昭和59年度(第8回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和59年7月24日～7月27日開催)

数学入門公開講座

昭和59年７月24日 (火) から８月２日 (木) まで

<table>
<tr><th>日
時間</th><th>7月
24日
(火)</th><th>25日
(水)</th><th>26日
(木)</th><th>27日
(金)</th><th>28日
(土)</th><th>29日
(日)</th><th>30日
(月)</th><th>31日
(火)</th><th>8月
1日
(水)</th><th>2日
(木)</th></tr>
<tr><td>13：15～15：00</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td>一松</td><td colspan="2" rowspan="3">休講</td><td>廣中</td><td>廣中</td><td>廣中</td><td>廣中</td></tr>
<tr><td>15：00～15：15</td><td colspan="4">休憩</td><td colspan="4">休憩</td></tr>
<tr><td>15：15～17：00</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>松浦</td><td>岩井</td><td>岩井</td><td>岩井</td><td>岩井</td></tr>
</table>

主催　京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. ゲームの理論をめぐって(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　一松　信

ゲームの理論には，いろいろの側面がある。ここでは主に2人の純戦術ゲームの具体例について，必勝戦術を解説し，合せてConway-Knuthの超現実数とゲームの関連を論ずる。

2. メビウスの問題をめぐって(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　松浦重武

凸n角形($n \geqq 3$)のn個の頂点のうちで，隣接する三頂点からなる三角形の面積をすべて知って，もとの凸n角形の面積を求める問題を考える。$n=3$ の場合，$n=4$ の場合は問題がやさし過ぎるが，$n=5$ の場合は，そう簡単にはゆかない。この $n=5$ の場合がメビウスの問題である [興味ある人は，解答を試みよ]。n が一般の場合($n \geqq 6$)には，どうなるか？　これらを含めて，種々の問題を取り扱う予定である。

3. 結び目と特異点(7時間)　京都大学数理解析研究所教授　廣中平祐

トポロジーの一分野として結び目はその理論の美しさと難しさで多くのトポロジストがいどんだ課題である。一方代数曲線論も同様の魅力があるが，特にその特異点と結び目の両理論の関係は深く面白い。

4. 多次元立方体を切る(7時間)　京都大学教養部助教授　岩井齊良

立方体を平面で切ると，切り口には，三角形から六角形までのいろんな形が現れる。それでは，四次元や五次元の立方体(?)を切ると，切り口の図形はどんなものになるか。

四次元立方体の切り口は三次元だから，実物をお目にかけることができる。五次元立方体の切り口は四次元であるが，これは三次元的展開図で示すことができる。

時間＼日	7月24日(火)	25日(水)	26日(木)	27日(金)	28日(土)	29日(日)	30日(月)	31日(火)	8月1日(水)	2日(木)
13：15～15：00	一松	一松	一松	一松	休講		廣中	廣中	廣中	廣中
15：00～15：15	休憩						休憩			
15：15～17：00	松浦	松浦	松浦	松浦			岩井	岩井	岩井	岩井

昭和59年度(第8回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和59年7月24日～7月27日開催)

2. メビウスの問題をめぐって (7時間)

京都大学数理解析研究所教授　松　浦　重　武

1984, JULY 24, 25, 26, 27　15:15-17:00

メビウスの問題をめぐって

松浦重武

「．．．をめぐって」という表題は、曖昧であろう。 誰が巡るのか？ 筆者である。 どのように巡るのか、その仕方は？ それは、以下に述べるように、目的もあまりはっきり定めない散歩のように考えている。 突然、あらぬ方向に曲って、予期しない場所に辿りつくかも知れない。 それも、散歩の楽しみの一つである。 コースを定めて、全力で走るのは、体力を鍛えるのにはよいかも知れないが、暑い夏には、楽しくはないかもしれない。 この散歩が、夏の講座として、涼をよぶか、暑さを酷くするかは、やって見ないと分らない。

主題は、幾何学的直観を、どのように計算にのせるかにある。

§1． 一つの試験問題をめぐって

数年前の入試に、次のような問題があった。 問題の文章は覚えていないが、内容は同じである。

問題 E_3． 稜の長さが1の立方体を考え、その一つの立体対角線をとって考える。 この対角線に垂直な平面で、この立方体を切ったときの切口の面積は、いつ最大になるか。 また、その最大値を求めよ。

この問題を解くには、立体対角線の中央、すなわちこの立方体の中心を通るような平面で切ったときが、面積が最大であろうと、まず見当をつけることが大切である［大部分の受験生の答案が、そうなっている］。

もちろん、見当をつけただけでは駄目で、それをきちんとした議論によって、採点者を納得させるような答案を書かないと、良い点は貰えないのである。

この問題の解答を、まじめに解説するつもりはないが、あとの計算を説明する意味もあって、記号を導入しておこう。

3次元ユークリッド空間を$\mathbb{R}^3$ と書く。 ［$\mathbb{R}$は実数全体を表わす記号で、数学者のあいだでは、国際的に通用している］。 空間を$\mathbb{R}^3$ で表わすのは、空間の点を直行座標で表わすとき、3個の座標が要るからである。 2次元の平面は$\mathbb{R}^2$ ，1次元の直線は$\mathbb{R}^1$ （または、たんに$\mathbb{R}$）で表わす。

さて、立方体の一点を原点　0＝（0，0，0）において、0に集まる3本の稜を座標軸に一致させれば

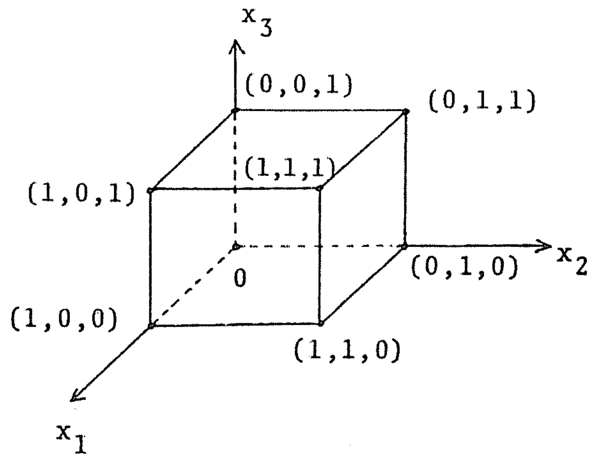


図1．1

立方体の各頂点の座標は、上図に示したようになる。

この立方体をV_3 と書けば（中味も詰っていると考えて）

$$V_3=\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ 0\leqq x_1\leqq 1,\ 0\leqq x_2\leqq 1,\ 0\leqq x_3\leqq 1\}$$

である。

立体対角線として、原点と（1，1，1）を結ぶものを考え、それをD_3とすれば

$$D_3 = \{(u,u,u)\ ;\ 0\leqq u\leqq 1\}$$

と書ける。

問題を簡単にするために、次元を下げて、ユークリッド平面$\mathbb{R}^2$ で、一辺の長さが1の正方形V_2 の場合を考えてみよう。

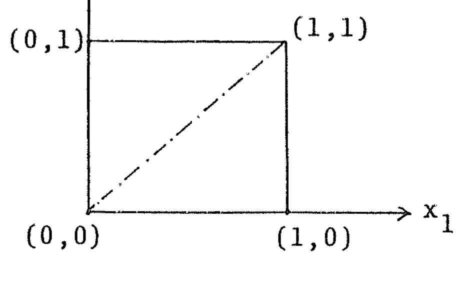


図1．2

対角線D_2は一点破線で示してある。

座標で書けば、

$$V_2 = \{(x_1, x_2);\ 0 \leqq x_1 \leqq 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\}$$

$$D_2 = \{(u, u)\ ;\ 0 \leqq u \leqq 1\}$$

である。　そこで

問題 E_2.　辺の長さが１の正方形を考え、その一つの対角線をとって考える。この対角線に垂直な直線で、この正方形を切ったとき、切口の線分の長さは、どんなとき最大になるか、その最大値を求めよ。

このように、次元を下げれば、中学生でも、出来る筈である。

もとの３次元にもどれば、この立方体についての問題の解答の仕方は、いろいろある。

問題を作成する人は、模範解答（と自分が信ずるもの）のほかにも、受験生が試みるであろう種々の解答を予想しておくのであるが、たいていの場合、受験生の解答のバラエティーのほうが、はるかに豊かである。　しかも、不完全な答案のほうが、ずっと多いから、それが、採点基準の作成に手間が掛ることの原因となる。

こんどは、逆に、次元を上げたら、どうなるか

問題 E_n.　　任意の自然数ｎに対して、ｎ次元空間$\mathbb{R}^n$ を考え、そこで、稜の長さが１のｎ次元［超］立方体を考える。　そのｎ次元的立体対角線を一つ考え、それに垂直な（ｎ－１）次元［超］平面で切ったとき、その（ｎ－１）次元面積は、いつ最大になるか。　その最大値を求めよ。

となる。　こうすると、問題は、少々高級に見える。　少なくとも、中学生には、問題の意味すら分からなくなる。

ｎ次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$ の点は、実数をｎ個ならべたもの

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

である。 x_j は、この点の第 j 座標とよばれる。 n 次元立方体としては

$$V_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \ ; \ 0 \leqq x_1 \leqq 1, \cdots, 0 \leqq x_n \leqq 1\}$$

を考え、その n 次元立体対角線としては

$$D_n = \{(u, \cdots, u) \ ; \ 0 \leqq u \leqq 1\}$$

を取る。 このとき、D_n に垂直な（n－1）次元平面の方程式は

$$(1.3) \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = t$$

であたえられる。 ここで、t はパラメーターで、いまの場合、不等式

$$0 \leqq t \leqq n$$

をみたす範囲で考えることになる。

n＝2（2次元平面の場合）、n＝3（3次元空間の場合）を考えれば、納得がゆくであろう。

n 次元立方体 V_n の中心の座標は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$$

だから、この点を通る（n－1）次元平面の方程式としては、(1.3) において

$$t = \frac{n}{2}$$

とすればよい。

さて、（n－1）次元平面 (1.3) による V_n の切口の（n－1）次元面積を $S_n(t)$ で表わすことにすると、計算によって、公式

$$(1.4) \qquad S_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2\{(n-1)!\}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (t-k)^{n-1} \operatorname{sgn}(t-k)$$

を得る。（証明は省略する）。　ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{［二項係数］}$$

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1 & (v > 0) \\ 0 & (v = 0) \\ -1 & (v < 0) \end{cases} \qquad \text{［符合関数］}$$

である。

ｎ＝２およびｎ＝３の場合に、具体的に計算してみることを、お薦めする。

関数$S_n(t)$のグラフを描くことは、その公式を用いて、コンピューターに掛ければ、簡単に出来る。　ｎ＝２，３，４，５，６について、それを、お目にかける。

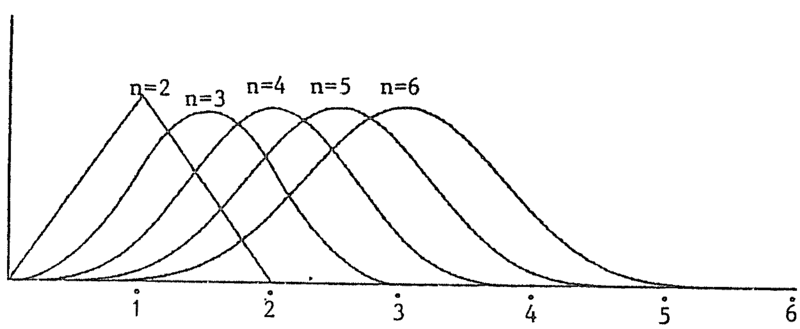


図１．５

これらの場合、$t = \frac{n}{2}$ において、最大値をとっていることは、グラフから想像できる。

ｎ＝３の場合は、区分的に(すなわち、$0 \leqq t \leqq 1$, $1 \leqq t \leqq 2$, $2 \leqq t \leqq 3$にわけてみると)２次関数になるので、入試問題に向いている。

ｎが、($n \geqq 4$ として) 一般の場合はどうするか？　このときは、$S_n(t)$は微分可能

であるが、この導関数を求めて、$S_n(t)$の増減を調べる気はしない(のではなかろうか？)

実は、$S_n(t)$ の式を見ると、等式

(1.6) $$S_n(t) = S_n(n-t)$$

が成立している。 (実際は、そのことが容易にわかるように表現式を工夫してある)。すなわち、(1.3) において、$t=\frac{n}{2}$ とした場合の(n-1)次元平面について、n次元立方体V_n は面対称な凸図形なのである。

上の事実、すなわち対称性と凸性だけを用いて、関数$S_n(t)$は$t=\frac{n}{2}$ において最大値をとることが証明できる（§12 参照）。

したがって、n＝3の場合にも、具体的計算なしで、問題は解けるのである。［ただし、$S_3(\frac{3}{2})$ の値は、計算する必要がある；このとき、切口は正6角形となる；読者は検証せよ］。

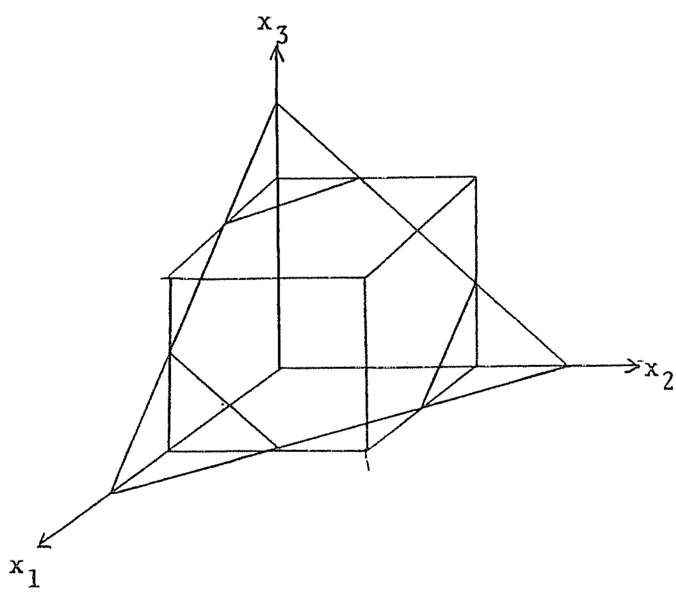


図1.7

§2. メビウスの問題

前節の$S_n(t)$の公式と、それが$t=\frac{n}{2}$で最大値をとることの（計算なしの）幾何学的証明を友人のＳ氏と話していたとき、表題に掲げたメビウスの問題と出会ったのである。 前節の問題は、高次元でないとむずかしくないし、幾何学的方法の有難味も、余り感じられないであろう。 ところで、メビウスの問題は、平面上の直線図形、たんなる５角形に関する問題なのに、なかなか難しいのである。

メビウス（Möbius ；詳しくかくと、Augustus Ferdinand Möbius［１７９０－１８６８］）は、整数論、幾何学などの分野で、重要な貢献をした人である。

特に、表裏のない面としての「メビウスの帯」が有名である。 下図のよううな帯を考え

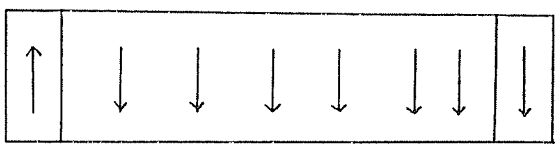


図２．１

この帯の両端の矢印を、向きを同じにして貼り合せると出来上がる。

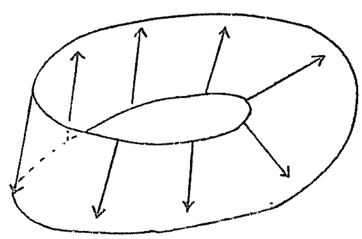


図２．２

さて、ここで取りあげるメビウスの問題を述べよう。

平面上に一つの凸５角形を考えよう。 ５角形だから、５個の頂点がある。 そのうちの３個の頂点を考える。 ただし、ばらばらの３個ではなく、つづいて並んでいる３頂点を考えるのである。 （そのような３頂点は、そのまんなかの頂点をきめれば、あとは、それを挟んでいる２頂点から成っている）。

そのような３頂点できまる３角形の面積をすべて知ったとして、もとの５角形の面積を求めよ。

これが<u>メビウスの問題</u>である。

考えをはっきりさせるため、５角形の頂点を次図のようにP_j （$j=1，2，3，4，5$）とする。

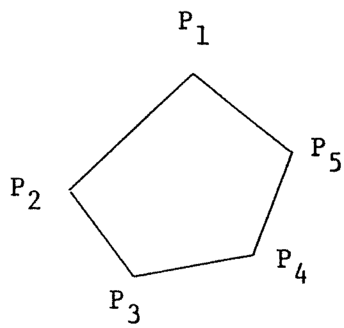


図２．３

そうして$\Delta P_{j-1}P_jP_{j+1}$ の面積をa_jとしよう （$1\leqq j\leqq 5$）。

このような記号をもちいるときには、任意の整数ｊに対してP_j を考え

（２．４） $P_j = P_k$ （ただし、$j-k$は５の倍数）

と規約しておくのが便利である。 すなわち

$$P_0 = P_5 \quad P_{-1} = P_4 \quad P_6 = P_1$$

など。

さて、 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を用いて、5角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積は、どのようにして表わされるか?

§３．　メビウスの問題の意味

メビウスの問題も、任意の自然数nについて、凸n角形の問題として考えられる。（凸図形であるという制限を省くと、面積に対して、負の値も許さなければならないことになり、事情が複雑になる）。

さて、平面上に一つの凸n角形を考え、その頂点を$P_1, P_2, \ldots, P_n$ とする。

前節と同様に $P_{n+1} = P_1$, $P_n = P_0$ とする（一般には、j－kがnの倍数のとき$P_j = P_k$として、すべての整数jについて、P_j を考えるとよい）。

三点$P_{j-1}P_jP_{j+1}$ できまる三角形の面積を a_j とする　（j＝1，2，...，n）。

このとき、次の問題を考えよう

問題 M_n．　凸n角形$P_1P_2\ldots P_n$の面積を、$a_1, a_2, \ldots, a_n$を用いて表わせ。

こうすれば、前節のメビウスの問題は、n＝５の場合である。

凸n角形の面積をTとし、それが $a_1, \ldots, a_n$ の関数として表わされるとして、それを

$$T = F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

とする。F_n はn変数の関数である。　このF_n を具体的に決定せよというのが、問題 M_nである。

ここでは、この意味を、$\mathbb{R}^n$ の第一象限

$$\{(t_1, t_2, \ldots, t_n);\ t_1 \geqq 0, \ldots, t_n \geqq 0\}$$

で定義された一つの連続関数としてあたえることと解釈する。　この解釈の良し悪しについては、後に触れるが、ここでは、F_n をそのようなものとして求めることとしておこう（§10 参照）。

事情をはっきりさせるために、nの小さい場合を見てみよう。

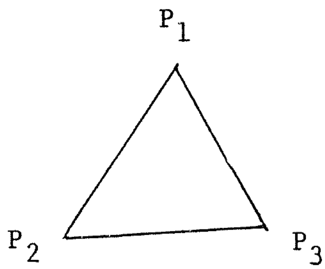


図３．１

３角形 $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ （$j=1,2,3$）はすべて同じものだから

$$a_1 = a_2 = a_3 = T$$

である。したがって、関数 F_3 としては、なるべく対称なものをえらぶとすれば

$$F_3(a_1,a_2,a_3) = \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$$

であろう。しかし、対称性を尊重しないのなら、 $F_3(a_1,a_2,a_3) = a_1$ でもよいし、 $F_2(a_1,a_2,a_3) = \dfrac{a_1+a_2}{2}$ でもよい。

$n=4$ として、凸４角形 $P_1P_2P_3P_4$ を考えよう。

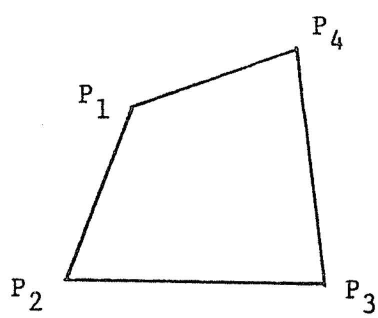


図３．２

３角形 $P_{j-1}P_jP_{j+1}$の面積を a_j （$j=1,2,3,4$）とすれば、この４角形の面積Ｔは

$$T = a_1+a_3 = a_2+a_4$$

となることは、明らかだから、関数　$F_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$　としては、

$$a_1+a_3,\ a_2+a_4,\ \frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

のうち、どれをえらんでもよい（なお、§９ 参照）。

ｎ＝５とすると、メビウスの問題となる。この場合は、ｎ＝３，ｎ＝４のときのようには、簡単ではない。したがって、関数　$F_n(a_1, \ldots, a_n)$　を求める問題は、ｎ＝５になって、はじめて自明ではない問題となる。

§4. F_n と F_{n+1} の関係

凸 (n+1) 角形を考え、その頂点を $P_1, P_2, \cdots, P_n, P_{n+1}$ としよう。3角形 $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ の面積を、こんどは、b_j とする $(j=1,2,\cdots,n+1)$。

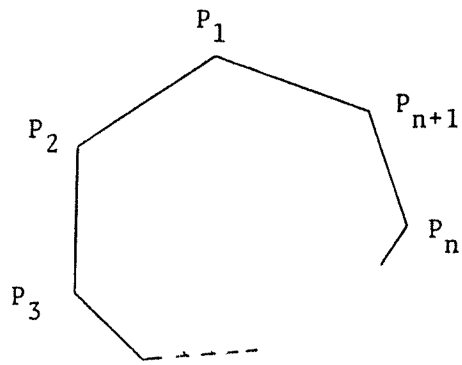


図4.1

この凸多角形の面積は $F_{n+1}(b_1, b_2, \cdots, b_{n+1})$ である。この図形において、頂点 $P_1, \cdots, P_n$ は固定しておいて、P_{n+1} だけを動かすことを考える。

P_{n+1} を移動させて、P_n に近づけたらどうなるが。その極限においては、P_{n+1} を P_n に一致させると、凸n角計形が得られるが、そのとき、小3角形 $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ の面積がどうなるかを考察してみよう。

容易に分かることは、$b_2, \cdots, b_{n-1}$ は、なんの影響も受けないことである。

変化するのは、b_1, b_n, b_{n+1} の3個だけである。そこだけを取りだして、図を描けば

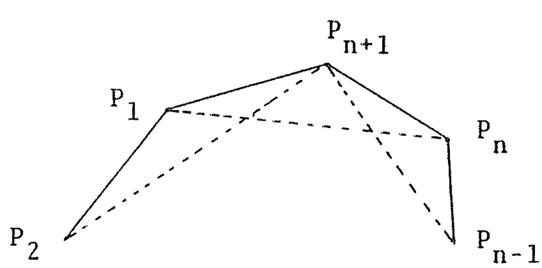


図4.2

であるから、 P_{n+1} が P_n に近づけば、 b_{n+1} は0に近づき、b_n も0に近づく。ところで、b_1 は3角 $P_nP_1P_2$ の面積に近づく。

ところで、関数 $F_{n+1}(b_1,\cdots,b_n,b_{n+1})$ は$\mathbb{R}^{n+1}$ の第1象限で連続関数であると仮定したから、凸n角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積は、3角形 $P_nP_1P_2$ の面積を a_1 とするとき

$$F_{n+1}(a_1,b_2,\cdots,b_{n-1},0,0)$$

であたられることになる。 これは、等式

$$(4.3)\qquad F_n(a_1,a_2,\cdots,a_n) = F_{n+1}(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},0,0)$$

が成立することを示す。

上の等式から直ちにわかることとして、

① F_{n+1} が求まれば、 F_n も求まる。

② 凸n角形の面積を表わすのに、

$a_1,\cdots,a_{n-1}$ までを知れば十分であって、 a_n は不必要である。

上の式 (4.3) において、 $n=3$ とし、 F_3 と F_4 を入れてみると、たしかに成立していることがわかる。

(4.3) の用途は、他にもある。 $F_5(a_1,\cdots,a_5)$ を求めたとき、$F_5(a_1,\ a_2,\ a_3,\ 0,\ 0)$ が $F_4(a_1,\cdots,a_4)$ と一致しなかったら、その F_5 を求めた計算が間違っていたことになるから、求めた公式の検証に利用出来る。

また、 $F_5(a_1,\cdots,a_5)$ が求まったとして、それが、 $a_1,\cdots,a_4$ までを用いて表わすことが、非常に難しかったときには、 F_6 の存在が怪しくなり、その存在を疑う根拠となる。

F_6 が簡単に求まるならば、(4.3)から、F_5 は直ちに求まる。

§５． メビウスの問題の解 ［F_5 を求めること］。

凸５角形を考え、その頂点を $P_1, \cdots, P_5$ とする。 この５角形の面積をＴ，３角形 $P_{j-1}P_j\,P_{j+1}$ の面積を a_j とする $(1 \leqq j \leqq 5)$

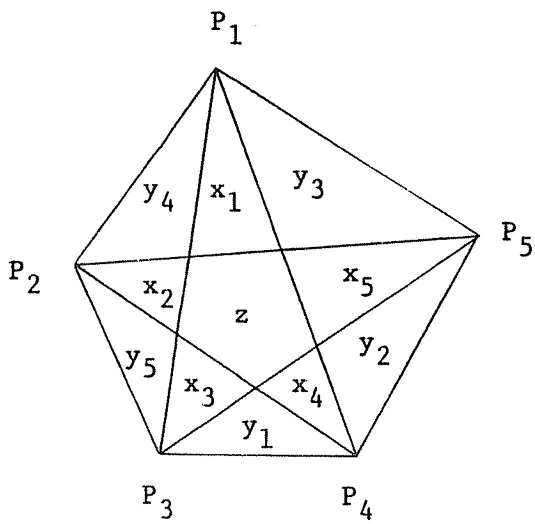


図 ５．１

各頂点を結ぶと、問題の５角形の面積は、上図のように、１１個の部分に分れる。それぞれの部分の面積を、上図のように

$$(5.2) \qquad \begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \\ z \end{cases}$$

で表わそう。 全面積Ｔは、これらをすべて加えたものである。

各部分の面積の記号のつけ方は

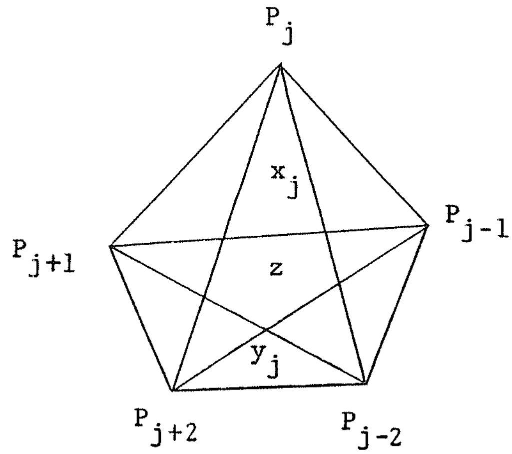


図 5.3

上図のようになっている。

一つの注意を述べておこう。 問題は、全面積 T を求めることだから、 $x_1, \cdots, x_5$; $y_1, \cdots, y_5$; z の１１個の数値をすべて求める必要ないが、強調しておきたいのは、実際は、 $a_1, \cdots, a_5$ を知れば、これらの１１個の面積がすべて確定することである［その証明は、ここでは述べないが、この節のおわりには、明らかになる］。

３角形 $P_{j-1}P_jP_{j+1}$ の面積が a_j に等しいという式は、上の図から

(5.4) $$x_j + y_{j-2} + y_{j+2} = a_j \qquad (1 \leq j \leq 5)$$

となる。 丁寧に書けば

(5.5) $$\begin{cases} x_1 + y_3 + y_4 = a_1 \\ x_2 + y_4 + y_5 = a_2 \\ x_3 + y_5 + y_1 = a_3 \\ x_4 + y_1 + y_2 = a_4 \\ x_5 + y_2 + y_3 = a_5 \end{cases}$$

である。

上の連立方程式だけから、問題を解こうとすると、方程式の数は５個しかなく、未知数は $x_1, \cdots, x_5;\ y_1, \cdots, y_5$ だけでも１０個あるから、上の関係式だけでは、未知数を決定することは出来ない。 とくに、z は方程式のなかに現われて来ないから、決定の方法がない。

したがって、５角形を１１個の直線図形に分割した図を眺めて、さらに少くとも6個の新しい方程式を見つけねばならない。

これが、メビウスの問題を解く鍵である。

さて、図 5.3 に対する、次の二通りの幾何学的考察によって、それぞれ５個ずつ、合計１０個の新しい方程式を導く。 （5.4)の５個の方程式と合せて、１５個の方程式を得ることになるが、未知数は（5.2）に掲げた１１個だけだから、そのうちの４個は不要の筈である。 すなわち、それらの４個は、他の方程式から導かれるものと考えてよい。

① 図 5.3 において、４個の頂点 P_{j+1}, P_{j+2}, P_{j-2}, P_{j-1} によってきまる４角形を、$\square\, P_{j+1}\, P_{j+2}\, P_{j-2}\, P_{j-1}$ と書くことにする。その面積も、同じ記号で代用することにする。［他の場合も、同様の記法を用いる]。簡単のため

$$(5.6) \qquad w_j = \square\, P_{j+1}\, P_{j-1}\, P_{j-2}\, P_{j-1}$$

とおく。 図 5.3 から

$$(5.7) \qquad w_j = T - a_j \qquad (1 \leqq j \leqq 5)$$

である。 ただし、T は５角形の面積

$$(5.8) \qquad T = \pentagon\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4\, P_5$$

とする。

さて、第一の考察は、$\square\, P_{j+1}\, P_{j+2}\, P_{j-2}\, P_{j-1}$ の面積と $\triangle\, P_{j+1}\, P_{j+2}\, P_{j-2}$ の面積の比である。 線分 $\overline{P_j P_{j-2}}$ と線分 $\overline{P_{j-1}\, P_{j+2}}$ の交

点を Q として、必要な部分だけ描こう。

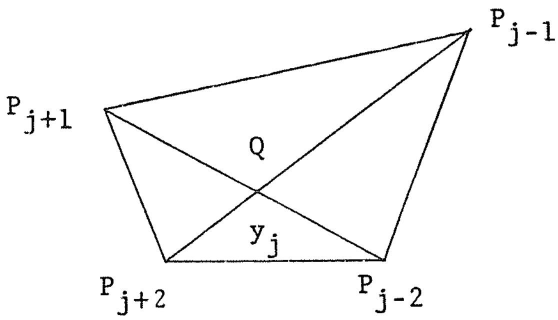


図 5.9

$\Delta P_{j+1}P_{j+2}P_{j-2}$ と $\Delta P_{j+1}P_{j-2}P_{j-1}$ を比較すると、それらの面積は、一つの辺 $\overline{P_{j+1}P_{j-2}}$ が共通だから、この辺を底辺と考えれば、その面積の比は高さの比に等しく、それは、二つの線分 $\overline{QP_{j+2}}$ と $\overline{QP_{j-1}}$ の長さの比に等しい。 線分の記号を、その長さを表す記号にも流用することにすれば

(5.10) $$\Delta P_{j+1}P_{j+2}P_{j-1} : \Delta P_{j+1}P_{j-2}P_{j-1} = \overline{P_{j+2}Q} : \overline{QP_{j-1}}$$

である。 ところで

$$\square P_{j+1}P_{j+2}P_{j-2}P_{j-1} = \Delta P_{j+1}P_{j+2}P_{j-2} + \Delta P_{j+1}P_{j-2}P_{j-1}$$

だから、

(5.11) $$\square P_{j+1}P_{j+2}P_{j-2}P_{j-1} : \Delta P_{j+1}P_{j+2}P_{j-2} = \overline{P_{j+2}P_{j-1}} : \overline{P_{j+1}Q}$$

を得る。

同じことは、$\Delta QP_{j-2}P_{j+2}$ と $\Delta P_{j-1}P_{j+2}P_{j-2}$ についてもいえるから

(5.12) $$\Delta P_{j-1}P_{j+2}P_{j-2} : \Delta QP_{j-2}P_{j+2} = \overline{P_{j+2}P_{j-1}} : \overline{P_{j+2}Q}$$

である。（５．１１）と（５．１２）の右辺は同じだから、いままでの面積を表わす記号を用いて

$$w_j : a_{j+2} = a_{j-2} : y_j$$

を得る（$1 \leqq j \leqq 5$）。すなわち

$$y_j\ w_j = a_{j+2}\ a_{j-2}$$

であり、これから（５．７）を用いて

$$(5.13) \qquad y_j = \frac{a_{j+2} a_{j-2}}{T - a_j} \qquad (1 \leqq j \leqq 2)$$

を得る。これが、新しく得られた５個の方程式である。［未知数は、（５．２）の１１個のうち、z を T で置き換えて考えてもよいからである］。

②　方程式（５．４）と（５．１３）によって １０個の方程式が得られたが、まだ、未知数の個数 １１ には足りないので、次の考察をする。

そのため、図 ５．３ において、$\overline{P_j\ P_{j+1}}$ と $\overline{P_{j+1}\ P_{j-1}}$ の交点を P，$\overline{P_j\ P_{j-2}}$ と $\overline{P_{j+1}\ P_{j-1}}$ の交点を Q として、必要な部分だけを描く

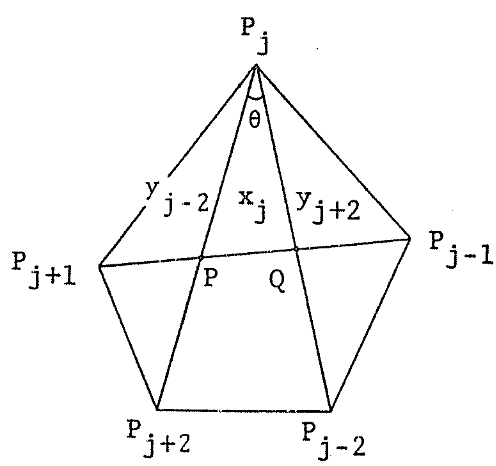


図 ５．１４

上の図で、θと書いたのは、角度 $\angle P_{j+2}\ P_j\ P_{j-2}$ の大きさである。

ここで、$\Delta\ P_{j+2}\ P_j\ P_{j+2}$ と $\Delta\ PP_jQ$ の面積の大きさを比較する。よく知られた公式から

$$(5.15)\qquad \begin{cases} \Delta P_{j+2}\ P_j\ P_{j-2} = \dfrac{1}{2}\ \overline{P_j\ P_{j+2}} \cdot \overline{P_j\ P_{j-2}}\ \sin\theta \\ \Delta P\ P_j\ Q = \dfrac{1}{2}\ \overline{P_j\ P} \cdot \overline{P_j\ Q}\ \sin\theta \end{cases}$$

を得るが、これから

$$(5.16)\qquad \Delta\ P\ P_j\ Q\ :\ \Delta\ P_{j+2} P_j\ P_{j-2} = \overline{P_j\ P} \cdot \overline{P_j\ Q} : \overline{P_j\ P_{j+2}} \cdot \overline{P_j\ P_{j-2}}$$

を得る。ここで

$$\begin{cases} \Delta\ P\ P_j\ Q = x_j, \quad \Delta\ P_{j+2}\ P_j\ P_{j-2} = T - (a_{j+1} + a_{j-1}) \\ \overline{P_j\ P}\ /\ \overline{P_j\ P_{j+2}} = y_{j-2}\ /\ a_{j+1} \\ \overline{P_j\ Q}\ /\ \overline{P_j\ P_{j-2}} = y_{j+2}\ /\ a_{j-1} \end{cases}$$

を考慮に入れれば、(５．１６) から

$$\frac{x_j}{T - (a_{j+1} + a_{j-1})} = \frac{y_{j+2}\ y_{j-2}}{a_{j+1}\ a_{j-1}}$$

すなわち

$$(5.17)\qquad a_{j+1}\ a_{j-1}\ x_j = y_{j+2}\ y_{j+1}\ \{T - (a_{j+1} + a_{j-1})\}$$

を得る　($1 \leqq j \leqq 5$)。

これが新しく得られる５個の方程式である。

これで、準備は整った。（５．４），（５．１３），（５．１７）で得られる　１５個の方程式から、T を求めることが出来る。

a_j ($1 \leqq j \leqq 5$)　は既知だから、（５．１３）は y_j を T で表示した式である。（５．４）から

$$(5.18) \qquad x_j = a_j - y_{j+2} - y_{j-2} \qquad (1 \leqq j \leqq 5)$$

を得るから、これに（５．１３）を代入すれば、x_j は T で表わすことが出来る。それらを（５．１７）に代入すれば、T についての方程式を得て、それを解くことによって、T が得られる筈である。

それを実行すると

$$(5.19) \qquad \begin{cases} a_{j+1}\, a_{j-1} \left(a_j - \dfrac{a_{j+4}a_j}{T-a_{j+2}} - \dfrac{a_j a_{j-4}}{T-a_{j-2}}\right) \\ \qquad = (T - a_{j+1} - a_{j-1}) \dfrac{a_j a_{j+4}}{(T-a_{j+2})} \cdot \dfrac{a_{j-4}a_j}{(T-a_{j-2})} \end{cases}$$

を得る　($1 \leqq j \leqq 5$)。

$$a_{j+4} = a_{j-1}, \quad a_{j-4} = a_{j+1}$$

に注意して、両辺を　$a_j\ a_{j+1}\ a_{j-1}$　でわり、分母を払うと

$$(5.20) \qquad \begin{cases} (T-a_{j+2})(T-a_{j-2}) - a_{j+1}(T-a_{j+2}) - a_{j-1}(T-a_{j-2}) \\ \qquad = a_j(T-a_{j+1}-a_{j-1}) \end{cases}$$

を得る　（$1 \leqq j \leqq 5$）。

これは、T についての２次方程式である。　それが、合計５個得られたように見えるが、整理して見ると、すべて同一の方程式であることがわかる［読者は検証せよ］。

これは（５．１７）式のうち、４個が不要であること、すなわち、（５．１７）のうちの１個と、（５．４）および（５．１３）の１０個の計１１個の式から、（５．１７）の残りの４個の式が出ることを示している。

（５．２０）を整理した結果を書くと

（５．２１）
$$\begin{cases} A = \sum_{j=1}^{5} a_j \\ B = \sum_{j=1}^{5} a_j \ a_{j+1} \qquad (a_6 = a_1) \end{cases}$$

とするとき

（５．２２）
$$T^2 - AT + B = 0$$

となる。

これから

$$T = \frac{1}{2}\{ A \pm \sqrt{A^2-4B} \}$$

を得る。

判別式　$A^2 - 4B$　が R^5 の第１象限における関数として、$\geqq 0$ であることは容易にわかる（§１３ 参照）。

問題は、平方根号の前の符号であるが、この場合には、＋の方を採用しなければならない。

これを見るには、不等式

$$(5.22) \qquad T > \frac{1}{2} A$$

を示せば十分である。

そこで

$$(5.23) \qquad \begin{cases} X = \sum_{j=1}^{5} x_j \\ Y = \sum_{j=1}^{5} y_j \end{cases}$$

とおけば、図 5.1 から

$$(5.24) \qquad T = X + Y + z$$

である。 ところで、(5.5) 式をすべて加えると

$$X + 2Y = A$$

だから

$$(5.25) \qquad \frac{A}{2} = \frac{X}{2} + Y$$

を得るが、 (5.24) と (5.25) の右辺を比較すると、X，Y，z はすべて正の数だから、不等式 (5.22) の成立することがわかる。

これで、メビウスの問題は解けた。

$$A = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$B = a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+a_5a_1$$

とするとき、5角形の面積 T は

$$(5.26)\qquad T = \frac{1}{2}\{A + \sqrt{A^2-4B}\}$$

であたえられる。

(5.26) の右辺が $F_5(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ である。

ところで、前節の注意に従って、 $F_5(a_1, a_2, a_3, 0, 0)$ が F_4 をあたえるかどうかを検証してみよう。

$F_5(a_1, a_2, a_3, 0, 0)$ の計算

$a_4 = a_5 = 0$ とすると

$$A = a_1+a_2+a_3$$

$$B = a_1a_2+a_2a_3$$

$$\begin{aligned} A^2 - 4B &= a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3 \\ &\quad -4a_1a_2-4a_2a_3 \\ &= a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_1a_2-2a_2a_3+2a_1a_3 \\ &= (a_1-a_2+a_3)^2 \end{aligned}$$

$$F_5(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2}\{a_1+a_2+a_3+|a_1-a_2+a_3|\}$$

$a_1+a_3 > a_2$ だから (何故なら、n=4 のとき $a_1+a_3 = a_2+a_4$)

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_1-a_2+a_3)$$

$$= a_1+a_3$$

これは F_4 に等しい。

最後に、 a_j $(1 \leqq j \leqq 5)$ があたえられたとき、１１個の数 x_j $(1 \leqq j \leqq 5)$, y_j $(1 \leqq j \leqq 5)$, z がすべて決まることに注意しておこう。

まず、T が（５．２６）であたえられるから、（５．１３）により y_j $(1 \leqq j \leqq 5)$ が定まる。 したがって（５．１８）により x_j $(1 \leqq j \leqq 5)$ が定まる。 最後に $z = T - \sum_{j=1}^{5} x_j - \sum_{j=1}^{5} y_j$ として、z が定まるのである。

§６．　前節で得られた結果の幾何学的意味への注意

もう一度、図５．１と方程式（５．５）を掲げよう。

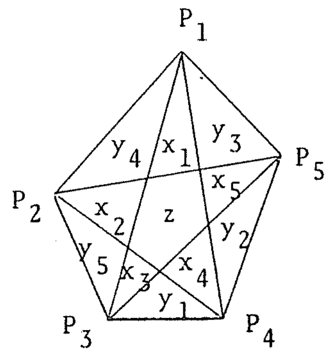


図６．１

$$(6.2)\qquad \begin{cases} x_1 + y_3 + y_4 = a_1 \\ x_2 + y_4 + y_5 = a_2 \\ x_3 + y_5 + y_1 = a_3 \\ x_4 + y_1 + y_2 = a_4 \\ x_5 + y_2 + y_3 = a_5 \end{cases}$$

前節の結果は、図６．１の幾何学的状況を眺めて、（６．２）から図６．１に現われる１１個の面積

$$(6.3)\qquad \begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \\ z \end{cases}$$

が、すべて　a_1, a_2, a_3, a_4, a_5　によって、決定出来るというのであった。

ここで述べておきたい注意は、面積はすべて定まるが、図形の形は決まらないということである。

すなわち、同一の a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 をもつ５角形でも、一般には合同ではないということである。［これは、当然のことであるが］。

そこで、線形変換を用いて、これを説明しておこう。

平面に一つの直交座標系を考える。文字 x, y はもう使ってしまったので、仕方がないから、ギリシャ文字を採用することにする。

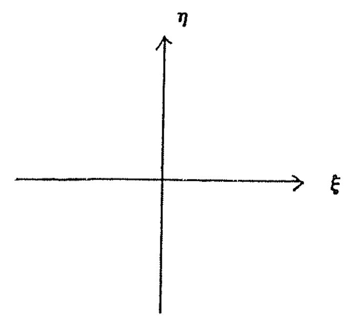


図６.４

この座標平面で、原点を動かさない一つの線形変換を考えよう。
線形変換は、一つの２×２行列

$$(6.5) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

であたえられることは、よく知られている。これによって平面上の点（ξ, η）が、点（ξ', η'）にうつるとすれば、（ξ', η'）は変換式

$$(6.6)\qquad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

であたえられる。

　右辺は、行列の掛け算で、詳しく書けば

$$(6.7)\qquad \begin{cases} \xi' = \alpha\xi + \beta\eta \\ \eta' = \gamma\xi + \delta\eta \end{cases}$$

である。

　これによって、平面上の図形は、別の図形にうつるが、線形変換だから、直線図形はまた直線図形にうつる。

　　もちろん、図形の形は変るが、もとの図形と変換したあとの図形の面積比は、変換の行列（６．５）の行列式とよばれるもの

$$(6.8)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

の絶対値に等しい［左辺は、右辺で定義する］。

　そこで、図形の形は大きく変えるが、（６．８）の行列式が１に等しいものを考えればよい。

　もっとも簡単なものとして、α を大きな正数として、行列

$$(6.9)\qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

を考えて見よう。 これを詳しく書けば

(6.10) $$\begin{cases} \xi' = \alpha\xi \\ \eta' = \dfrac{1}{\alpha}\eta \end{cases}$$

である。すなわち、これは、図形をξ軸方向にα倍に拡大する代りに、η軸方向には、$\frac{1}{\alpha}$に縮小する変換である。
$\alpha = 2$ とすれば、

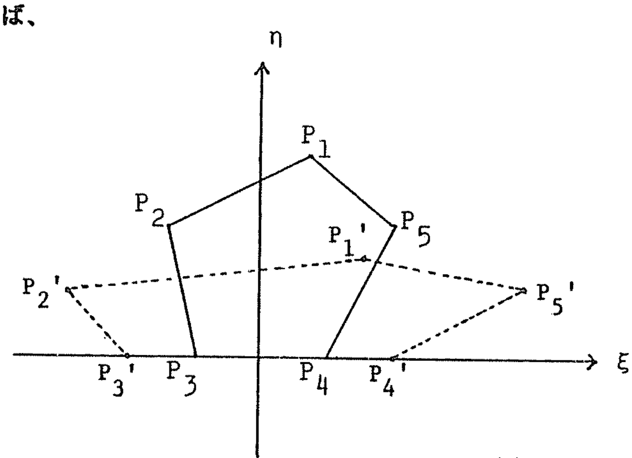


図6.11

平面上の５角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ は、ひらたく押しつぶされたような５角形 $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$ に変換される。

しかし、行列（6.9）の行列式は１に等しいから、対応する部分の面積は不変である。したがって、対応する部分の面積がすべて同一であっても、合同とは限らない。

メビウスの問題は、面積比だけに関する問題だっだのである。

§ 7 F_n ($n \geqq 6$) の不存在について

第３節でみたように、凸n 角形の面積Tをあたえる関数 F_n

(7.1) $$T = F_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

を求める問題（§３、問題M_n）の解は、 n=3 および n=4 については、余りにも易しすぎた。 n=5 は、自明でない最初の問題であり、それがメビウスの問題であった。

それが第５節で解けたからには、n=6 の場合に進みたくなる。 筆者も、いろいろと計算を試みたが、うまく行かなかった。 そこで、奇数角形の方が取り扱いやすい感触をもったので、n=7 の場合を計算して、第４節の結果から

(7.2) $$F_6(a_1, \ldots, a_6) = F_7(a_1, \ldots, a_5, 0, 0)$$

として求める方法も考えた。 それらの計算は、相当に成功的に見えたが、すべて失敗した。

実は、関数 F_n は、$n \geqq 6$ ならば、存在しないのである。

したがって、n=5 は、F_n が存在する最大のnであったことになる。

それを証明するには、F_6 の不存在を示せば十分である。 このことから、F_7 の不存在が出るからである。 実際、もし F_7 が存在すれば、（7.1）によって、F_6 の存在が出る。 一般に、第４節の結果を見れば、 F_{n+1} が存在すれば

(7.3) $$F_n(a_1, \ldots, a_n) = F_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0, 0)$$

によってF_n が得られるから、F_n が存在しなければ F_{n+1} も存在し得ない。 したがって、 n についての帰納法により、F_6 の不存在が言えれば、 F_n ($n \geqq 6$) の不存在がわかるのである。

さて、F_6 の不存在をいうには、$a_1, \ldots, a_6$ が同じであって、面積の異なる二つの凸６角形の存在することを言えばよい。

いま、a を一つのあたえられた正の数として、すべての a_j $(1 \leqq j \leqq 6)$ が a に等しいような凸６角形で、面積 Tはいくらでも大きくできることを示す。

まず、一辺の長さが ℓ の正３角形の三つの角のところを、下図の様に、長さ ε づつ切り落として出来る凸６角形を考えよう。

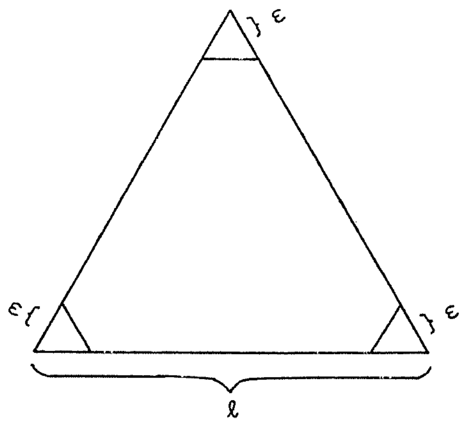


図７.４

一辺の長さが１の正３角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ だから、１辺 ℓ のときは $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^2$ となり、３つの隅を切り落としたから、上の凸６角形の面積T は

$$(7.5) \qquad T = \frac{\sqrt{3}}{8}(\ell^2 - 3\varepsilon^2)$$

であたえられる。

つぎに、図７.６の６角形の a_j $(1 \leqq j \leqq 6)$ はすべて等しいことは、対称性により明らかだから、その共通の値をa とすれば、これは高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon$ で底辺が $(\ell-2\varepsilon)$ だから

$$(7.6) \qquad a = \frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon(\ell - 2\varepsilon)$$

を得る。

a を一定に保つには、ε を小さい正の数として、（７.６）から ℓ を定めればよい。すなわち

(7.7) $\ell = \dfrac{4}{\sqrt{3}} a \dfrac{1}{\varepsilon} + 2\varepsilon$

これを（7.5）に代入すれば、簡単な計算により

(7.8) $T = 3a + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)^2$

を得る［読者は検証せよ］。

この第１項は、一定であるが、第２項は ε に関係する正の数で、とくに $\varepsilon \to 0$ とするとき

(7.9) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} T = \infty$

である。

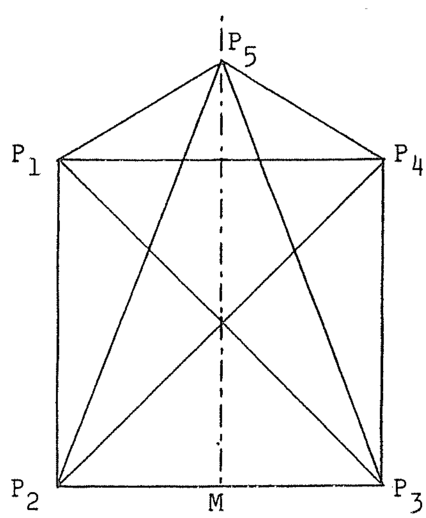
これで、F_6 の不存在がわかったが、このことは、既に、５角形の考察でも、知ることが出来る筈であった。　そのことを、次に注意しておこう。　これは、F_6 の不存在の<u>別証</u>となる。

もし、F_6 が存在したと仮定すると、（7.3）から

(7.10) $F_5(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = F_6(a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0)$

を得るから、凸５角形において a_1, a_2, a_3, a_4 を定めるならば、a_5 の値に無関係に、その面積 Tが定まる筈である。

ところで、次図のような５角形を考える。



<u>図7.11</u>

P_1, P_2, P_3, P_4 は一辺１の正方形の頂点として固定して考える。 M は P_2, P_3 の中点とし、一点破線 -・-・- で示したのは、線分 P_2P_3 の垂直二等分線とする。P_5 は動点と考え、この垂直二等分線上を、上方に向かって、移動してゆくとする。
このとき

$$(7.12) \qquad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

となることは明らかであるが、a_5 は P_5 が上昇すれば増大し、５角形の面積 T もいくらでも大きく出来る。 これは（７．１０）に反する。 これは、F_6 の存在を仮定したことからくる矛盾である。 従って、F_6 は存在しない。

この別証は、はじめの直接証明に比べると、間接的で、なんとなく頼りないと感じられる読者もあるだろう。 筆者もそう感じる。

その理由は、この別証が、F_n が $\mathbb{R}^n$ の第一象限<u>全体</u>で定義された連続関数であるとする仮定（定義）にもとづいているからである。 F_n （$n \geqq 7$） の不存在の証明についても同様である。

後に、仮定をもっと弱めた関数 $\tilde{F}_n$ を導入するが、そのときには、もっと直接的な証明を述べる。（§１０参照）

§８．　$n \geq 6$ の場合の条件の変更と、一般化

§９．　問題 M_5 からみた問題 M_4 の意味、幾何と方程式

§１０．関数 $\tilde{F}_n$; $\check{F}_n$ $(n \geq 6)$ の不存在

§１１．$\tilde{F}_7$ の不存在の応用

§１２．問題 E_n の解法

§１３．一つの不等式

参考文献

寺阪英孝 静間良次 著　数学の歴史Ⅷb 19世紀の数学　幾何学Ⅱ，p.143
（共立出版［1982］）

§８．　一般の場合 $(n \geq 6)$ に面積をうるための条件の変更、面積公式の存在定理

$F_n (n \geq 6)$ の不存在がわかったが、それでは凸ｎ角形の面積を表示するには、どうすればよいだろうか。

たとえば、$n=6$ としてみるとき

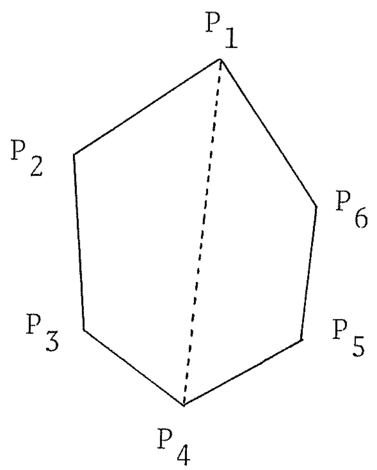


図８．１

上図のように考えれば、二つの４角形の和と考えられるから

$$\Box P_{j-1} P_j P_{j+1} P_{j+2}$$

の面積を b_j とすれば（記号としては、b_j よりも $b_{j,j+1}$ の方が合理的かも知れない；しかし b_j の方が簡単で書きやすい；そこで

$$(8.2) \qquad b_j = b_{j,j+1} = \Box P_{j-1} P_j P_{j+1} P_{j+2}$$

として、b_j も $b_{j,j+1}$ も両方とも採用して適当に混用することにする）、６角形の総面積Ｔは

$$(8.3) \qquad T = b_2 + b_5$$

として表わされる。

５角形のときも、

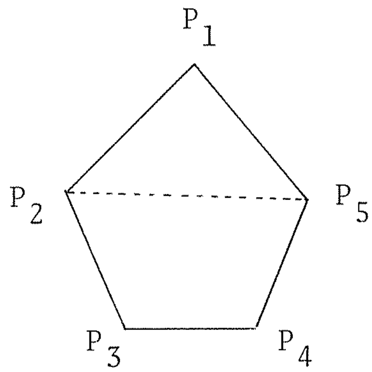


図８．４

$$(8.5)\qquad \begin{cases} a_j = \triangle P_{j-1}\, P_j\, P_{j+1} & (1 \leq j \leq 5) \\ b_j = b_{j,j+1} = \square P_{j-1}\, P_j\, P_{j+1}\, P_{j+1} & (1 \leq j \leq 5) \end{cases}$$

を用いれば、総面積は、

$$(8.6)\qquad T = a_1 + b_{3,4}$$

と書けて、Möbiusの問題 M_5 の解である(5.26)よりは、ずっと簡単になる。
そこで、一般の凸ｎ角形の場合にも、その頂点を $P_1, P_2, \cdots, P_n$ として、(8.5)と同じ仕方で $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ の値を知ればその総面積Ｔも知ることが出来るのではないかと考えられる。

もちろん、§６に述べたことから、$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ をあたえても、この凸ｎ角形の形はきまらないことを注意しておこう。

結論を述べれば、(8.8)の形の面積公式の存在を証明することができる。

<u>定理</u>　一つの凸ｎ角形 $(n \geq 3)$ の頂点を $P_1, \cdots, P_n$ として、その部分図形の面積を

(8.7)
$$\begin{cases} a_j = \triangle P_{j-1}\, P_j\, P_{j+1} & (1 \le j \le n) \\ b_j = \square P_{j-1}\, P_j\, P_{j+1}\, P_{j+2} & (1 \le j \le n) \end{cases}$$

とする（ b_j のかわりに $b_{j,j+1}$ とも書く）。

このとき、 a_j, b_j $(1 \le j \le n)$ の値を知れば、総面積Tも定まる。

さらに詳しくいえば、２ｎ変数の有理式 G_n が存在して

(8.8) $$T = G_n(a_1, \cdots, a_n;\ b_1, \cdots, b_n)$$

が成立する。

有理式とは、２ｎ個の変数 $a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n$ の多項式 f_n, g_n が存在して

$$G_n = f_n / g_n$$

の形に書けるものをいう。

そこで、説明の便宜上、(8.7)式に現われる３角形および４角形を凸ｎ角形Ｔの周辺３角形および周辺４角形とよぶことにする（余りよい呼び方ではないが）。

さて、定理の証明であるが $n=3,4,5,6$ の場合は既知だから、帰納法を用いることが出来る。

凸(n+1)角形 T_{n+1} を考え（面積も同じ記号）、その頂点を $P_1, \cdots, P_{n+1}$ とする

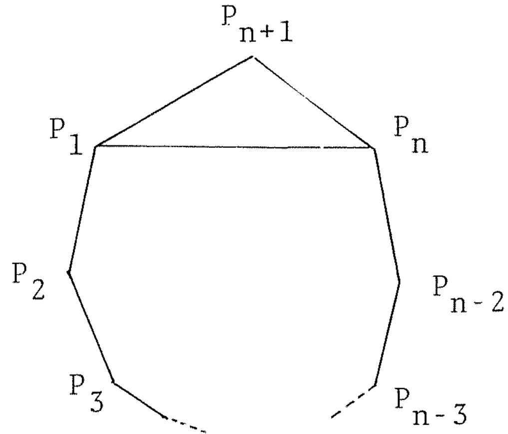


図８。９

上図において、P_1 と P_n を直線で結び、$\triangle P_{n+1}\ P_1\ P_{n+1}$ を切り離せば、凸n角形 $P_1,\ldots,P_n$ が得られるから、それを $\tilde{T}_n$（面積も $\tilde{T}_n$ で）表わすことにすれば、あきらかに

(8.10) $$T_{n+1} = a_{n+1} + \tilde{T}_n$$

を得る。

これは非常に簡単な関係式である。　もし

(8.11) $$\begin{cases} a_j = \triangle P_{j-1}\ P_j\ P_{j+1} & (1 \le j \le n+1) \\ b_j = b_{j,j+1} = \square P_{j-1}\ P_j\ P_{j+1}\ P_{j+2} & (1 \le j \le n+1) \end{cases}$$

の有理式として $\tilde{T}_n$ が得られるならば、これで帰納法は完成する。

ところで、(8.11)に現われるのは、T_{n+1} の周辺３角形および周辺４角形であって、$\tilde{T}_n$ の周辺に現われるものとは異なるところが問題である。

そこで、$\tilde{T}_n$ の周辺３角形および周辺４角形で、(8.11)に現われてこないものを考えれば、それは、次の５個の図形（或は、それらの面積）

(8.12) $$\begin{cases} \tilde{a}_n = \triangle P_{n-1}\ P_n\ P_1 \\ \tilde{a}_1 = \triangle P_n\ P_1\ P_2 \\ \tilde{b}_{n-1} = \tilde{b}_{n-1,n} = \square P_{n-2}\ P_{n-1}\ P_n\ P_1 \\ \tilde{b}_n = \tilde{b}_{n,1} = \square P_{n-1}\ P_n\ P_1\ P_2 \\ \tilde{b}_1 = \tilde{b}_{1,2} = \square P_n\ P_1\ P_2\ P_3 \end{cases}$$

だけである。　実際、

$$a_j \quad (2 \le j \le n-1)$$
$$b_j = b_{j,j+1} \quad (2 \le j \le n-2)$$

は T_{n+1} と共通であることは明らか。

ところで、帰納法の仮定により、

$$\tilde{a}_1,\ a_2, \cdots,\ \tilde{a}_n,\ \tilde{b}_1, \cdots,\ \tilde{b}_{n-1},\ \tilde{b}_n$$

の有理式 G_n が存在して

$$(8.13)\quad \tilde{T}_n = G_n(\tilde{a}_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \tilde{a}_n; \tilde{b}_1, b_2, \cdots, b_{n-2}, \tilde{b}_{n-1}, \tilde{b}_n)$$

である。　したがって、(8.12)の５個の量が(8.11)に現われる量の有理式として得られることがわかれば、(8.10)から得る

$$(8.14)\quad T_{n+1} = a_{n+1} + G_n(\tilde{a}_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \tilde{a}_n; \tilde{b}_1, b_2, \cdots, b_{n-2}, \tilde{b}_{n-1}, \tilde{b}_n)$$

の右辺にそれらの有理式を代入したものを G_{n+1} とすれば

$$(8.15)\qquad T_{n+1} = G_{n+1}(a_1, \cdots, a_{n+1}; b_1, \cdots, b_{n+1})$$

として有理式で表わされることがわかる。　そこで、(8.12)の５個の量の計算を実行して、有理式になることを見よう。

1°)　$\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_n$ の計算

必要な部分だけの図を書くと

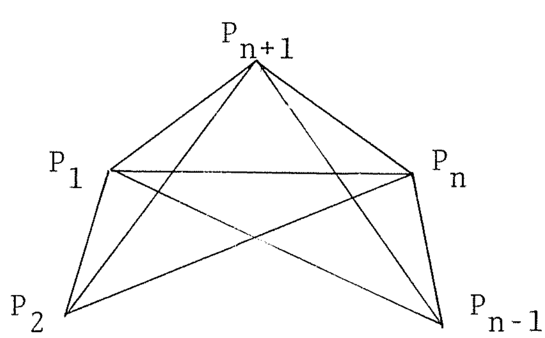


図８．１６

この図から、ただちに

$$(8.17)\qquad \begin{cases} \tilde{a}_1 = b_{n+1,1} - a_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} \\ \tilde{a}_n = b_{n,n+1} - a_{n+1} = b_n - a_{n+1} \end{cases}$$

を得る。　この右辺は一次式だから、もちろん有理式である。

2°)　$\tilde{b}_n = \tilde{b}_{n,1}$ の計算

必要な部分の図を書くと

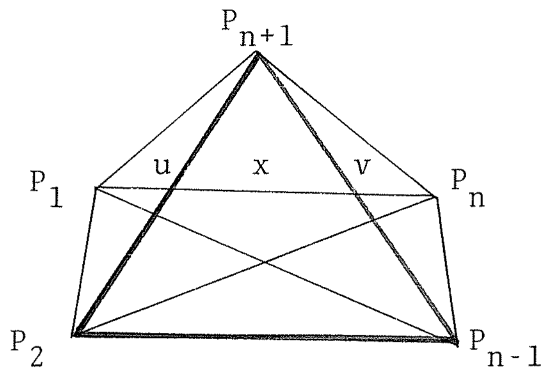


図８．２０

上図に書きこんだ記号は、その記号をとりかこむ小３角形の面積である。　太い線で示した３角形は、計算で大切な役割を果す。　その面積を

$$z = \triangle P_{n+1} P_2 P_{n-1}$$

で表わす。　求める量は

$$\tilde{b}_n = \square P_{n-1} P_n P_1 P_2$$

であるが、計算法は、Möbiusの問題を解いたときと似たものになる。

まず、ｕとｖを求めよう。　図のうち $\square P_n P_{n+1} P_1 P_2$ の部分に注目すれば、比例式

$$u : a_1 = a_{n+1} : b_{n+1}$$

から

$$(8.20) \qquad u = \frac{a_{n+1}a_1}{b_{n+1}}$$

を得る。　同様に　$\square P_{n-1}P_nP_{n+1}P_1$　の部分に注目すれば、比例式

$$v : a_n = a_{n+1} : b_n$$

から

$$(8.21) \qquad v = \frac{a_n a_{n+1}}{b_n}$$

を得る。　したがって

$$(8.22) \qquad x = a_{n+1} - (u+v)$$

として、ｘが求まる。

次に、図８．２０において、太線で囲まれた３角形の面積ｚを求めるには、比例式

$$x : z = uv : a_1 a_n$$

を利用すればよい。　これから

$$(8.23) \qquad z = \frac{a_1 a_n x}{uv}$$

を得る。　ｕ，ｖ，ｘは既知だから、これでｚも求まる。

$$z + a_1 + a_n$$

は、図８．２０ の５角形の面積に等しいから、これから a_{n+1} を引けば、求める４角形の面積が出る。　すなわち

$$(8.24) \qquad \tilde{b}_n = a_n - a_{n+1} + a_1 + \frac{a_1 a_n}{uv} x$$

を得る。

(8.20)，(8.21)から、 u, v は有理式、したがって、(8.22)から、x も有理式だから、(8.24)の $\tilde{b}_n$ も有理式である。　計算を最後まで実行すれば

$$\tilde{b}_n = a_n - a_{n+1} + a_1 + \frac{1}{a_{n+1}}(b_n b_{n+1} - a_n b_{n+1} - b_n a_1) \tag{8.25}$$

である。

3°)　$\tilde{b}_1 = \tilde{b}_{1,2}$ の計算

必要な部分の図は、こんどは

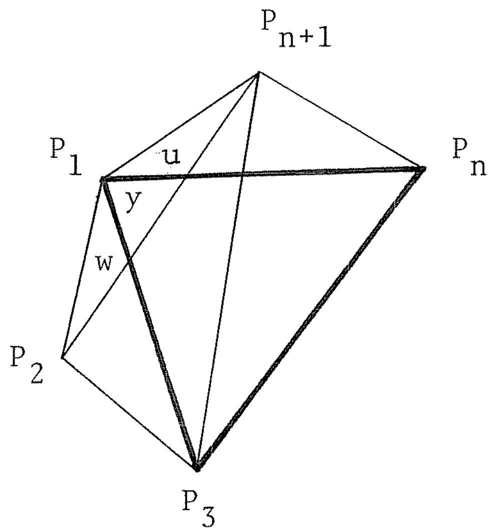


図８．２６

である。

計算で大切な役割を果す３角形は、太線で示してある。

$$z' = \Delta P_n P_1 P_3$$

とおく。

まず、w を求めるために、　$\square P_{n+1}P_1P_2P_3$　に注目すれば、比例式

$$w : a_1 = a_2 : b_1$$

から

(8.26) $$w = \frac{a_1 a_2}{b_1}$$

を得る。　すでにuは、(8.20)で既知だから

(8.27) $$y = a_1 - u - w$$

により、y が求まる。
　そこで、比例式

$$y : z' = uw : a_{n+1}a_2$$

から

(8.28) $$z' = \frac{a_{n+1}a_2 y}{uw}$$

を得る。　求める量 $\tilde{b}_1$ は

(8.29) $$\tilde{b}_1 = a_2 + z'$$

によって定まる。
　計算を実行すれば、

(8.30) $$\tilde{b}_1 = a_2 + \frac{1}{a_1}(b_{n+1}b_1 - a_{n+1}b_1 - b_{n+1}a_2)$$

を得る。

4°) $\tilde{b}_{n-1} = \tilde{b}_{n-1,n}$ の計算
　これは、原理的には、頂点に番号をつける順を反時計回りから時計回りに変更することによって $\tilde{b}_1$ の計算から導くことが出来るが（証明のあとの注意参照）、3°)と同じ計算を、手間をいとわずにやってみよう。
　必要な部分は

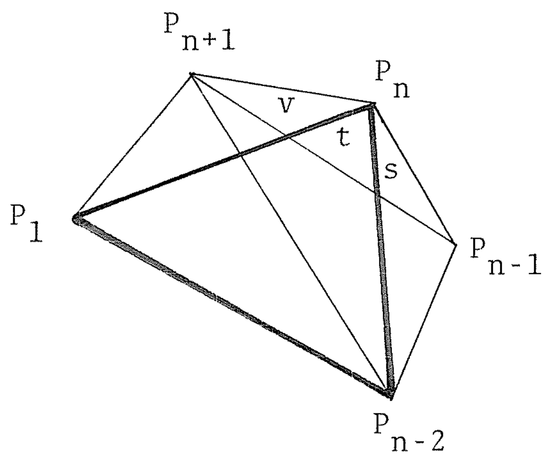


図８．３１

である。　太線の３角形の面積を

$$z'' = \triangle P_{n-2}P_nP_1$$

とおく。　$\square\ P_{n-2}P_{n-1}P_nP_{n+1}$ を眺めて、比例式

$$s : a_n = a_{n-1} : b_{n-1}$$

から

(8.32) $$s = \frac{a_{n-1}a_n}{b_{n-1}}$$

を得る。　v は、(8.21)で既知だから

(8.33) $$t = a_n - v - s$$

によりt が求まる。

比例式

$$t : z'' = vs : a_{n-1}a_{n+1}$$

から

(8.34) $$z'' = \frac{a_{n-1}a_{n+1}t}{vs}$$

がわかる。　求める $\tilde{b}_{n-1}$ は

$$\tilde{b}_{n-1} = a_{n-1} + z'' \tag{8.35}$$

によって定まる。

計算を実行すれば

$$\tilde{b}_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{a_n}(b_{n-1}b_n - a_{n-1}b_n - b_{n-1}a_{n+1}) \tag{8.36}$$

となる。

これで(8.12)の５個の量は、すべて(8.11)の変数の有理式であることがわかったから、定理の証明が完成した。　QED

注意　上に得た関係式を復習しよう。

$$b_j = b_{j,j+1} = b_{j+1,j}$$

という記法を許せば

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = b_{1,n+1} - a_{n+1} \\ \\ \tilde{a}_n = b_{n,n+1} - a_{n+1} \end{cases} \tag{8.37}$$

$$\tilde{b}_{n,1} = a_n - a_{n+1} - a_1 + \frac{1}{a_{n+1}}(b_{n,n+1}b_{n+1,1} - a_n b_{n+1,1} - b_{n+1,n}a_1) \tag{8.38}$$

$$(8.39)\qquad \begin{cases} \tilde{b}_{1,2} = a_2 + \dfrac{1}{a_1}(b_{n+1,1}b_{1,2} - a_{n+1}b_{1,2} - b_{n+1,1}a_2) \\ \tilde{b}_{n,n-1} = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}(b_{n+1,n}b_{n,n-1} - a_{n+1}b_{n,n-1} \\ \qquad\qquad - b_{n+1,n}a_{n-1}) \end{cases}$$

このように書けば、(8.37)、(8.39)のそれぞれの２式は

$$\begin{cases} n+1 \leftrightarrow n+1 & \text{(不変)} \\ \left.\begin{array}{l} n \leftrightarrow 1 \\ n-1 \leftrightarrow 2 \end{array}\right\} & \text{(回り方を逆に)} \end{cases}$$

の対応で対(ツイ)をなしていることがわかるであろう。　(8.38)の式は不変である。

したがって、(8.37)、(8.39)では、そのうちの一つを計算しておけばよかったのであって、番号のつけかえだけで、他の一つが出たのである。