昭和59年度(第8回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，昭和59年7月30日～8月2日開催)

数学入門公開講座

昭和59年7月24日(火)から8月2日(木)まで

<table>
<tr><th>日 / 時間</th><th>7月 24日(火)</th><th>25日(水)</th><th>26日(木)</th><th>27日(金)</th><th>28日(土)</th><th>29日(日)</th><th>30日(月)</th><th>31日(火)</th><th>8月 1日(水)</th><th>2日(木)</th></tr>
<tr><td>13：15～15：00</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td colspan="2" rowspan="3">休講</td><td>廣中</td><td>廣中</td><td>廣中</td><td>廣中</td></tr>
<tr><td>15：00～15：15</td><td colspan="4">休憩</td><td colspan="4">休憩</td></tr>
<tr><td>15：15～17：00</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>岩井</td><td>岩井</td><td>岩井</td><td>岩井</td></tr>
</table>

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. ゲームの理論をめぐって(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　一松　信

ゲームの理論には，いろいろの側面がある。ここでは主に2人の純戦術ゲームの具体例について，必勝戦術を解説し，合せてConway-Knuthの超現実数とゲームの関連を論ずる。

2. メビウスの問題をめぐって(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　松浦重武

凸n角形($n \geqq 3$)のn個の頂点のうちで，隣接する三頂点からなる三角形の面積をすべて知って，もとの凸n角形の面積を求める問題を考える。$n=3$ の場合，$n=4$ の場合は問題がやさし過ぎるが，$n=5$ の場合は，そう簡単にはゆかない。この $n=5$ の場合がメビウスの問題である [興味ある人は，解答を試みよ]。n が一般の場合($n \geqq 6$)には，どうなるか？　これらを含めて，種々の問題を取り扱う予定である。

3. 結び目と特異点(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　廣中平祐

トポロジーの一分野として結び目はその理論の美しさと難しさで多くのトポロジストがいどんだ課題である。一方代数曲線論も同様の魅力があるが，特にその特異点と結び目の両理論の関係は深く面白い。

4. 多次元立方体を切る(7時間)　京都大学教養部助教授　岩井齊良

立方体を平面で切ると，切り口には，三角形から六角形までのいろんな形が現れる。それでは，四次元や五次元の立方体(?)を切ると，切り口の図形はどんなものになるか。

四次元立方体の切り口は三次元だから，実物をお目にかけることができる。五次元立方体の切り口は四次元であるが，これは三次元的展開図で示すことができる。

時間＼日	7月 24日(火)	25日(水)	26日(木)	27日(金)	28日(土)	29日(日)	30日(月)	31日(火)	8月 1日(水)	2日(木)
13：15～15：00	一松	一松	一松	一松	休講	休講	廣中	廣中	廣中	廣中
15：00～15：15	休憩						休憩			
15：15～17：00	松浦	松浦	松浦	松浦			岩井	岩井	岩井	岩井

3. 結び目と特異点 (7時間)

京都大学数理解析研究所教授　廣　中　平　祐

1984, July 30, 31 August 1, 2　13:15-15:00

59. 7. 31

参考ノート (広中平祐)

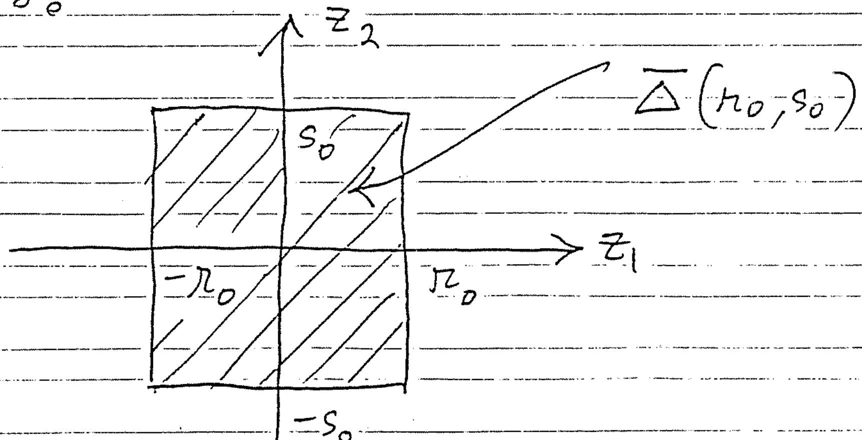
複素変数 z_1, z_2 (2変数) を考える。

記号: $\overline{\Delta}(r_0, s_0) = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq r_0, |z_2| \leq s_0\}$

但し, r_0, s_0 は正の定数。

$\overline{\Delta}(r_0, s_0)$ は $\mathbb{C}^2$ の部分集合で, 変数の z_1, z_2 を実数値に限った範囲で図は次のような形となっている。

図(1)



$\overline{\Delta}(r_0, s_0)$ の境界部分は, 2つの部分の和集合になっている。即ち,

$$D_1(r_0, s_0) = \{(z_1, z_2) : |z_1| = r_0, |z_2| \leq s_0\}$$

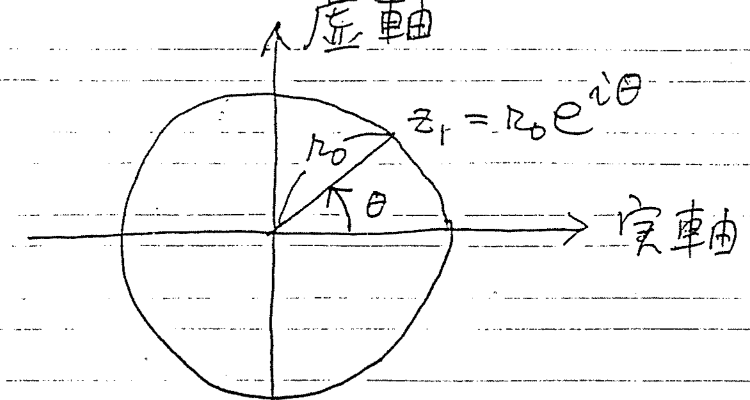
$$D_2(r_0, s_0) = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq r_0, |z_2| = s_0\}$$

実変数に限った図(1)でいえば, D_1 は左端と左端のたて2辺, D_2 は上端と下端のよこ2辺である。しかし, 実際には, z_1, z_2 は複素変数であり, D_1 や D_2 は夫々ドーナッツ形の3次元

立体(solid torus)である。D_1 の形を少し詳しく調べてみよう。(D_2 は z_1 と z_2 の2変数を交換した形で、その構造の原理は同様である。)

D_1 の形を決定する條件は2つある。

<u>條件1</u>. $|z_1| = r_0$ これは複素数 z_1 を極座標で標示すると $z_1 = r_0 e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, であり、$\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ は同一の値をとる。即ち

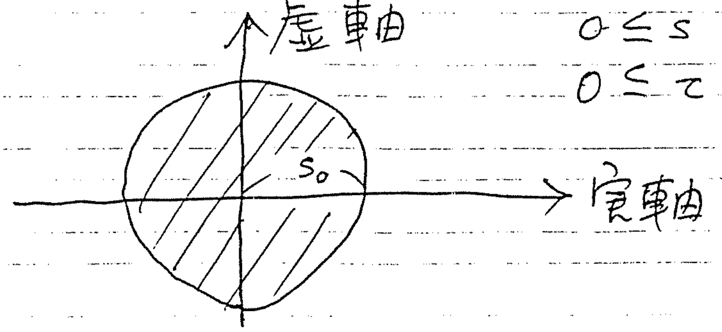


一変数 z_1 に限ってみると、條件 $|z_1| = r_0$ は半径 r_0 の円(中心は原点)を意味する。

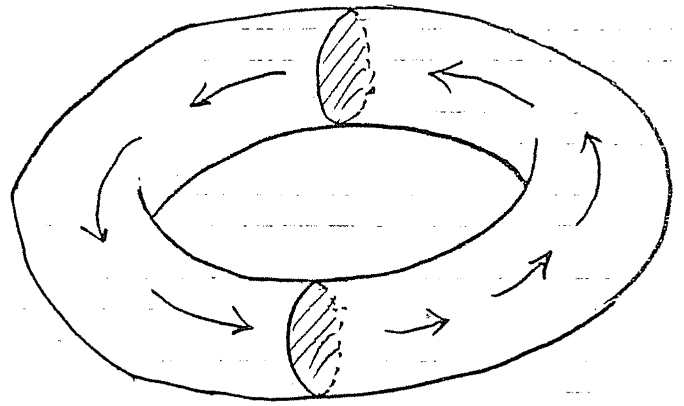
<u>條件2</u>. $|z_2| \leq s_0$ これは複素数 z_2 の極座標による標示でみると、$z_2 = s e^{i\tau}$,

$0 \leq s \leq s_0$

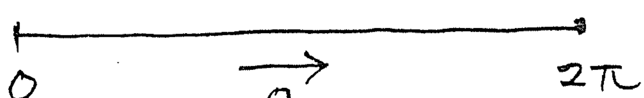
$0 \leq \tau \leq 2\pi$



一変数 z_2 に限ってみると，條件 $|z_2| \leq s_0$ は半径 s_0 の円板（中心は原点）を意味する。條件1を満たす z_1 の任意の値に対して，z_2 は條件2を満す任意の値がとれる。これを言いかえると，半径 r_0 の円の各点に，半径 s_0 の円板が対応し，その円の点が円上を一周して立体 D_1 ができる。これは D_1 がドーナッツ形の立体であること示す。



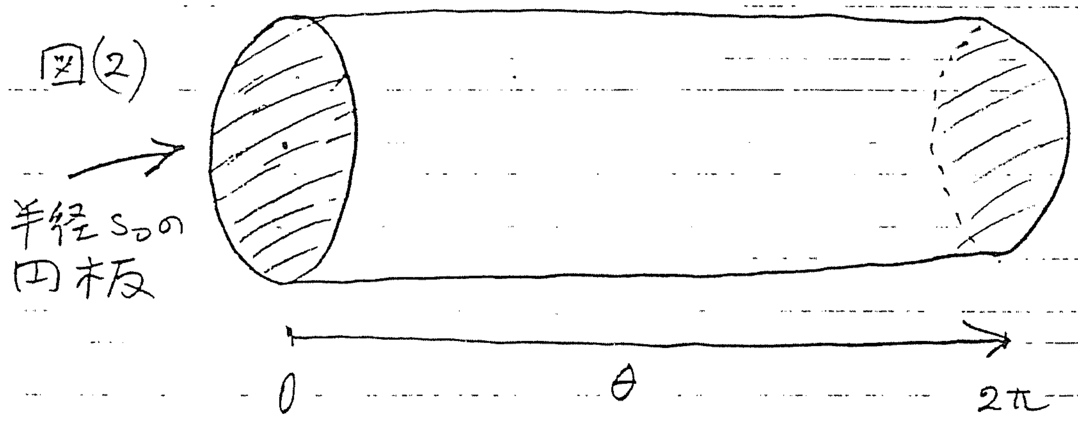
D_1 をもう少し正確に標示することを考えてみよう。半径 r_0 の円 $\{z_1 = r_0 e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ は，θ をパラメーターとして考えると，線分



の両端を同一視したものとみなせる。この同一視を忘れて，D_1 を考えてみると，下図のような

円柱ができる。

図(2)

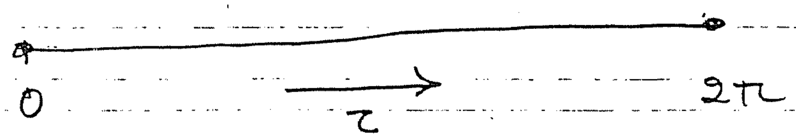


但し，ここでは横の長さをr_0倍することを無視している。

半径s_0の円板$\{z_2 = s e^{i\tau},\ 0 \leq s \leq s_0,\ 0 \leq \tau \leq 2\pi\}$の円周だけを考えてみると，

$$円 \{z_2 = s_0 e^{i\tau},\ 0 \leq \tau \leq 2\pi\}$$

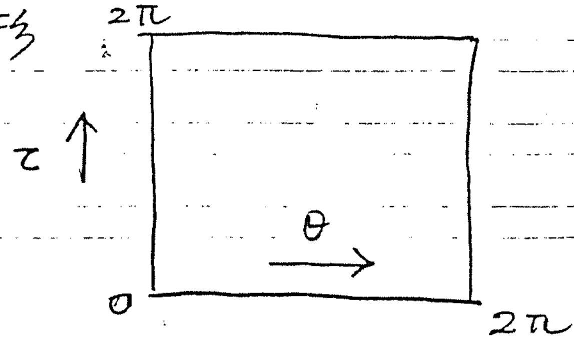
となり，τをパラメーターとして考えると，線分



の両端を同一視したものとみなせる。但し，長さがs_0倍されることは無視しての話である。

従って，図(2)の円柱の中味を取り除いた円管は，正方形

図(3)



の上下2辺を同一視したものと考えられる。

もともとのD_1を考えると、D_1の表面はトーラスであり、そのトーラスは次の順序で再構成できる。

1. 図(3)の正方形から出発して、たての長さをs_0倍し、上辺と下辺を同一視して(まげて重ね合せ)図(2)の中味を除いた円管を作る。

2. この円管の長さをr_0倍して、左右両端の2円を同一視する。

結論として、実際の長さ,大きさが問題でなく形の特性だけに注目するときには(即ち、トポロジーの観点から図形を調べることにすると)D_1の表面であるトーラスは、θとτをパラメーターとして、図(3)の正方形から出発して上辺と下辺,左辺と右辺を同一視して構成できる。このトーラスの上の曲線を描くとき、θとτがパラメーターであることを忘れないように!

(続)参考ノート (広中平祐)

一般に方程式 $z_2^n = z_1^m$ (n, m は正の整数) で定義された特異点を考える。この特異点に対応する knot を実際に描くには次のようにすればよい。

$$X = \{(z_1, z_2) : z_2^n = z_1^m\} \subset \mathbb{C}^2$$

但し z_1, z_2 は複素変数とする。

この場合, $D = D(r_0, s_0)$ で $r_0 = s_0 = 1$ とする。すると $D = D_1 \cup D_2$ で

$$D_1 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = 1, \ |z_2| \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, \ |z_2| = 1\}$$

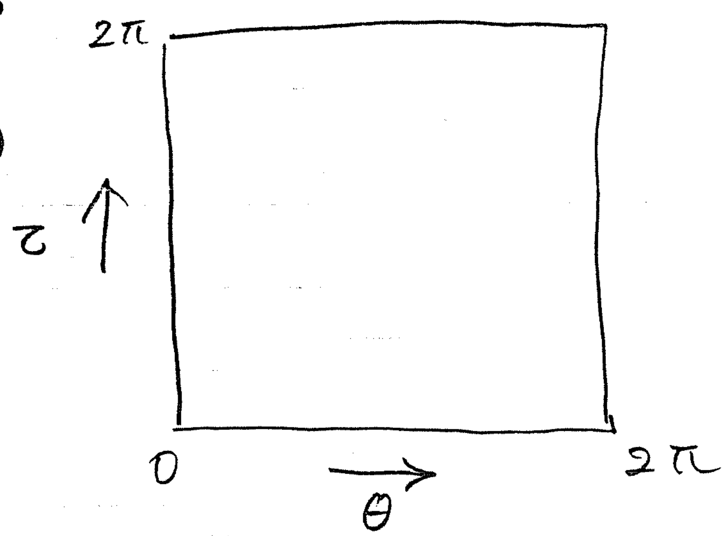
求める knot $X \cap D$ を描くために, 先ず $(z_1, z_2) \in D$ のためには $|z_1| = 1$ かまたは $|z_2| = 1$ であることに着眼する。一方 X の方程式より, $|z_2^n| = |z_1^m|$ であり, 従って $|z_2|^n = |z_1|^m$ である。$|z_1| \geq 0, |z_2| \geq 0$ は $|\ \ |$ の定義から何時でも成立する。従って $|z_2|^n = |z_1|^m$ から $|z_2| = |z_1|$ が導き出される。以上のことから, $(z_1, z_2) \in X \cap D$

ならば $|z_1| = |z_2| = 1$ でなければならない。
即ち $X \cap D$ は D_1 の表面トーラス

$$T = \{(z_1, z_2) : |z_1| = |z_2| = 1\}$$

に含まれる。 T のパラメーターとして θ と τ を取る，但し $z_1 = e^{i\theta}$ ， $z_2 = e^{i\tau}$ である。

図(1)



T は図(1)の上辺と下辺，左辺と右辺を同一視することによって得られる。

方程式 $z_2^n = z_1^m$ より

$$e^{in\tau} = e^{im\theta}$$

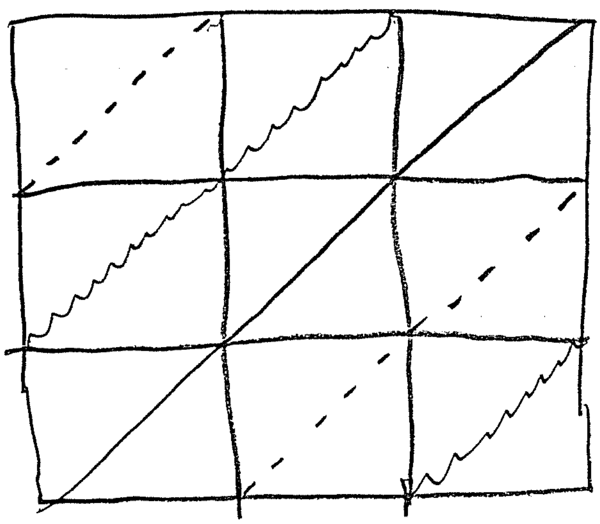
従って $n\tau = m\theta + (2\pi \text{ の整数倍})$

即ち $\tau = \dfrac{m}{n}\theta + \left(\dfrac{2\pi}{n} \text{ の倍数}\right)$

これは図(1)の正方形の中で勾配が $\frac{m}{n}$ の直線群である。これを描くためには

1. 図(1)のたて軸を n 等分する
2. 図(1)のよこ軸を m 等分する。
3. こうしてできた nm 個の長方形のそれぞれについて対角線(左下角から右上角へ)を引く。
4. このようにしてできた図(1)の斜線において、図(1)の上辺と下辺，左辺と右辺を夫々同一化する。

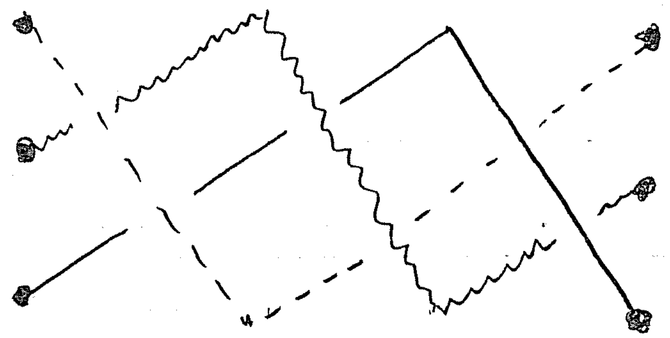
例えば，$n = m = 3$ とすると



上辺と下辺を同一化する(上辺を前面に引張りだして下辺に重ねる)とき，

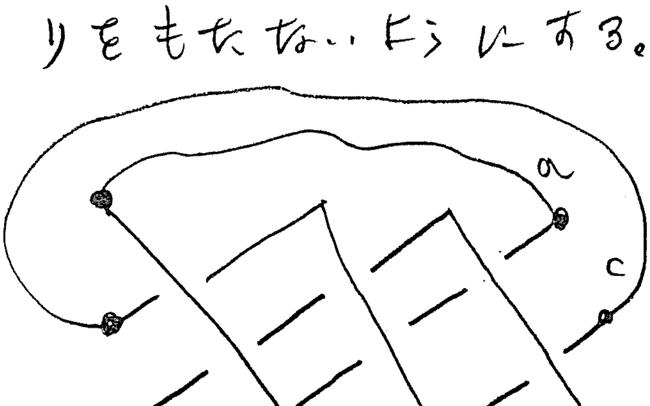
左端また右端で同一化すべきでない点，特に斜線の端点が重なると見難くなるので，一つのより方便は，

(A) 最上段を上下に引きのばして（$n-1$倍にして），下に折り下げるとよい。

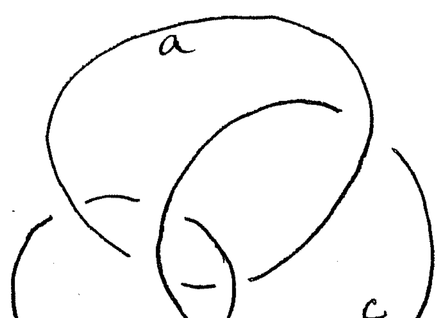


次に左辺と右辺を同一化するとき，結果を見易くするために

(B) 左端を引きのばして，対応する右端につなぐ。但し，つなぎ線が重なりをもたないようにする。



即ち



昭和59年度(第8回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和59年7月30日～8月2日開催)

(続々) 参考ノート (広中平祐)

$N>0$ を十分大きな数として，方程式

式(1) $$z_2 = z_1^{\frac{m_1}{n_1}} + \frac{1}{N} z_1^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \left(\frac{1}{N}\right)^2 z_1^{\frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}} + \cdots \cdots + \left(\frac{1}{N}\right)^g z_1^{\frac{m_g}{n_1 n_2 \cdots n_g}}$$

を考える。($N > \max\{n_1, \cdots, n_g\}$ とすれば十分) 分数指数を含んでおり，z_2 は z_1 の代数関数(有限多価関数)であって，式(1)の意味は次の通りである。

(1) 任意の z_1 の値に対して，$\zeta_1 = z_1^{\frac{1}{n_1 \cdots n_g}}$ は $n_1 n_2 \cdots n_g$ 個の値を取り得る。即ち ζ_1 は $\zeta_1^{n_1 n_2 \cdots n_g} = z_1$ の任意の根である。

(2) (1)のような任意の ζ_1 に対して z_2 の値を

$$z_2 = \zeta_1^{n_2 \cdots n_g m_1} + \frac{1}{N} \zeta_1^{n_3 \cdots n_g m_2} + \frac{1}{N} \zeta_1^{n_4 \cdots n_g m_3} + \cdots \cdots + \left(\frac{1}{N}\right)^g \zeta_1^{m_g}$$

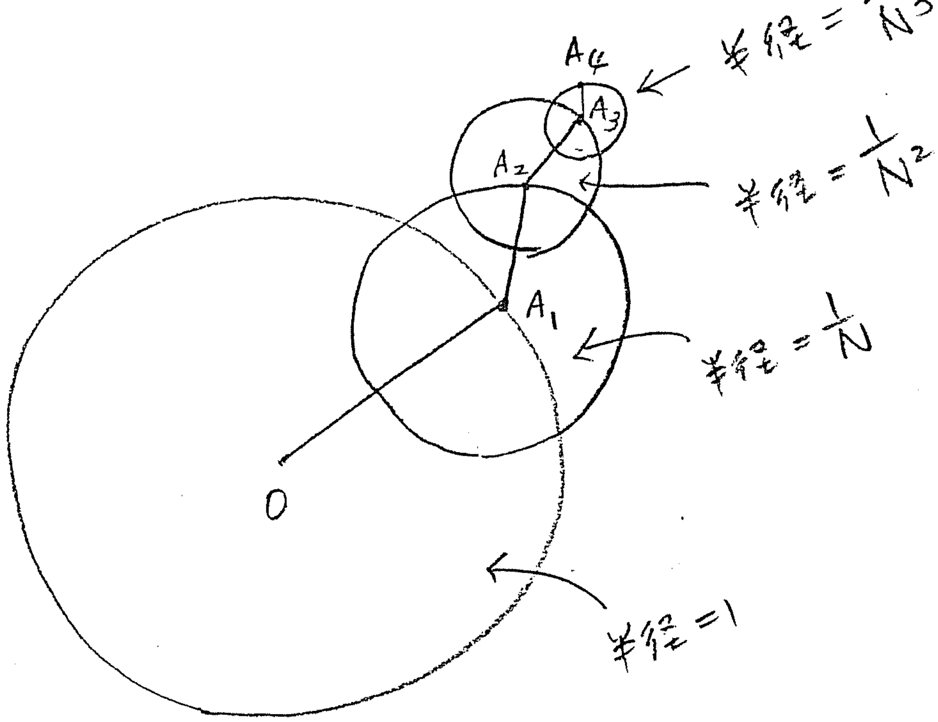
できめる。

(3) 式(1)はこのようにしてきまる (z_1, z_2) の全体をその解の集合とする。

さて 式(1) で 定義された 複素曲線 X の 原点における 特異点 を 考え，それに対応する knot を 求めてみよう。

z_1 の値が変るとき z_2 の値がどのように変化するかを調べるのに，

簡単のために $g=4$ とすると



$$A_1 = z_1^{\frac{m_1}{n_1}}$$

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{N} z_1^{\frac{m_2}{n_1 n_2}}$$

$$A_3 - A_2 = \frac{1}{N^2} z_1^{\frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}}$$

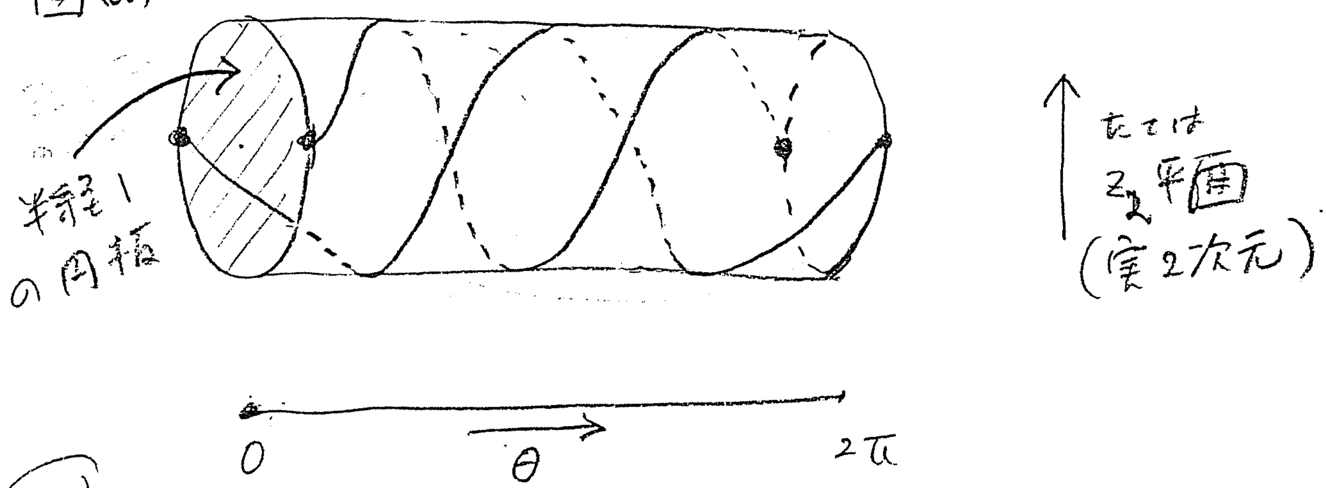
$$A_4 - A_3 = \frac{1}{N^3} z_1^{\frac{m_4}{n_1 n_2 n_3 n_4}}$$

$$A_4 = z_2$$

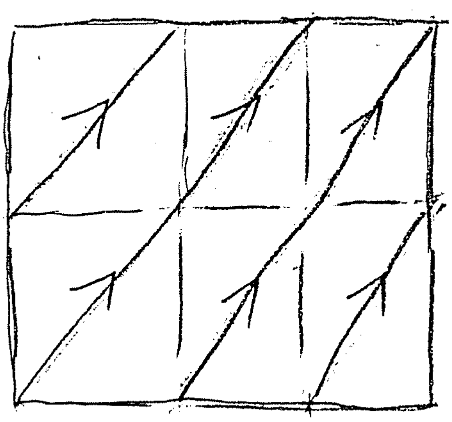
となり，先づ A_1 がどのように動くか，次に A_2-A_1 がどのように，次に A_3-A_2 がどのように，次に A_4-A_3 がどのように，そして最後に A_4 即ち z_2 がどのように動くかを調べる。 この手順に従って，

[1] $z_2 = z_1^{\frac{m_1}{n_1}}$ の knot を描く このとき $|z_1| = 1$ 即ち $z_1 = e^{i\theta}$，$0 \le \theta \le 2\pi$，として

図(a)



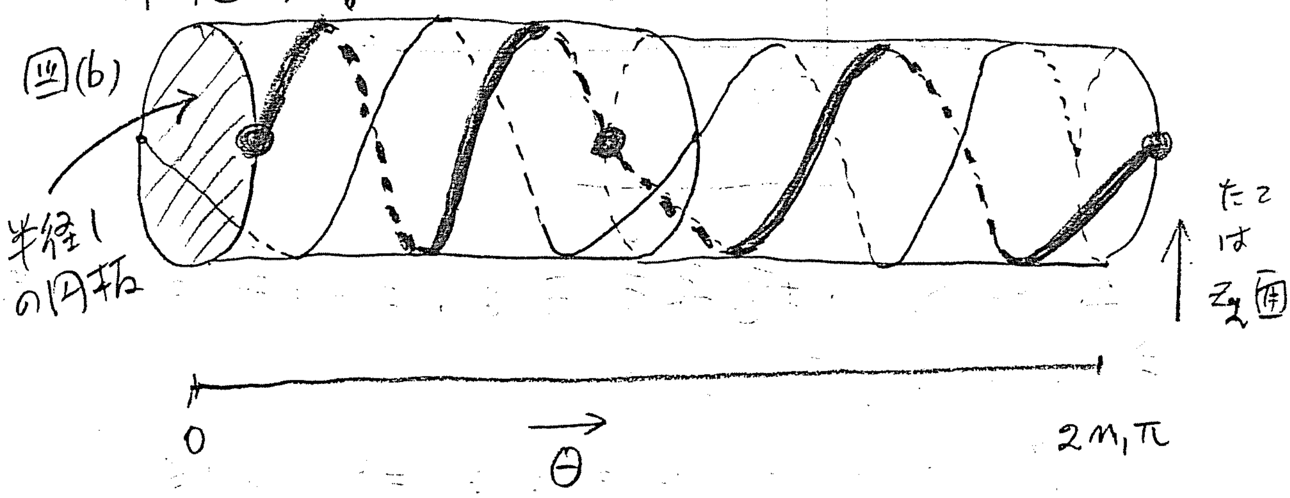
(注) この図は $n_1=2$，$m_1=3$ の場合を描いたもの で θ とての正方形でいうと



上辺と下辺をむこう側に押しだして同一化する。

このように[1]は半径1のtorusに乗ったTorus knotで分数 $\frac{m_1}{n_1}$ に対応するもの。

[2] 図(a)の様に描いた[1]のtorus knotは一般に n_1 個の曲線からなる。($(n_1, m_1)=1$ を仮定するとこの n_1 個の曲線は，実は左右端を同一化することによって，一本の曲線となって連なっている。図では $n_1=2$.) そこで図(a)のコピーを n_1 個作りつ横に連ねて，一本化する。



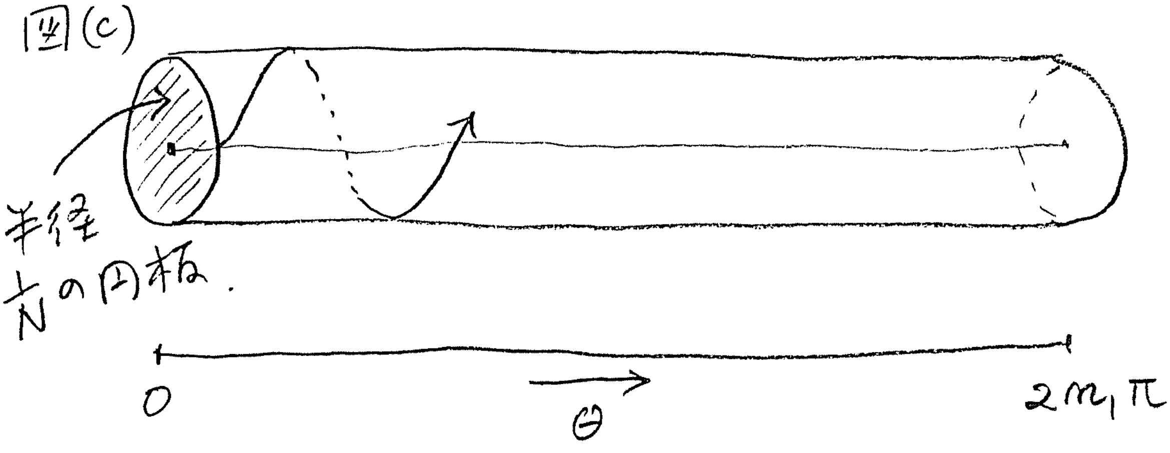
連いだあとは，そのうちの一本だけをみればよい(図(b)の太線だけをみる。)その一本の曲線は左端と右端が同一化されて一つの閉じた曲線となる。これはそれ自身[1]のknotの曲線であるが，空間Dへの埋め込み方(したがって自分自身との「からみ合い」)は失なわれている。たて方向が z_2 複素平面

であることに変りはない。

[3] 次に $z_2 = z_1^{\frac{n_1}{m_1}} + \frac{1}{N} z_1^{\frac{n_2}{m_1 m_2}}$ の $|z_1| = 1$ に対する曲線を描くために，[2]の曲線（図(b)の太線）から出発して考える。この曲線の各点を中心に，たての面（複素数 z_2 の面）の中に半径 $\frac{1}{N}$ の円板をとる。中心点が[2]の曲線上を左端から右端に動くとき，この円板は[2]の曲線の tubular neighborhood（チューブ形近傍）を作る。[3]の曲線はこのチューブの表面上の曲線となる。

見易くするために，上のように動きまわる半径 $\frac{1}{N}$ の円板を z_2 面の中で平行移動して，その中心が原点になるようにする。

図(c)



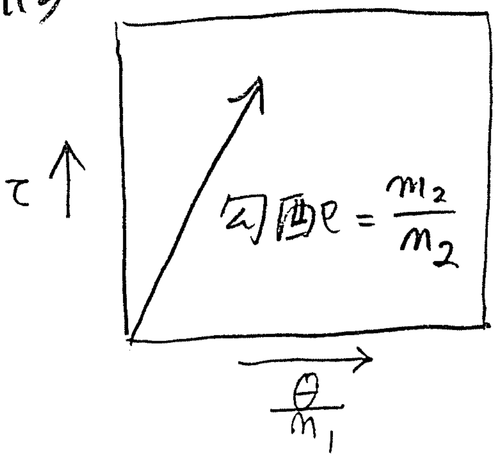
このようにして出来た円柱（両端が同一化されてドーナッツ形）の上の[3]の曲線を描くには

式(*)　$z_2 = \dfrac{1}{N} z_1^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} = \dfrac{1}{N}\left(z_1^{\frac{1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}$

の軌跡を考えればよい。これは再び Torus knot である。

しかし、ここで注意すべき点は、θ が 0 から出発して $2n_1\pi$ となったとき始めて元に帰ることである。これは重要な点で見落してはならない。

即ち図(C)に対して式(*)の Torus knot を考えるとき、正方形



を考えるべきである。$z_1 = e^{i\theta}$ に対して $z_1^{\frac{1}{n_1}} = e^{i\frac{\theta}{n_1}}$ となるので、

図(C)上の式(*)の torus knot は

上の正方形でみると勾配 $\frac{m_2}{n_2}$ の直線に対応する。

ここまでの議論の結論をまとめると、

$$z_2 = z_1^{\frac{m_1}{n_1}} + \frac{1}{N} z_1^{\frac{m_2}{n_1 n_2}}$$

の $|z_1| = 1$ に対して描かれる knot は $\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right)$ の iterated torus knot だということである。

[4] [3]の図(C)に描かれた[3]の torus knot は一般に n_2 個の線分からなる(左端から右端に達するまで)曲線を一本化するために図(C)の n_2 個のコピーを横に連ねて考える。

$$z_2 = z_1^{\frac{m_1}{n_1}} + \frac{1}{N} z_1^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \frac{1}{N^2} z_1^{\frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}}$$

に対する knot を得るために

$$z_2 = \frac{1}{N^2}\left(z_1^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{\frac{m_3}{n_3}}$$

に対応する knot (このとき θ は 0 から $2n_1n_2\pi$ まで動いて、[3]の曲線が完結する) 即ち分数 $\frac{m_3}{n_3}$ に対応する torus knot を得る。元にもどって考えると $\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}\right)$ 形の iterated torus knot を得る。以下同様。

[5] 以上の手続きを繰返して，次の結論を得る。

最初の式(1)に対する knot（$|z_1|=1$ として描かれる閉曲線）は

$$\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \cdots, \frac{m_g}{n_g}\right) \text{型の}$$

iterated torus knot である。但し，$(n_i, m_i)=1$, $1 \leq i \leq g$, と仮定するとき knot は一本の閉曲線である。

一般に代数（又は解析）(複素)曲線 $f(z_1, z_2)=0$ を $\mathbb{C}^2$ の中で考えるとき，その特異点の充分小さい近傍で考えた knot は，

$$\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \cdots, \frac{m_g}{n_g}\right) \text{型の iterated}$$

torus knot で次の条件を満す。

① $n_i > 1$, $(m_i, n_i) = 1$

② $\dfrac{m_1}{n_1} < \dfrac{m_2}{n_1 n_2} < \cdots < \dfrac{m_g}{n_1 n_2 \cdots n_g}$