(x,y) \in \mathbf{C}$ が定義されていて、この内積は次の性質を満たします。

1. 任意の $x,y,z \in V$、$a \in \mathbf{C}$ に対して
$$\begin{aligned}(x,y) &= \overline{(y,x)} \\ (x,y+z) &= (x,y)+(x,z) \\ (x,ay) &= a(x,y)\end{aligned}$$

2. 任意の $x \in V$ に対して $(x,x) \geq 0$ であり、
$$(x,x)=0 \iff x=0$$

有限次元複素ユークリッド線型空間 V が与えられたとき、その上の線型変換 $L : V \to V$ を考えることができます。これは

$$x,y \in V, \quad a,b \in \mathbf{C} \Rightarrow L(ax+by) = aL(x)+bL(y)$$

を満たします。V の正規直交基底を定めると L を行列表示することができます。線型変換 L に対してその共役変換 L^* が、任意の $x,y \in V$ に対して

$$(x,L(y)) = (L^*(x),y)$$

が成立するように定まります。これは L を行列表示したときその行列の転置をとり、さらにその複素共役をとることに対応します。積に関しては $(L_1L_2)^* = L_2^*L_1^*$ となります。特に $L = L^*$ のとき、 L はエルミートまたは自己共役であると言います。線型変換が与えられるとその固有ベクトルや固有値を考えることができます。すなわち $x \neq 0$ で

$$L(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

となるとき x を L の固有ベクトルといい、 λ を固有値といいます。エルミート線型変換の固有値は常に実数であることを注意しておきます。

今説明した有限次元複素ユークリッド線型空間で有限次元という条件をはずしたものを前ヒルベルト空間といい、これに後ひとつある条件を加えたものをヒルベルト空間と呼んでいます。特に有限次元複素ユークリッド線型空間は自然にヒルベルト空間とみなすことができます。ヒルベルト空間に対しては、線型変換に対応するものを線型作用素と呼んでいます。この線型作用素も上で説明した線型変換と同様な性質を持ち、共役等の概念を導入することができます。（ただし、うるさいことを言うとヒルベルト空間論ではエルミートと自己共役という概念は区別しています。しかし、以下では物理の慣習にのっとり、 $L = L^*$ をみたす線型作用素 L を単にエルミートであるということにします。）大雑把に言えば、ヒルベルト空間の元は一般に無限次元のベクトルで、線型作用素とは一般に無限次元の行列であるとみなすこができます。

量子力学はヒルベルト空間と線型作用素を使って記述されるのですが、そのときこのヒルベルト空間を状態空間、その元を状態ベクトルと言います。また線型作用素のことを演算子と言ったりします。量子力学では物理的観測可能量をエルミート演算子に対応させます。そのようなエルミート演算子の中で大切なものとしてハミルトニアンというのがあります。その固有値は考えている系のとりうるエネルギーになります。

3 ボソンとフェルミオン

今、 $e_0, e_1, e_2, \ldots$ をあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_B$ の正規直交基底とします。すなわち

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j \geq 0)$$

ここに δ_{ij} はクロネッカー記号で $i = j$ のとき 1、それ以外は 0 となるものです。このとき演算子 a を、

$$\begin{aligned} a(e_0) &= 0 \\ a(e_n) &= \sqrt{n}\, e_{n-1}, \qquad (n \geq 1) \end{aligned}$$

という関係を線型に拡張して定めることにします。また a^* を

$$a^*(e_n) = \sqrt{n+1}\, e_{n+1} \qquad (n \geq 0)$$

という関係を線型に拡張して定めることにします。記号の示す通り、 a^* は a の共役になっています。ここで、演算子 L_1, L_2 に対して交換子と呼ばれる記号 $[L_1, L_2] = L_1L_2 - L_2L_1$ を導入すると、

$$[a, a^*] = I$$

が成立することがわかります。 I は恒等演算子です。

ここで e_n というベクトルをある粒子（それをボソンと呼ぶ）が n 個ある状態に対応させることにします。 そうすると上の関係から a はボソンの数を一個減らし、 a^* は一個増やす演算子であることがわかります。そこで、 a を消滅演算子、 a^* を生成演算子と言います。 e_0 はボソンが一個も無いので真空ベクトルと呼ぶこともあります。

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^*)^n (e_0), \qquad (n \geq 0)$$

という関係を見れば e_n というのが真空ベクトルに a^* を n 回かけて（ボソンを n 個作って）できている感じがつかめると思います。次に、

$$N_B = a^* a$$

なる演算子を考えてみましょう。N_B はエルミートで、e_n はその固有ベクトルで固有値は n であることがすぐわかります。つまり、N_B はボソンの数を数えている演算子です。

以前に量子力学ではハミルトニアンが大事であると言いましたが、ボソン一個に対してエネルギーを 1 ずつ与えることにします。つまりボソンが n 個ある状態のエネルギーは n です。そうすると、ハミルトニアン H_B は、

$$H_B = N_B$$

となります。そこで、正の実数 β に対して次のような量を考えてみます。

$$Tr_{\mathcal{H}_B}\, e^{-\beta H_B}$$

ここで $Tr_{\mathcal{H}_B}$ の意味はヒルベルト空間 $\mathcal{H}_B$ の上でトレースをとるという意味で、演算子は行列のようなものであるということから、大体は感じがわかると思います。これを計算するのは簡単で、結果は

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{H}_B}\, e^{-\beta H_B} &= 1 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + e^{-3\beta} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-e^{-\beta}} \end{aligned}$$

となります。

さて、今度はフェルミオンと呼ばれるものを考えることにしましょう。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_F$ として二次元複素ユークリッド空間を考え、その正規直交基底を f_0, f_1 とします。このときフェルミオンの消滅演算子 b と生成演算子 b^* を、前と同様に

$$\begin{aligned} b(f_0) = 0, &\qquad b(f_1) = f_0 \\ b^*(f_0) = f_1, &\qquad b^*(f_1) = 0 \end{aligned}$$

となるように定めます。これから明らかなようにフェルミオンは存在しない（f_0）か、存在したとしても一個（f_1）しか許されません。演算子 L_1, L_2 に対して反交換子 $\{L_1, L_2\} = L_1L_2 + L_2L_1$ の記号を導入すると

$$\{b, b^*\} = I, \qquad \{b, b\} = \{b^*, b^*\} = 0$$

が成立することがわかります。フェルミオンの数を数える演算子は

$$N_F = b^* b$$

で、これはやはりエルミートです。ハミルトニアン H_F はボソンのときと同様に

$$H_F = N_F$$

とします。そうすると

$$Tr_{\mathcal{H}_F} e^{-\beta H_F} = 1 + e^{-\beta}$$

となります。

また演算子 Γ を

$$\Gamma(f_0) = f_0, \qquad \Gamma(f_1) = -f_1$$

という関係で定めると、Γ はエルミートで $\Gamma^2 = I$ を満たします。この Γ をトレースの中にはさむと、

$$Tr_{\mathcal{H}_F} \Gamma e^{-\beta N_F} = 1 - e^{-\beta}$$

となります。

4 超対称性

次に上で考えたボソンとフェルミオンが同時に存在する系を調べることにしましょう。これは、$\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F$ というテンソル積のヒルベルト空間を考えることになります。今まで $\mathcal{H}_B$ や $\mathcal{H}_F$ の上で考えてきた演算子は $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F$ の上では自然に拡張して考えることにします。ハミルトニアンは

$$H = N_B + N_F$$

というエルミート演算子になります。

この系に対してウィッテン指数と呼ばれている量

$$Tr_{\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_F}\Gamma e^{-\beta H}$$

を計算してみましょう。これは前の計算を単に組み合わせるだけで、

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_F}\Gamma e^{-\beta H} &= \frac{1}{1-e^{-\beta}}\times(1-e^{-\beta}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となります。これは少し不思議な結果です。ウィッテン指数は定義からすると β に依存する関数になると期待されるのに、実際に計算してみたらそうではなく単に 1 という数になるというのです。何故そうなるか理由を考えてみることにしましょう。

この例でどうしてこうなったかを直観的に理解することは、実はそんなに難しいことではありまん。エネルギーが n、ただし $n > 0$ の状態ベクトルを考えることにします。これは二つの可能性しかありません。すなわち、ボソン n 個、フェルミオン 0 個の状態ベクトルか、ボソン $n-1$ 個、フェルミオン 1 個の状態ベクトルのいずれかです。前者は Γ に対して固有値 1 の固有ベクトルとなり、後者は固有値 -1 の固有ベクトルになり両者はトレースの中で相殺するのです。一方エネルギーが 0 の状態ベクトルというのは、ボソンもフェルミオンも一個もない真空の場合一通りだけで、この状態ベクトルの Γ に対する固有値は 1 になります。結局このエネルギーが 0 の状態ベクトルだけがウィッテン指数に寄与して、$=1$ という結果になったのです。

それでは、このような性質はこの系に限った、特別な性質なのでしょうか？　実は考えている系に「超対称性」という対称性があるときには常にある普遍的な性質なのです。このことを理解するために、我々の系で超対称演算子 Q というエルミート演算子を

$$Q = ab^* + a^*b$$

で導入します。この定義から Q はフェルミオンが存在しなければ作って、かわりにボソンを一個消し、フェルミオンが存在すれば消して、かわりにボソンを一個作る

演算子、すなわちボソンとフェルミオンを取り換える演算子であることがわかります。ところで Q と H と Γ は次の様な関係をみたしていることがわかります：

$$\Gamma^2 = I, \qquad \{\Gamma, Q\} = 0, \qquad Q^2 = H \tag{1}$$

そこでこの関係を出発点として一般論でどれだけのことがいえるか考えてみましょう[1]。まず、

$$[Q, H] = 0, \qquad [\Gamma, H] = 0$$

となることはすぐわかります。一般にハミルトニアンと交換する非自明なエルミート演算子が存在するとき系は対称性を持つと言い、そのエルミート演算子に対応する物理量を保存量といいます。(1) の関係が成り立つときは系に超対称性があるといいます。

さて、Q のエルミート性を使って

$$(v, H(v)) = (v, Q^2(v)) = (Q(v), Q(v)) \geq 0, \qquad {}^\forall v \tag{2}$$

となることに注意します。特に、v として H の固有値 E の固有ベクトルをとると、$(v, H(v)) = E(v, v) \geq 0$、一方 $v \neq 0$ より $(v, v) > 0$ だから $E \geq 0$、すなわちエネルギーは常に非負であることがわかります。

$[\Gamma, H] = 0$ なので、H と Γ の同時固有ベクトルを考えることができます。そのような同時固有ベクトル v_+ として

$$H(v_+) = E(v_+), \quad \Gamma(v_+) = v_+$$

なるものを考えます。ただし、$E > 0$ と仮定します。そうすると、$v_- = \frac{1}{\sqrt{E}}Q(v_+)$ が定義できて[2]、これは

$$H(v_-) = Ev_-, \quad \Gamma(v_-) = -v_-$$

[1] 細かいことを言うと、以下では、ハミルトニアンの固有値は $E_0, E_1, E_2, \ldots$ の様に離散的になると仮定しています。これは、例えば、考えている系が有限体積に収まっている場合にそうなります。

[2] $\frac{1}{\sqrt{E}}$ という因子は $(v_-, v_-) = (v_+, v_+)$ となるように便宜上つけたものです。

を満たします。この議論を逆に v_- の方から始めて v_+ を定義することもできます。つまり、 エネルギーが $E(>0)$ の状態ベクトルは Γ の固有値が $+1$ のものと -1 のものとが必ず同数あって、一対一に対応しているのです。従って、これらの状態ベクトルはウィッテン指数の計算では相殺しあって、寄与しません。

一方、v が H の 固有値 0 の固有ベクトルだとすると、(2) から

$$Q(v) = 0$$

となり、前のような議論は使えません。

結局、ウィッテン指数は、

$$Tr\ \Gamma e^{-\beta H} = n_+ - n_- \tag{3}$$

で与えられることになります。ここで $n_\pm$ は H と Γ の同時固有ベクトルのうち H の固有値が 0 で、Γ の固有値が ± 1 となるものの個数です。

5　おわりに

超対称性がある量子力学系のウィッテン指数は、β に依らないことがわかりました。実はハミルトニアンが何かパラメーター λ に依存しているような状況でも、ウィッテン指数は λ に依らないことが言えます。（何故か？） このような安定した量が存在することが超対称性がある場合の著しい特徴です。考えている系が複雑になってくると (3) の右辺を直接求めるのは難しくなってきます。ところが左辺の方は本当は β にも λ にも依らないはずですから、 β や λ の適当な極限をとって、計算をしてもいいはずです。そのようなうまい極限があってそこで計算できれば、右辺に対して表式が得られる可能性がでてくるわけです。

以上、超対称性の概説をしましたが、本当のおもしろさは、はじめに述べましたように、実際にもっと複雑な系を考察してみないとわからないかもしれません。ただ、ここで解説したような基本的なアイデアが、現在の理論物理学の最前線の研究

に至るまで脈々と生き続けていてそれが数学との交流を深めていることだけは、覚えて頂きたいと思います。