数学入門公開講座

(昭和53年8月1日～10日)

講師：高須　達
伊藤　清
廣中平祐
山口昌哉

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 情報処理の数理（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　髙須　達

情報とその処理とを抽象的にとらえて数学的に定式化するいくつかの試みについて解説する。

(1) 情報
(2) 情報処理機構
(3) アルゴリズム
(4) 人間の思考とその論理

2. 偶然現象の微積分（6時間）　京都大学数理解析研究所所長　伊藤　清

偶然現象の瞬間的変化は平均的瞬間変化と偶然偏差からなっている。この点に着目して，偶然現象に関する微分積分，微分方程式の理論がどのように組立てられるか，またそれがいかに応用されるかを，通常の微積分と対比しながら説明する。

3. 特異点とカタストロフィー（6時間）　京都大学数理解析研究所教授　廣中平祐

カタストロフィック（破局的）現象――あるいは一つの動的現象のそういった側面――の中には幾何学的に翻訳して，写像の特異点として扱えるものがある。特異点の代数幾何学的，および位相幾何学的取扱いの方法を紹介して，カタストロフィー（特に初等的なもの）の思想的背景に言及したい。

(1) 写像の特異点
(2) カスプ特異点とカスプ・カタストロフィー
(3) 変形と安定性
(4) 特異点の取扱い方

4. 生物モデルの数学（6時間）　京都大学理学部教授　山口昌哉

生物の群れのふえ方を把握するのに数学を用いることは古くからおこなわれている。更にすすんで，一種の生物の個体群や，多種の生物からなる群集については数学のモデルをつくって，その動きを記述することが数理生態学とよばれる学問として成立している。これらの分野では微積分とともに差分法が有力な数学的方法である。これらについて解説する。これらの定式化が非線型であることが重要である。

時間割

時間＼日	1日（火）	2日（水）	3日（木）	4日（金）	5日（土）	6日（日）	7日（月）	8日（火）	9日（水）	10日（木）
13:15～14:45	情報処理の数理　（高須）						特異点とカタストロフィー（廣中）			
14:45～15:00	休　憩						休　憩			
15:00～16:30	偶然現象の微積分（伊藤）						生物モデルの数学（山口）			

生物モデルの数学

講師：　山口昌哉

期間：　昭和53年8月7日～10日
時間：　15:00～16:30

生物モデルの数学

山口昌哉

はじめに

物理学や工学と同じように，ただしいささか異なった趣旨で微分方程式は，生物のモデルをつくるのにも役立って来た。1種の個体群の増殖を記述するのに用いられる方程式や相互作用をもついくつかの個体群からなる群集についてもVolterra以来，先ず微分方程式か，連立の微分方程式で表現して各個体群の動態を示すが常道であった。そしてこのような手法をまとめて決定論的な(deterministic)手法とよばれてきた。(Pielou) これに対し，生物の出生と死亡とは偶然におこるので，決定論では取扱えないという立場の人々は決定論に対して確率的あるいは推計的(stochastic)な理論をつくり，そこでは生物個体群や群集の動態を確率過程と考えてその方法によるモデルを考察して来た。特に生物に対する環境のゆらぎによって，生物の動態もまた動揺を生じると考える人は第2の立場に立った。

以上が今までの流れであるが，このような態度，微分方程式を第1に考えるということ，と決定論か確率論か？という2分法とは，最近，重大な局面に立たされているように見える。

というのは，最近の数理生態学者Robert Mayの研究および2人の数学者LiとYorkeの研究によって，今まで温帯の昆虫の個体群の増殖を記述しているとされて来たきわめて簡単な差分式がその中に含まれる一つの定数だけを変化させれば，きわめて複雑な行動をする解を豊富に含んでいることが示されたからである。その複雑さはカオスともいうべきものである。差分式（実は簡単な非線型微分方程式の離散化によって得られたもの）という決定論的手法から確率論的とも呼べるような解の様相が生みだされることは注目すべきことで，しかもLi-Yorkeの仕事はその数学的証明である。別のいい方をすれば，ルネ　トムがその著書「構造安定性と形態形成」の中で予言していた一般化カタストロフがこんなにも易しくつくれるものであるということが判ったわけである。

この講義では，先ず上に述べた古典的ないわゆる決定論的手法による数理生態学のモデルについて説明し，次に実際にこのモデルの一つをコクゾウ虫の一種の実験個体群に適用して，批判され，別の決定論的モデルをつくられるとともに，既に1957年に，上に述べたカオスの研究の発端をつくっておられた京大農学部　内田俊郎氏（名誉教授）の研究を紹介したい。更に，1974年1975年のLi-YorkeおよびMayの研究を説明し，その上で年令構造をも考えに入れ

た2次元のモデルについて，矢張り2次元のみでておこることの説明をするつもりである。この講義を通して，生物モデルというものが，物理や工学で用いられるモデルと大変異なるものであり，その単純に見える表現にもかかわらず数学的な内容が豊かであることも知っていただきたいことである。

I. 孤立した一種の個体群の成長

1種の生物個体群が孤立して，一定の環境のもとに食料以外の他の種の干渉を受けることなく生活しているものとする。例えばガラス容器の中でのバクテリヤの培養のような場合である。そのとき単位時間における誕生する個体数と死亡する個体数とはその時刻における全個体数に近似的には比例するものとする。その比例定数，誕生率をn，死亡率をmとし全個体数を$N(t)$とかくことにすると，

$$\frac{dN}{dt} = nN - mN = (n-m)N = \varepsilon N \qquad (1)$$

という微分方程式が得られる。n, m, したがってεはここでは時間tによって変らない定数と考えておくと，ある時刻t_0での全個体数N_0を知ればそれ以後の動向は：

$$(2) \qquad N(t) = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$$

と書くことができて、$\varepsilon > 0$ の時有名な Malthus の式であり、人口は幾何級数的に増えてゆくというのである。そして実際にも Mazza と Lenti が得たバクテリヤの培養の結果はほぼ(2)の式が示すような増加の様子を示している。

更に、上にのべた假定、ε が個体数 N に無関係であるという假定を再検討すると、例えば、Pearl と Reed (1920年) がしょうじょうバエの或る種について観察したように、この ε は N が或る程度以上になると負になる。つまり個体数の成長は色々な理由で「抑制効果」をもつ、これをしたがって、單純な形できかせるために、(1)における ε のかわりに、

$$\varepsilon - hN$$

を考えたのが、Verhulst - Pearl のロジスティック方程式(3)である。この係数 h のことを「密度効果」とよぶ。

$$(3) \qquad \frac{dN}{dt} = N(\varepsilon - hN)$$

この方程式の解は初期値を N_0 としたとき、

$$(4) \qquad N(t) = \frac{\varepsilon N_0 e^{\varepsilon t}}{\varepsilon + N_0 h (e^{\varepsilon t} - 1)}$$

であって，時間を横軸，個体数をたて軸にとったグラフはきわめてきれいなS字型のカーブになり，tが無限になったとき，このカーブが下から漸近する一つの平衡値がありそれはε/hである。

以上が密度効果の項$-hN$を考へることによってきわめてあざやかに，飽和するカーブを得て，さきに述べたショウジョウバエに対する説明を得たわけであるが，それでも問題がのこった。そのいくつかを述べておくと，

(i) 実際に見られる生物では，個体数が平衡値に達する直前に，必らずといってよい程，振動がおこって，この意味では，上のVerhulst-Pearlの式はあわないこと。D'ancona（1954年）は，外部の環境の影響であろうといっている。

(ii) もう一つは，Allee（1931，1938）が指摘したことで生物によっては，一定の場所に閉じこめられた場合，たしかに，過密 over crowding は一つの抑制効果であるかもしれないが，過疎 under crowding もまた成長の初期には成長をおさえていると主張した。この効果を(3)にとり入れる場合それをAllee効果となづけるのである。

(iii) 中毒の問題，勿論個体が数を増す場合，環境がかわ

らないということは，その成長にともなう廃棄物まで集積してこないという意味で，その効果まで考えに入れると，一たんピークに達した個体群はそれ以後，自分自身の廃棄物によって急速に亡んでゆくようなモデルも数学的につくれる。(Volterra 1934年).

以上が，「密度効果」にからまつて出て来た問題であるが，特に(i)に関しては第2講に述べる思いがけない展開があり，第3講以後の話にもつながつてくる。

相互作用をもついくつかの個体群からなる群集の成長の問題

普通生物は，上であつかつたように一種だけが孤立して他の生物と一切の交渉を断つて生活していることはあまりない。たとえば2種の生物について，一方は他方のエジキであり，そのエジキを喰べる方を捕食者となづけると，捕食関係という関係で結ばれている。説明を簡単にするために，2種からなる捕食者とエジキの個体群についてのVolterra Lotkaの方程式を説明しておく

$N_1(t)$ ： 時刻 t におけるエジキの個体数

$N_2(t)$ ： 時刻 t における捕食者の個体数

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - h_1 N_2) N_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -(\varepsilon_2 - h_2 N_1) N_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_i, h_i > 0 \\ i=1,2 \end{pmatrix}$$

つまり，N_1の増殖率は，捕食者N_2が増えることによって減り，N_2の増殖率はN_1が増えることによって増えるという式であって，そういう効果をロヂスティックにならって，簡単なN_2またはN_1の1次式と仮定したモデルである。(5)については，簡単な不変量（積分）：

$$(6)\quad h_2 N_1 - \varepsilon_2 \log N_1 + h_1 N_2 - \varepsilon_1 \log N_2 = C$$

が見つかり，これは一つの平衡点$\left(\dfrac{\varepsilon_2}{h_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{h_1}\right)$のまわりを時計の針と反対の方向にまわる周期運動をあらわす。軌道は初期値に関係して定まるが，それに関係なく，1周期での個体数の平均は常に上の平衡点の座標であることが注目すべき性質である。Volterraはこのモデルを用いて，D'Anconaの，第1次世界大戦の前後におけるアドリヤ海でのサメの捕かく量の変化についての質問に答えた（1927年）は有名な話である。

(5)について，今までは例えば第1の式でN_1自身の増加により，N_1の増殖率に対する抑制効果を考えに入れなかったがそれを考え，更におなじようにN_2についてもその項を

考えに入れれば，次の形の連立方程式が得られる：

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = (a_1 - a_{11}N_1 - a_{12}N_2)N_1 \\ \\ \dfrac{dN_2}{dt} = (a_2 - a_{21}N_1 - a_{22}N_2)N_2 \end{cases}$$

この場合には，$a_1 = \varepsilon_1$，$a_2 = -\varepsilon_2$，$a_{11} > 0$，$a_{12} = h_1$，$a_{21} = -h_2$ $a_{22} > 0$ であるが，a_i および a_{ij} がすべて正の場合には，全く別の現象：N_1，N_2 は第3のエジキを共通にもちそれを競争して喰べるというゆわゆる競合 Competition を記述するのに用いることができる。a_i や $|a_{ij}|$ の値およびそれ等の関係によって，2者共存，1者のみ残り他は絶滅などの場合を分類することができる。

Ⅱ　ロヂスティックの離散化と離散的モデル

もう一度，方程式(3)について，(4)のような陽明的に書かれた解をたよりにせずに解の形を出すことを考えよう．具体的には(3)における微分商を有限の差分商でおきかえて，新しく，離散的なモデルを得て，それについて論ずることである。

このことは2つの見方から大変重要なことである。その1つは(3)という微分方程式の近似としての差分方程式について論ずるという見方であり，この場合には時間差分 Δt は小

さいというだけであまり生物学的意味をもたないが，もう一つの見方は，Δt を一つの種の個体に関するライフサイクルの単位 — 世代 (generation) と見る考えである。この場合には Δt は生物学的意味をもち，むしろ $\Delta t \to 0$ とすることは近似になってしまう。というのは例えばセミのように一世代の長さは9年から13年という長い時間であって，成虫は卵を生みつけると全部死んでしまうような non overlapping な generation をもつ場合，(3)よりもそれを離散化したものの方が現実に近くなる。この2つの立場は両方とも重要である。たとえば第1の立場は(4)のような陽明的な(3)の解が求まらない場合を考察する時に必要であり，第2の立場も重要さはいうまでもないであろう。

ところで第1に注意したいのは(3)だけを考えて見ても，その離散化は無限の可能性がある。その一つ二つをここにあげて見ると 先ずもっとも素直に考えられるのは次のものである。$N(t_0+n\Delta t) = N_n$ とかくことにすれば，

$$(8) \qquad N_{n+1} - N_n = \Delta t \cdot N_n(\varepsilon - h N_n) \qquad (n=0,1,\ldots)$$

である。又少しだけ工夫して，右辺における1つの N_n だけ N_{n+1} でおきかえると，

$$(9) \quad N_{n+1} - N_n = \Delta t \ N_n (\varepsilon - h N_{n+1})$$

と書いても(3)の近似としてかわりない。更にもっと工夫して, Δt を $\dfrac{e^{\varepsilon \Delta t} - 1}{\varepsilon}$ でおきかえたものは

$$(10) \quad N_{n+1} - N_n = \frac{e^{\varepsilon \Delta t} - 1}{\varepsilon} N_n (\varepsilon - h N_{n+1}).$$

と書かれるが, (8), (9), (10) はそれぞれ(3)の近似であるにもかかわらず少しづつちがった性質をもっている。共通していることは Δt を固定して見ればいづれも

$$(11) \quad N_{n+1} = F_{\Delta t} (N_n)$$

という形にかくことができ, N_0 という初期値を t_0 であたえれば $t = t_0 + n \Delta t$ という時刻での N の値は(11)を用いて次々と求めることができることである。けれども重要なのは(8)と(9)(10) について解の様子がいく分異なることである。特に(10) については, いささか工夫しすぎと思われるかもしれないが, それだけのねうちがあるものであって, 実は(10)は(3)の同じ初期値の解と完全に一致(もちろん $t_0 + n \Delta t$ という離散的な時刻で)する。つまり誤差ゼロの離散化なのである。

これ等のことは, 日本でも京大農学部の内田俊郎氏や理学

部森下正明氏によって1950年代にはすでに知られていた。

これより先1941年頃，内田氏はコクゾウ虫の一種である Azuki weevil（アヅキゾウムシ）Callosobruchus chinensis (L) の実験個体群を環境を一定に保ちながら観察していた。この個体群については雌一匹あたりの増殖率：

$$(12) \qquad \frac{N_{n+1} - N_n}{\frac{1}{2} N_n}$$

と親の世代の個体数 N_n とが(8)という離散化では1次関係にあるにもかかわらず，現実には1次関係になっていないとえうことが知られていた。(9)または(10)が意味するところは (12) が N_{n+1} と1次関係をもつということで，この方，特に(10)は，上の内田氏のアヅキゾウ虫のデータにははっきりあてはまり一応は解決した。

しかし，Iで説明(i)で述べた，平衡点の近くでおこる，アヅキゾウ虫のような場合かすかにおこる振動である。これについて更に追求した内田氏と共著者の藤田氏は1957年に(11)と関連した新しいモデルを提案した。それについて少し詳しく説明すると，先ず (10) のモデルを(11)という陽明的な形に書く：

$$(13) \qquad N_{n+1} = \frac{N_n}{b + cN_n}$$

ここで $b = e^{-\varepsilon\Delta t}$， $c = (1-e^{-\varepsilon\Delta t})\frac{h}{\varepsilon}$ である。
これに対して新しいモデルは次のものである：

$$(14) \qquad N_{n+1} = N_n\left(\frac{1}{b+cN_n} - \sigma\right)$$

ここで σ は $0 \leqq \sigma \leqq 1$ という定数である。この(14)の意味を説明すると，実際に実験個体群を見ている人にとって，(13)は不十分であって，第n+1世代の個体数は，第n世代の親から生まれた子と第n世代の親全部がのこっていると考えているがむしろ生物によっては一世代の間に第n世代の親は σ という割合いで死亡していると考えるべきであるというのである。

このように(14)を考えると，平衡点附近での振動がはっきりと説明でき，別の種のマメゾウ虫，*Callosobruchus maculatus* ヨツモンマメゾウムシでは明瞭な振動を観察されたのである。この場合は $\sigma = 1$ となっているがこのことは卵を生みつけて間もなく親は死ぬという典型的な non overlapping generation をあらわし，$\sigma = 0$ は親の平均の命の長さの方が卵がかえって成虫になる時間より長い overlapping generation をあらわしているというわけである。

ここで差分方程式(8)(9)(10)(14)を見ると(11)の形にかいたとき(9)(10)と(8)(14)とは明らかに別々の種類である

(9)(10) に対する $F_{\Delta t}$ は (13) に示されるような N_n の単調増加関数であり、(8)(14) は山形の単調でない関数なのである。(8) については少し書きなをしておく、(8) を書きなおして

$$N_{n+1} = \left(1 + \varepsilon\Delta t - h\Delta t\, N_n\right) N_n$$

そこで $x_n = \dfrac{N_n}{1+\varepsilon\Delta t}$ $n = 0, 1, 2, \cdots$

と新しい未知関数を導入し、$a = 1 + \varepsilon\Delta t$

と書くことにすると次の (15) が得られる

$$(15) \qquad x_{n+1} = a\, x_n (1 - x_n)$$

Ⅲ　1次元のカオス　Li - Yorke の定理

ここでは一般的に (8) すなわち (15) や (14) の型の差分方程式をしらべよう，一般的にかくと，

$$(16) \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

で f は単調でないものとしよう，例として以下では (15) のみを考えることにしよう，(15) では $f(x) = a x(1-x)$ であつて今 a の値を $0 \leq a \leq 4$ という区間に制限しておくと x が $0 \leq x \leq 1$ であるとき $f(x)$ もまた $0 \leq f(x) \leq 1$ である ところが a が 0 から 4 まで変化するとき (16) の解 $\{x_n\}$ の

つれにともなってその変化の様子は思いがけなく変化する。
それを順に書いて行くと、

(i) $0 \le a \le 1$ では x_0 が何であろうと $x_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

(ii) $1 < a \le 2$ では x_0 が何であろうと $x_n \nearrow 1 - \frac{1}{a}$ $(n \to +\infty)$.

丁度この(ii)がロジスティックの曲線にあたり、前に述べた差分式(9)(10)はΔtが何であっても(ii)のような解しかない。

(iii) $2 < a \le 3$, ここでは $x_n \to 1 - \frac{1}{a}$ はかわらないが nが大きくなると振動がおこり、それは減衰して平衡値に達する。内田氏の注目した挙動である。

(iv) $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3.449$ このときは $x_0 = 1 - \frac{1}{a}$ である場合をのぞいて、どんな x_0 にたいしても x_n は遂には2周期の減衰しない周期振動に漸近する。$f^2(x) = x$ でかつ $f(x) \ne x$ でない2つの値 $x = p, q$ のいう値を1周期ごとに交代にとる関数に漸近する。ここで一寸定義しておこう。

定義 $f(x)$が今Iという区間で連続で、IからIの中への写像であるとする(例えば $f(x) = ax(1-x)$ は$[0,1]$区間から$[0,1]$区間への連続な写像である。ただし $0 \le a \le 4$) そのとき f^k はfのk回の合成写像とするとき、$f^k(p) = p$ で且つ $f^s(p) \ne p$ $(1 \le s < k)$ であるとき pをfのk-periodic point という。(iv) ではじめて 2-periodic point があらわれたのである。

a が $1+\sqrt{6}$ より大になる時はじめには，4周期点があらわれごくしばらくの間つづくがそのあと8周期点がとってかわりこのような調子で 2^n 周期点がつぎつぎとおおよそ $a=3.59\cdots$ のところにこれらの値は集積する。このあたりからは計算機でも計算しきれないが，Sarkovski は1964年に次のような美しい定理を証明していたそうである。すべての正の整数を次のように順序をつける：

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots\cdots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec \cdots$$
$$\prec 2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2 7 \prec \quad \cdots \quad \prec 2^n 3 \prec 2^n\cdot 5 \prec 2^n 7 \prec$$
$$\cdots \prec 2^n \prec 2^{n-1} \prec \quad \cdots \quad \prec 2 \prec 1$$

こうしてできた列の中の勝手な数を p とすると，もし(15)に p-periodic point があれば，任意の q で $p \prec q$ のものについて q-periodic point が存在する。というのがその定理である。

これから10年おくれて，Li-Yorke は次のような定理を発見して，その論文に「3周期はカオスを意味する」という論文を発表した。その定理を説明しよう。

<u>Li-Yorke の定理</u>　差分方程式 $x_{n+1}=f(x_n)$ において，f は有限区間 I から I への連続な写像として，次のような4点が I に存在するとしよう： $d \leq a < b < c$ であって且つ

$f(a)=b$，$f(b)=c$，$f(c)=d$ 　　　　そのとき

次のことが成立する。

(i) すべての正整数 k について $x_{n+1} = f(x_n)$ は k-periodic point をもつ

(ii) Iに非可算集合 S が存在して，その2の要素 p, q を任意にとって無限の $\{n\}$ の部分列 $\{n_s\}$ をえらべば

$$(イ)\qquad \lim_{s \to +\infty} |f^n(p) - f^n(q)| \geq \delta > 0.$$

ともでき，更に別の部分列 $\{n_t\}$ をとれば

$$(ロ)\qquad \lim_{t \to +\infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

とできる。

(iii) 更に p を S の要素とし，q を任意の periodic pt として矢張り(イ)のことが成立する。

この定理の意味は重大である。(i)は或る意味で前の定理で示されたことであるけれども，カオスというのにもっともである。つまり色々の無限に多くの周期の周期解があるということは初期値に対して非常に敏感に解が違っていることでもある。更に(ii)(iii)は絶対に周期解にならない初期値も豊富にあることを示している，R. May によればこのようなことがおこり得る差分方程式は数理生態学に多くの例があるという

ことである。特にIIで述べた円周の(14)という差分方程式もその例である。上の定理の証明のうち i)は比較的易しいのでそれを説明したい。証明の鍵は、fについて、もしある区間Jについて $J \subset f(J)$ が示されればJの中に少くとも一つ不動点があることと、連続関数fについての中間値の定理である。つまりfがIから実数軸Rへの連続の写像のときもし区間 $I_1 \subset f(I)$ ならば、必らずQという区間がIにあって、

$$I_1 = f(Q)$$

となるということである。

さてこの定理を(15)に応用するためにはこの定理の仮定をfがみたす必要があるが果して $a = 3.82\cdots$ ぐらいのところでfが6周期点をもつことがわかる。よって f^2 は3周期点をもち定理の仮定をみたし、したがって結論がf^2について証明され、したがってfについてもみたされたことになる。つまりカオスの存在が証明されたことになる。実際 $a = 4$ のときは$f(x)$の最大値は丁度1となりグラフは一辺1の正方形に一杯になる。そのとき、$h(x) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}(\sqrt{x})$ として合成関数

$$g(x) = h \circ f \circ h^{-1}$$

をつくると、fを正方形にきっちりはまった2等辺三角形をグラフにもつgにおきかえて論ずることができる。これについてはもし正方形の一辺である2等辺三角形の底辺を2等分

しつぎつぎと $x_{n+1} = g(x_n)$ で得られる x_n の値を 0 に近い半分にあるとき 0, 1 に近い半分にあるとき 1 とすれば, ほとんど銅貨投げての裏表について 0 と 1 とに分類したと同じ 0 1 の系列がつくられ, それは初期値の少しの変化できわめて微妙に変化する。実は全く確率的なものであることが示されている。

IV. 2次元のカオス. 2 age classes model.

今までは年令を考えに入れなかったが, ここではじめて年令にも個体数が依存するとして, 年令 a で時刻 t での個体数を $n(t,a)$ であらわすと, 次のようにして年令依存の個体数の変化を記述する式ができる。Von Forester 方程式:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} + \dfrac{\partial n}{\partial a} = -\mu n \\ n(t,0) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} b\, n(t,a)\, da \end{cases}$$

ただしここで μ, b はそれぞれ死亡率, 産出率である。これをうんと簡単な離散モデルにするため年令には2つ, 弱年と成年しかないものとすると次のような簡単なモデルができる Leslie の線型モデルと呼ぶ:

$$(18)\quad \begin{cases} n_2(t+1) = n_1(t) - \mu_0 n_1(t) \\ n_1(t+1) = b_1 n_1(t) + b_2 n_2(t) \end{cases}$$

ここでμ, b_1, b_2は本当はn_1, n_2にも依存しているのでLeslieはその依存性をも考えに入れた連立方程式をつくった。いずれにしても，今度は

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

というベクトルを用いておけば，ベクトルの方程式

$$(19) \quad \mathfrak{n}_{t+1} = \mathbb{F}(\mathfrak{n}_t)$$

ができる。今は簡単のために $1-\mu_0 = 常数 = l$,

$$b_i(\mathfrak{n}) = b_i\, e^{-a(n_1+n_2)}$$

と仮定し，計算機でといて見ると，$b_1=b_2=r$, $a=0.1$ $l=1$ のとき，$r=7.5$ ぐらいでは安定な一点に収束し，$r=10.5$ で丁度3周期点が安定であり，$r=17$ ぐらいで3方に局在したカオスがあらわれる。ただしこれらについての数学的な研究は未だである。2次元と1次元のちがいはカオスが次元が一つ低い部分集合にとじこめられることもおこることである。

以上で，大体の説明を終るが，これらの問題はきわめて重要な問題であって，完全な数学的説明をする必要があるがそれに対し多くの数学者が手をつけはじめた。たとえば

34

Li-Yorke の定理の2次元以上への拡張など，数学者が今までとりあつかった問題以上のものをふくみ現在研究中である。