昭和53年度(第3回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，昭和53年8月7日～8月10日開催)

数学入門公開講座

（昭和53年8月1日～10日）

講師：高須　達
伊藤　清
廣中平祐
山口昌哉

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 情報処理の数理（6時間）　　京都大学数理解析研究所教授　髙須　達

情報とその処理とを抽象的にとらえて数学的に定式化するいくつかの試みについて解説する。

(1) 情報
(2) 情報処理機構
(3) アルゴリズム
(4) 人間の思考とその論理

2. 偶然現象の微積分（6時間）　　京都大学数理解析研究所所長　伊藤　清

偶然現象の瞬間的変化は平均的瞬間変化と偶然偏差からなっている。この点に着目して，偶然現象に関する微分積分，微分方程式の理論がどのように組立てられるか，またそれがいかに応用されるかを，通常の微積分と対比しながら説明する。

3. 特異点とカタストロフィー（6時間）　　京都大学数理解析研究所教授　廣中平祐

カタストロフィック（破局的）現象――あるいは一つの動的現象のそういった側面――の中には幾何学的に翻訳して，写像の特異点として扱えるものがある。特異点の代数幾何学的，および位相幾何学的取扱いの方法を紹介して，カタストロフィー（特に初等的なもの）の思想的背景に言及したい。

(1) 写像の特異点
(2) カスプ特異点とカスプ・カタストロフィー
(3) 変形と安定性
(4) 特異点の取扱い方

4. 生物モデルの数学（6時間）　　京都大学理学部教授　山口昌哉

生物の群れのふえ方を把握するのに数学を用いることは古くからおこなわれている。更にすすんで，一種の生物の個体群や，多種の生物からなる群集については数学のモデルをつくって，その動きを記述することが数理生態学とよばれる学問として成立している。これらの分野では微積分とともに差分法が有力な数学的方法である。これらについて解説する。これらの定式化が非線型であることが重要である。

時　間　割

時間 ＼ 日	1日（火）	2日（水）	3日（木）	4日（金）	5日（土）	6日（日）	7日（月）	8日（火）	9日（水）	10日（木）
13:15～14:45	情報処理の数理　（高須）						特異点とカタストロフィー（廣中）			
14:45～15:00	休　憩						休　憩			
15:00～16:30	偶然現象の微積分（伊藤）						生物モデルの数学（山口）			

特異点とカタストロフィー

講師：廣中平祐

期間：昭和53年8月7日～10日
時間：13：15～14：45

特異点とカタストロフィー

(講師) 広中平祐

(時限) PM 15:00 — 16:30
8月7日～8月10日 (昭和53年)

一枚の紙の上にかいた地図は，地面の模様を真上からみたかたちで平面の上に描いたもので，そのまゝでは地面の起伏の様子ははっきりわからない。だから，たとえば，等高線（同じ高さの地点をたどって曲線をひいたもの）を何重にもひいて，夫々の高度を記　入し，特定の地点の大体の高さとか，その地点から低い方，高い方を見渡すときの大体の様子がわかるようにした地図もある。

雨が降って，水が流れ，小川をつくり，いくつもの小川が集まって，やがて大河となり，河下を通って海へと流れていく。その様子をおゝざっぱにたどっていくには，各地点で等高線に直交し，低い方向にむかう矢じるし（ベクトル）を書き込んで，その矢じるしの方向　をたどりながら進んでいけばよい。勿論，雨水が地下に吸いこまれたり，雑草や樹々の枝葉にたまったりといった詳細は一応無視して，思考実験的に話を単純化し（例えば，

8.

地面が全部コンクリートでなめらかにぬりつぶされているなどと想像して）, 考えての話である。雨水の流れの速さを表示するためにベクトルの長さを各地点での地面の傾きの勾配（タンジェント）に比例しておけば様子がもっとはっきりする。このようにして地図（平面）の上に矢じるしの分布，いわゆるベクトル場ができる。

このことを数学的に表現すると，平面上に x, y の座標をとって，各点 (x, y) での高度を $f(x, y)$ と函数で表わせば，その点での雨水の流れを示すベクトルは（$f(x, y)$ が微分可能だと想定し，しかもベクトルの単位長さを適当にきめれば）

$$-\operatorname{grad}(f) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と表せる。このことをもう少し説明してみよう。

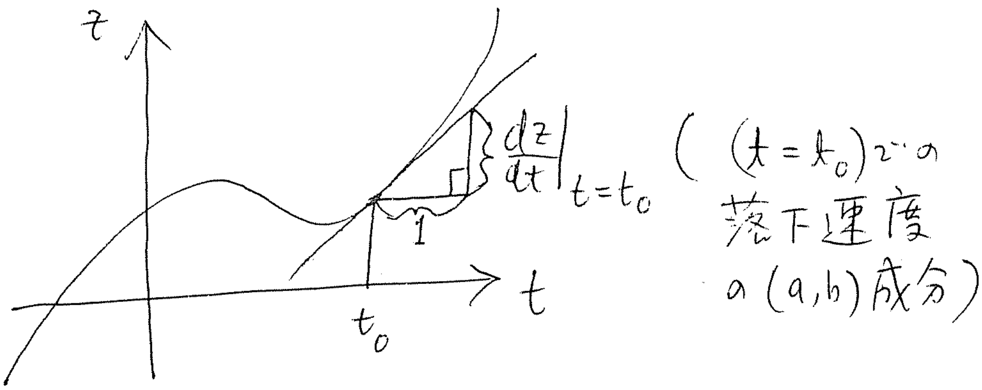
平面の上で一つの方向をきめることは単位ベクトル (a, b)，但し $a^2+b^2=1$，を与えることである。その方向に（単位速度で）直線的に進むことは，時間 t をパラメーターとして

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt \end{cases}$$

で表せる。この直線に沿って函数 f の増減をみるには，

$$z = f(x(t), y(t))$$

の t に関する微分を調べればよい。



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(x'(t), y'(t)\right)$$

$$= \mathrm{grad}(f)\cdot(x'(t), y'(t))$$

(ベクトルの内積)

$$= \mathrm{grad}(f)\cdot(a, b)$$

上の図のように $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} > 0$ のような t_0 では，雨水の流れは t が減少する方向に，又逆に $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} < 0$ のような t_0 では，雨水の流れは t が増大する方向に進むはずである。

もっと正確にいえば，方向 (a, b) での流れベクトルの成分は

$$-\operatorname{grad}(f)\cdot(a, b)\Big|_{x=x_0,\, y=y_0}$$

但し $x_0 = x(t_0) = at_0$, $y_0 = y(t_0) = bt_0$

これは，総ての方向 (a, b) で成り立つから，上に述べたように $-\operatorname{grad}(f)$ を雨水の流れを示すベクトルとみるのが正当である。

写像の特異点.

一般にユークリッド空間から，もう一つのユークリッド空間への微分可能な写像が与えられているとする。即ち $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

が q 個の函数

$$z_i = f_i(x_1, \cdots, x_p),\ 1 \leq i \leq q$$

で与えられているとする。但し $x = (x_1, \cdots, x_p)$ は $\mathbb{R}^p$ の座標，$z = (z_1, \cdots, z_q)$ は $\mathbb{R}^q$ の座標を表す。この写像 f の点 x での Jacobian 行列 $J(x)$ とは (q, p) 型行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1} & & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

のことである。

<u>定義</u>　$0 < q \leq p$ と仮定する。このとき $J(x)$ の (q, q) 型の小行列式 (minor determinants)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_q}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_{i_1}} & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_{i_q}} \end{vmatrix}$$

(但し $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq p$) を色々とってみて，もしその (q, q) 型小行列式の値が点 x で總てゼロと

なるとき，その点を 写像 f の特異点 と呼ぶ。

特に $q=1$ の場合を考えてみよう。このとき f は一つの函数で $J(x)$ は $(1,p)$ 型，即ちベクトルであって，

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right)$$

と一致する。f の特異点とは連立方程式

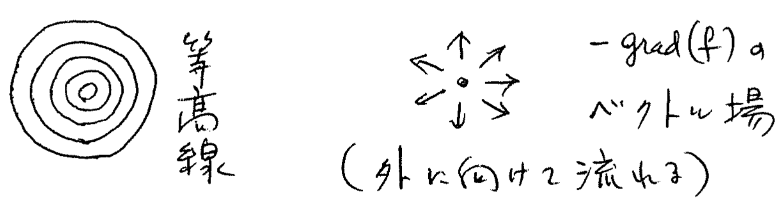
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0$$

又は $\mathrm{grad}(f) = (0)$ (ゼロベクトル)

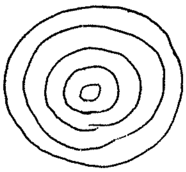
の解のことである。

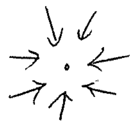
最初に述べた平面地図上の高度の函数 $f(x,y)$ の場合，特異点とは山や岡の頂上とか谷底とかの点である。又山脈の中の二つの隣合った頂点の中間あたりにみられる Saddle point も又特異点の例である。Saddle point では，任意に方向をきめて前後するとき，その点が最高点か又は最低点である。

例 1. (Repeller point — 頂上) $f = -x^2 - y^2$，特異点は原点 $(0,0)$ だけ。

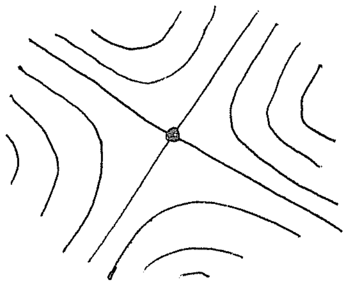


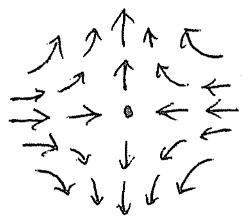
例2 (Attractor point ―底点) $f = x^2 + y^2$, 特異点は $(0,0)$ だけ。





例3 (Saddle point) $f = x^2 - y^2$, 特異点は $(0,0)$ だけ。





この講座の目的は

(1) 函数 f を色々変型するとき，その特異点の近傍でのベクトル場の位相幾何学的特性がどのように変化するか。

(2) 函数 $f(x,y)$ (2変数 x,y) の特異点のまわりでの変型全体をどのようにとらえたらよいか。

(3) 写像 $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ が原点のまわりで局所的に安定しているとは。1. と 2. に関連させて論ずる。

(詳しくは講義で!!)

$\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(0) = 0,\ の分類}$

記号
- $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の座標.
- $Q(t_1, \cdots, t_s)$ は2次式で次の形のもの

$$t_1^2 + \cdots + t_\sigma^2 - t_{\sigma+1}^2 - \cdots - t_s^2,\quad 0 \le \sigma \le s$$

codim = 0 $\boxed{f \sim Q(x_1, \cdots, x_n)}$

codim = 1 $\boxed{f \sim x_1^3 + Q(x_2, \cdots, x_n)}$

codim = 2 $\boxed{f \sim \pm x_1^4 + Q(x_2, \cdots, x_n)}$

codim = 3

$$f \sim x_1^5 + Q(x_2, \cdots, x_n)$$

又は

$$x_1^3 \pm x_1 x_2^2 + Q(x_3, \cdots, x_n)$$

codim = 4

$$f \sim \pm x_1^6 + Q(x_2, \cdots, x_n)$$

又は

$$x_1^2 x_2 \pm x_2^4 + Q(x_3, \cdots, x_n)$$

codim = 5

$$f \sim x_1^7 + Q(x_2, \cdots, x_n)$$

又は

$$x_1^2 x_2 \pm x_2^5 + Q(x_3, \cdots, x_n)$$

又は

$$x_1^3 \pm x_2^4 + Q(x_3, \cdots, x_n)$$

$\boxed{\text{f の unfolding (普遍的変形) F の例}}$

$u=(u_1,\cdots,u_c)$ は変形の parameters, 但し $c=\mathrm{codim}$.

$$f=x^3 \longrightarrow F=x^3+\underline{ux}$$

$$f=\pm x^4 \longrightarrow F=\pm x^4+\underline{u_1x^2+u_2x}$$

$$\begin{cases} f=x^5 \longrightarrow F=x^5+\underline{u_1x^3+u_2x^2+u_3x} \\ f=x_1^3\pm x_1x_2^2 \longrightarrow F=x_1^3\pm x_1x_2^2 \\ \qquad\qquad +\underline{u_1x_1+u_2x_2^2+u_3x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f=\pm x^6 \longrightarrow F=\pm x^6+\underline{u_1x^4+u_2x^3+u_3x^2+u_4x} \\ f=x_1^2x_2\pm x_2^4 \longrightarrow F=x_1^2x_2\pm x_2^4 \\ \qquad\qquad +\underline{u_1x_1+u_2x_2^3+u_3x_2^2+u_4x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f=x^7 \longrightarrow F=x^7+\underline{u_1x^5+u_2x^4+u_3x^3+u_4x^2+u_5x} \\ f=x_1^2x_2\pm x_2^5 \longrightarrow F=x_1^2x_2\pm x_2^5 \\ \qquad\qquad +\underline{u_1x_1+u_2x_2^4+u_3x_2^3+u_4x_2^2+u_5x_2} \\ f=x_1^3\pm x_2^4 \longrightarrow F=x_1^3\pm x_2^4 \\ \qquad\qquad +\underline{u_1x_1+u_2x_1x_2^2+u_3x_1x_2} \\ \qquad\qquad +\underline{u_4x_2^2+u_5x_2} \end{cases}$$