昭和63年度(第11回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和63年8月2日～8月5日開催)

数学入門公開講座

昭和63年８月２日（火）から８月11日（木）まで

京都大学数理解析研究所

昭和63年度(第11回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和63年8月2日～8月5日開催)

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 演算子法の話（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　松　浦　重　武

微分・積分などの解析的な計算を、たんに記号の掛け算や割り算として取扱い、微分方程式の解法などを記号の形式的代数計算ですませるのが演算子法である。その歴史は19世紀のはじめ頃までさかのぼるらしいが、イギリスの電気工学者ヘビサイドが組織的に使用してから普及したので、ヘビサイド算法ともいわれる。

ヘビサイド算法は、正しい答を素早く求める便利な方法であったが、数学的基礎づけを持たなかった。

今世紀になってから、ラプラス変換による基礎づけが行われたが、簡明さが失われ、適用範囲にも制限がついた。ところで1950年頃、ポーランドの数学者ミクシンスキーは、ヘビサイドの簡明さをそのまま保つ基礎づけに成功した。

今回は、ミクシンスキーの方法によって演算子法の入門的な部分を解説する。

2. 無限大の自由度と対称性（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　三　輪　哲　二

可解格子模型とモジュラー函数､無限次元リー環の関係について基本的な例を中心に解説する。

3. 結び目の話（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　島　田　信　夫

3次元空間における閉曲線である結び目の同位型分類は、直感的に捉え易いものとして、恐らく昔から考えられた問題であろう。そしてこの問題は、オイラーの曲面定理などとともに、位相幾何と呼ばれる数学分野が創られる要因になった。ここでは、関連する絡み輪、組み紐群の話をまじえて、この方面における最近の進展にも触れたい。

4. 代数方程式について（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　一　松　　信

代数方程式は古くて新しい問題である。古典的な代数的解法を見直すとともに、数値解法と合せて考察してみたい。

時　間　割

日 / 時　間	8月 2日(火)	3日(水)	4日(木)	5日(金)	6日(土)	7日(日)	8日(月)	9日(火)	10日(水)	11日(木)
13:15～15:00	松浦	松浦	松浦	松浦	休講		島田	島田	島田	島田
15:00～15:15	休憩						休憩			
15:15～17:00	三輪	三輪	三輪	三輪			一松	一松	一松	一松

2.　無限大の自由度と対称性（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　三　輪　哲　二

1988, AUGUST 2 ,3 ,4 ,5　　　15:15 - 17:00

講義資料は、当日席上配付いたします。

三　輪　哲　二

昭和63年度(第11回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和63年8月2日～8月5日開催)

バクスターの魔法

三 輪　哲 二

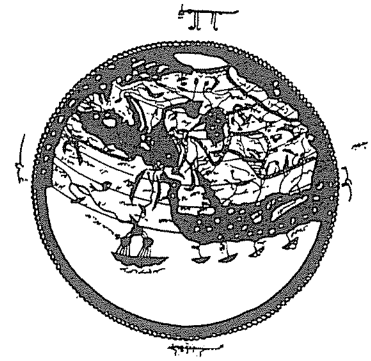
『数理科学』 No. 302, AUGUST 1988 別刷

特集／次元のプロフィル

バクスターの魔法

三輪 哲二

イドリーシの世界図



円が平行四辺形になる

30年近く前の話になるけれど，小学校の算数の授業での一コマを今でもありありと思い出す．それは，円の面積が πr^2 になることを，分割した扇形を平行四辺形に並べ直して考えようというものだった．実際にハサミを使って切り離した切片を，たがいちがいに並べていくと平行四辺形に近いものができるのだけれど，やはり円弧は円弧であってまっすぐにはならない．ところが4等分からはじめて8等分，12等分とやっていった時，不意に無限の極限ということが理解できたのだった．

可解格子模型についてのバクスターの本[1]に彼がhard hexagon模型をいじくっていて解けると確信した時のことが，非常に生き生きとした形で書かれている．彼が発見したのは，自由度が無限大の極限で姿を現わすある対称性であった．彼はそれを利用してcorner transfer matrixという計算法を編み出した．

小学校の生徒にとって，円が平行四辺形に化けてしまうのが魔法であったように，バクスターの計算法は，2次元を1次元に化かす魔法である．その魔法のタネはどうやら無限次元のリー環と関係しているらしいのだが….

ハイゼンベルグ代数

魔法といえば

$$1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q} \tag{1}$$

という式も，初めて出会うものにとっては小さくない驚きであるが，この式は自由度と対称性についてかなりのことを教えてくれる．ここで自由度といっているのは，和を取る変数の数のことである．式(1)の左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{2}$$

と書けばわかるように，ひとつの変数 n が0, 1, 2, …という値を取ることについての和である．

4つの作用素 $1, x, \dfrac{d}{dx}, x\dfrac{d}{dx}$ から成るリー環を考えよう．これをハイゼンベルグ代数と呼ぶ．次の三つの交換関係が成立する．

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right]=1$$
$$\left[x\frac{d}{dx}, x\right]=x \tag{3}$$
$$\left[x\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right]=-\frac{d}{dx}$$

このリー環は，1変数多項式環

$$\boldsymbol{C}[x]$$

に作用している．

その指標として

$$\mathrm{trace}_{\boldsymbol{C}[x]}\, q^{x\frac{d}{dx}} \tag{4}$$

を考えよう．$\boldsymbol{C}[x]$ の基底 $x^n(n\in\boldsymbol{N})$ は

$$x\frac{d}{dx}x^n=nx^n$$

を満たす．$\boldsymbol{C}[x]$ 上の作用素 $q^{x\frac{d}{dx}}$ はこの基底で対角化され固有値は q^n である．従ってトレースを

取って(4)は(2)に一致する．作用素 $q^{x\frac{d}{dx}}$ の固有値がこのように整数巾に“量子化”される根拠は，交換関係(3)にある．

(3)を書き直してみると，作用素の積として

$$x\frac{d}{dx}\cdot x = x\cdot\left(x\frac{d}{dx}+1\right)$$

が成り立つが，この式は，x の作用は $x\frac{d}{dx}$ の固有値を1増やすことを示している．同様に，$\frac{d}{dx}$ は $x\frac{d}{dx}$ の固有値を1減らす．

自由度1の和(2)の背後にハイゼンベルグ代数という有限次元リー環の表現が隠れていることがわかった．

ヴィラソロ代数

では，無限次元のリー環を考えると事情はどう変わるのか．ここではヴィラソロ代数というものを考えてみたい．これは $L_n(n\in \boldsymbol{Z})$ という無限個の要素に定数 c を加えたものから成るリー環で，次の交換関係を満たす．

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m(m^2-1)}{12}\delta_{m,-n}c \qquad (5)$$

ハイゼンベルグ代数の $x\frac{d}{dx}$ に相当するものとして L_0 が考えられる．(5)において $m=0$ とすると

$$[L_0, L_n] = -nL_n \qquad (6)$$

となって，L_n は L_0 の個有値を n 減らす作用であることがわかる．従ってヴィラソロ代数が作用する適当な空間 V を考えるとそこでの指標

$$\chi_V(q) = \mathrm{trace}\ {}_V q^{L_0} \qquad (7)$$

は(2)と似たような和になるであろう．

V として次のようなものを考えよう．これはヴァーマ加群と呼ばれる．ハイゼンベルグ代数の時の $\boldsymbol{C}[x]$ と平行して考え $1\in\boldsymbol{C}[x]$ に当たるものを抽象的に $|h>$ と書こう．これは

$$L_n|h> = 0 \qquad n>0 \qquad (8)$$

$$L_0|h> = h|h> \qquad (9)$$

を満たすものとする．$|h>$ から生成されるベクトルは h より小さい固有値を持ち得ない．固有値を小さくしようとして，$L_n(n>0)$ を作用させても(8)により消えてしまう．これは，$1\in\boldsymbol{C}[x]$ が $\frac{d}{dx}$ を作用させて消えるのに対応している．$\boldsymbol{C}[x]$ の基底 x^n は1に作用素 x をくり返し作用させて作り出せる．同じように V の基底として次のようなベクトルを考えよう．

$$L_{-n_1}^{k_1}L_{-n_2}^{k_2}\cdots L_{-n_m}^{k_m}|h> \qquad (10)$$

ただし，$0<n_1<n_2<\cdots<n_m$ とする．これだけのものでヴィラソロ代数の作用は閉じている．例えば(6)，(8)，(9)を使って変形すると

$$\begin{aligned} L_1L_{-1}|h> &= ([L_1, L_{-1}]+L_{-1}L_1)|h> \\ &= 2L_0|h> \\ &= 2h|h> \end{aligned}$$

となって，$L_{-1}|h>$ というベクトルに L_1 を作用させたものは $|h>$ の定数倍になる．

(6)からベクトル(10)の L_0 についての固有値は，

$$n = k_1n_1+k_2n_2+\cdots+k_mn_m$$

だけ増えている．与えられた n に対して，独立な固有ベクトルがどれだけあるかはこれからわかる．すなわち，「n を1以上の自然数の和に分割する場合の数」が答である．この数は n の分割数と呼ばれ $p(n)$ と書かれる．n の小さい所を書いてみると

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	10	15

となる．

$|h>$ の L_0 に対する固有値が h であったことに注意すると指標(7)は

$$q^h\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n \qquad (11)$$

となる．この和は次のように無限自由度の和の形に書き直せる．

$$\mathrm{trace}\ {}_V q^{L_0} = q^h\lim_{m\to\infty}\sum_{l_1,\cdots,l_m=0}^{\infty}q^{\sum_{j=1}^{m}jl_j} \qquad (12)$$

和の中の $q^{\sum_{j=1}^{m}jl_j}$ は V のベクトル

$$L_{-1}^{l_1}\cdots L_{-m}^{l_m}|h>$$

に対応している．こうしてヴィラソロ代数のヴァーマ加群の指標は無限自由度の和となった．この場合，和は(1)をくり返し使って簡単に計算できてしまう．

$$\sum_{l_1,\cdots,l_m=0}^{\infty} q^{\sum_{j=1}^{m} j l_j} = \frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^m)}$$

自由度のひとつひとつが他とは独立に計算できてしまうのであって，言いかえると自由度の間に相互作用がない．もうひとつ注意しておくと $m\to\infty$ の極限が意味をもつ理由は，q のべきの l_j が j 倍されているからで，この j のはいり方からこの和は1次元的な無限自由度の和と考えられる．

hard hexagon 模型

相互作用がある無限自由度の系の例として，hard hexagon 模型を考えよう．図1のような三角格子を考える．j は三角格子の各点を表わすものとし，各 j に対し，0または1の値を取る変数 l_j を考える．これは次のような物理的な模型に対応する．三角格子で表わされる物質の表面に六角形(hexagon)の分子が吸着する状況を，吸着のあるなしを $l_j=1$ または0で表現する．六角形の分子は格子の1点 j に吸着すると，そのまわりの六個の三角形を合わせた領域を占有する．したがってこの六角形の分子が固い(hard)とすると，j とそのまわりの6点の合わせて7点には，もはや別の分子が吸着することはない．このことは，i と j が隣りあう時の

$$0\leq l_i+l_j\leq 1 \tag{13}$$

という制限条件でとらえられる．

(11)と似たものとして，分配函数と呼ばれる

$$Z(z)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{HH}(n) z^n \tag{14}$$

という形の和を考える．ここで $P_{HH}(n)$ は，n 個の分子を三角格子上に吸着させる場合の数である．(11)が，(12)の形に1次元格子上の無限自由度の和に書けたのと同じく，(14)は

$$Z(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{l_1,\cdots,l_{N(m)}=0,1}^{*} z^{\sum_{j=1}^{N(m)} l_j} \tag{15}$$

と書かれる．m は有限の大きさの三角格子の辺の長さだとして，$N(m)=(m+1)(m+2)/2$ は，格子点の数である．和記号 $\sum$ に $*$ をつけたのは，この和が制限条件(13)のもとでの制限された和，言いかえると，相互作用のある和であることを示す．$N(m)$ が m^2 に比例する大きさを持つことからわかるように，この和は2次元的な無限大の自由度を持つ和である．

(15)で定義される和は，相互作用のあるなし以外に(12)と違う点を持っている．それは $m\to\infty$ で答が発散するということである．実際，有限格子の境界近くを無視して大きな $N=N(m)$ で考えると

$$Z(z)=1+Nz+\frac{1}{2}N(N-7)z^2+\cdots$$

となって1以外の z のべきの係数は N とともに発散する．

物理的な問題に対応する無限自由度の系においては，これが普通の状況であって，(12)のように発散のない和が初めから出てくることはない．発散を抑えて有限なものを取り出す方法はいろいろあるが，Baxter にしたがって局所状態確率というものを考えよう．格子点上に1点 $i=i_0$ を選び，i_0 での自由度の状態が0，すなわち i_0 には分子が吸着していないものだけに制限した和を $Z(z;0)$ と書く．同じように $Z(z;1)$ を定義して $a=0,1$ に対し

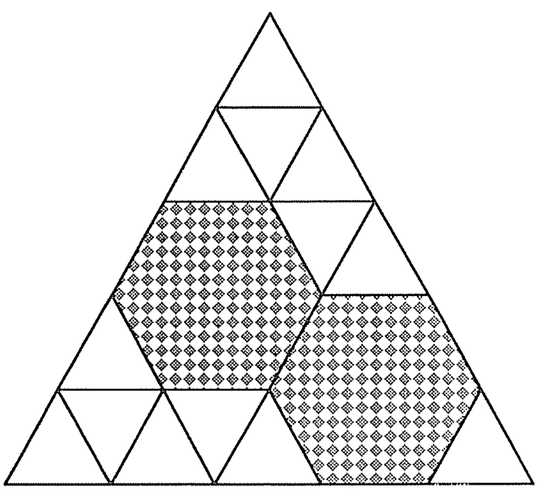


図1

$$P(a)=\frac{Z(z\,;\,a)}{Z(z)}$$

を i_0 という点での局所状態が a である確率と呼ぶ．こう書いてしまうと，分母，分子ともに発散するので相変らず困るけれど，N：有限で考えるならば，$z=0$ の近くでの展開として

$$P(a)$$

$$=\frac{1+(N-1)z+\frac{1}{2}(N-2)(N-7)z^2+\cdots}{1+Nz+\frac{1}{2}N(N-7)z^2+\cdots}$$

$$=1-z+7z^2\cdots$$

という有限の答を得る．

corner transfer matrix

バクスターの corner transfer matrix は，この局所状態確率を計算するためのものである．それは(14)のような2次元的な無限自由度の和を，ひとつ次元を低下させて1次元的な無限自由度の計算に帰着させる．その魔法の杖のひと振りから出てくるものは何かというと，これがヴィラソロ代数の（ヴァーマ加群ではない）表現の指標なのである．

有限の三角格子として，i_0 を中心に持つ一辺の長さ m の大きな六角形を考え，それを i_0 を中心に六等分した一片を考える．この一片は，図2のような一辺の長さ m の三角形である．3辺のうちの B と書いた辺は，分割する前の格子の境界だったもので，この辺の上には粒子を吸着させないことにする．これは，格子の遠方での物理的な境界条件を設定することに対応する．また $P(0)$ を考えることにして，格子点 i_0 にも分子はないとする．辺 L および M の上の0,1の配置を決めよう．L のうえの配置を $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m+1})$，$M$ のうえの配置を $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m+1})$ としよう．i_0 での条件から $\lambda_1=\mu_1=0$ であり，境界の条件から，$\lambda_{m+1}=\mu_{m+1}=0$ である．また(13)にしたがって，$0\leq\lambda_i+\lambda_{i+1}\leq 1$，$0\leq\mu_i+\mu_{i+1}\leq 1$ となる．これだけの条件を満たす λ の数を $S(m)$ とすると，$m=1,2,3,4,\cdots$ に対して，$S(m)=1,2,3,5,\cdots$ となる．

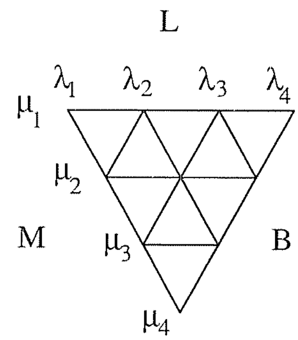


図2

各 m に対して $S(m)\times S(m)$ の行列 A (corner tranfer matrix)を次のように定義する．上に述べたように λ と μ を決めた時に $A_{\lambda\mu}$ という行列要素を，境界 L，M，B における配置が決められた格子に対する分配函数(14)で与える．例えば $m=3$ に対する行列 A は

$$A=\begin{pmatrix}1+z & z & z\\ z & z^2 & z^2\\ z & z^2 & 0\end{pmatrix}$$

となる．

大きさ m の corner transfer matrix の固有値を，絶対値の大きい順に並べたものを $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{S(m)}$ としよう．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ は m とともに変化する複雑な量になる．バクスターの発見は，

$$q=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

とおいて，この q を使って

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_1}=q^{k_i}$$

とすると，($k_1=0$, $k_2=1$ であるが)各 k_i は $m\to\infty$ の極限で，整数になるということだった．彼はこの整数値を計算する方法，さらにそれを使って確率 $P(a)$ を表示する方法を与えた．

魔法のタネ明かし？

最後に我々の論文[2]に従ってオチをつけておこう．バクスターの方法は hard hexagon 模型に限らず，2次元の可解模型一般に適用される．そこに現われる coner transfer matrix のくり込まれ

昭和63年度(第11回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和63年8月2日～8月5日開催)

たトレース

$$1+q^{k_2}+q^{k_3}+q^{k_4}+\cdots \tag{16}$$

は，多くの場合ヴィラソロ代数の指標に一致することがわかっている．ヴィラソロ代数の c と h の値を特殊な値に選ぶと，表現空間の指標が相互作用のある1次元的な無限自由度の和になる場合があって，それが(16)と一致するのである．但し何故そうなるかはよくわかっていない．そのような和の例をひとつあげておこう．$l_j(j=1,2,3,\cdots)$ という和の変数を考え l_j の取る値は $1,2,\cdots L-1$ とする．隣りあう l_j と l_{j+1} に

$$|l_j-l_{j+1}|=1$$

という制限条件をつけ，与えられた $a,b,b'(b'=b\pm1)$ に対し，次の和を考える．

$$\lim_{m:\ \mathrm{even}\to\infty}\sum_{\substack{l_1=a\\ l_{m+1}=b\\ l_{m+2}=b'}} q^{\sum_{j=1}^{m} j\cdot\frac{|l_j-l_{j+2}|}{4}}$$

このような和が corner transfer matrix のトレースとして現われるのだが，それが同時に

$$c=1-\frac{6}{L(L-1)}$$

に対するヴィラソロ代数の a,b,b' によって決まる h のある値に対応する既約表現の指標になっている．

円を切りはなして平行四辺形にすることでその面積を求めるというやり方は，微積分学の教える面積の計算法に比べて余りにも特殊であろう．バクスターの方法による局所状態確率の計算法も，2次元の可解模型の特殊性に非常に大きく依存している．無限自由度の問題にとっての微積分学にあたるものはどのように構成されるのだろうか．

参考文献

1) R. J. Baxter, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, London 1982.

2) E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, Exactly solvable SOS models, Nuclear Physics B290[FS20] (1987) 231-273.

(みわ・てつじ，京都大学・数理解析研究所)