数学入門公開講座

昭和63年８月２日（火）から８月11日（木）まで

京都大学数理解析研究所

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 演算子法の話（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　松　浦　重　武

微分・積分などの解析的な計算を、たんに記号の掛け算や割り算として取扱い、微分方程式の解法などを記号の形式的代数計算ですませるのが演算子法である。その歴史は19世紀のはじめ頃までさかのぼるらしいが、イギリスの電気工学者ヘビサイドが組織的に使用してから普及したので、ヘビサイド算法ともいわれる。

ヘビサイド算法は、正しい答を素早く求める便利な方法であったが、数学的基礎づけを持たなかった。

今世紀になってから、ラプラス変換による基礎づけが行われたが、簡明さが失われ、適用範囲にも制限がついた。ところで1950年頃、ポーランドの数学者ミクシンスキーは、ヘビサイドの簡明さをそのまま保つ基礎づけに成功した。

今回は、ミクシンスキーの方法によって演算子法の入門的な部分を解説する。

2. 無限大の自由度と対称性（7時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　三　輪　哲　二

可解格子模型とモジュラー函数、無限次元リー環の関係について基本的な例を中心に解説する。

3. 結び目の話（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　島　田　信　夫

3次元空間における閉曲線である結び目の同位型分類は、直感的に捉え易いものとして、恐らく昔から考えられた問題であろう。そしてこの問題は、オイラーの曲面定理などとともに、位相幾何と呼ばれる数学分野が創られる要因になった。ここでは、関連する絡み輪、組み紐群の話をまじえて、この方面における最近の進展にも触れたい。

4. 代数方程式について（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授　一　松　　信

代数方程式は古くて新しい問題である。古典的な代数的解法を見直すとともに、数値解法と合せて考察してみたい。

時　間　割

日 / 時間	8月 2日(火)	3日(水)	4日(木)	5日(金)	6日(土)	7日(日)	8日(月)	9日(火)	10日(水)	11日(木)
13:15～15:00	松浦	松浦	松浦	松浦	休講		島田	島田	島田	島田
15:00～15:15	休憩						休憩			
15:15～17:00	三輪	三輪	三輪	三輪			一松	一松	一松	一松

昭和63年度(第11回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 昭和63年8月8日～8月11日開催)

3.　結び目の話（7時間）

京都大学数理解析研究所・教授 島　田　信　夫

1988, AUGUST 8, 9, 10, 11　　　13:15 - 15:00

結び目の話

島田信夫

結び目は3次元空間において，われわれの直観に訴える幾何学的な現象或いは経験の一つである．これが数学の問題として自覚され，研究されはじめたのは，前世紀末頃からで，それ程古いわけではないが，"位置の幾何学"としての結び目の同位型分類の問題は，それ自体興味ある重要な課題となった．

また多様体の理論においても結び目理論は重要な役割をもち，今日の位相幾何学における最も研究活動が著しい分野の一つとして発展している．

ここでは，結び目，絡み輪理論における，なるべく初等的な知識，方法で近づくことができる様な部分に限って解説を試みる．

§1　結び目（絡み輪）図式

§2　種々の不変量と問題点

§3　skein 多項式

参考文献

G. Burde・H. Zieschang, "Knots", Walter de Gruyter, Berlin・New York 1985

L.H. Kauffman, "On knots", Annals of Math. Study 115, Princeton U.P. 1987

P. de la Harpe・M. Kervaire・C. Weber, On the Johnes polynomial, L'Enseignement Math. 32 (1986), p.271−335

村杉邦男, "組み紐の幾何学", ブルーバックス, 講談社, 1982

R.H. Crowell・R.H. Fox, "Introduction to knot theory", Ginn and Co., New York, 1963.
同訳書 "結び目理論入門", 寺阪英孝・野口広 訳, 岩波書店 1967.

A.P. Perko, On 10-crossing knots, Portugalliae Math. 38, (1979)

K. Reidemeister, "Knotentheorie", Engebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 1, Springer 1932.

M.B. Thistlethwaite, Knot tabulations and related topics, in "Aspects of Topology", London Math. Soc. Lecture Note Ser. 93, Cambridge U.P. 1985

村杉邦男「組み紐の幾何学」より

さて、こうして一本の紐から出来るいろいろな形の結びの両端をつなぐと、全体として一つの輪が出来る。こうした輪、すなわち空間の中の一つの閉じた曲線のことを数学では「結び目」(Knot)という(図2・7)。

いろいろな形の結び目があるが、たとえば図2・7の(1)と(2)のように適当に動かすと同じ形になる(図2・8)。二つの結び目は特に区別しないで、「同じ」である、または「本質的に等しい」などといっている(この本では、簡単に「等しい」ということが多い)。

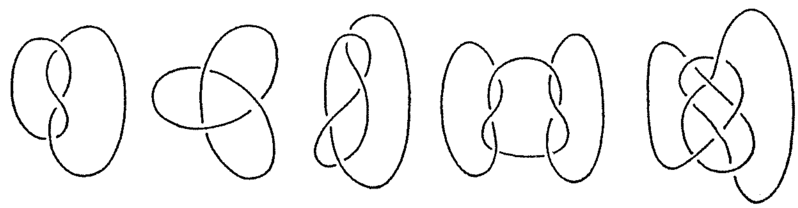


図2・7 いろいろな結び目

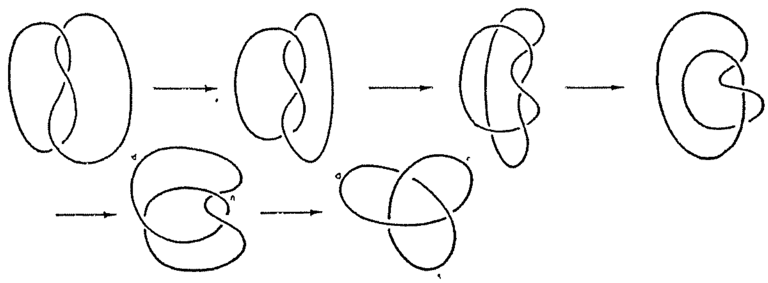


図2・8 「同じ」結び目

結び目を区別する

さて、一見違っている二つの結び目を適当に動かして、同じ形にし得るかどうかを、つまり"本質的に等しい。かどうかを、はっきり決定することは非常にむずかしい。

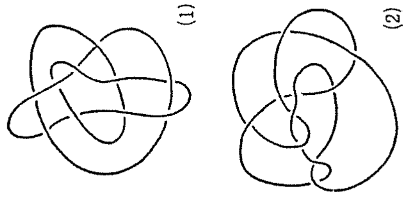


図2・9 (1)から(2)への形の移行は可能か？

いくら動かしても、同じ形にならないからといって、これらが"本質的に等しくない"といい切ることは出来ないだろう。たとえば、図2・9の(1)の結び目を動かして、(2)の形に移せるであろうか？

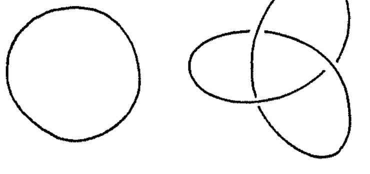


図2・10 簡単な結び目

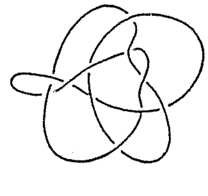


図2・11 複雑な結び目の1例

実は出来るのであるが、実際に出来ることに気がつくのに八〇年かかっている！

そこで「二つの結び目が本質的に等しいかどうか、判定する問題」を結び目の問題と呼んでいて、この問題を研究するのが、「結び目の数学」である。

「結び目の数学」は、すでに十九世紀の初めから研究されている古い学問で、一八九〇年にはイギリスの数学者リトルが八〇〇種近くの違った結び目を簡単なものから（図２・10の⑴と⑵）、複雑なもの（図２・11。上から見た時の交点が十一個ある）まで、順に並べた表を作っている。特に図２・10の⑴のように、まったく「結び」のない結び目を「自明な結び目」といっているが、これは確かに最も簡単な「結び目」であろう。

一〇〇年近く前に作られたリトルのこの表は驚くほど正確なもので、重複したものはほとんどなく、最近まで、ほぼ完全な表だと思われていた。ところが、一九七〇年にゲームの理論などで著名なケンブリッジ大学のジョン・コンウェイ教授が、計算機を使って結び目を組織的に作る方法を考え出し、その結果、リトルの表にない交点が十一個ある新しい結び目を十一種発見した。計算機の応用といい、コンウェイの知名度と、その方法とから誰もが完全と思って疑わなかったこの表に、実は載っていない一つの結び目がごく最近見つかって、またまたコンウェイの表の「完全さ」が問われるようになった。

見つけたのは、パーコーという弁護士である。彼は一九六四年、プリンストン大学の数学科を卒業した後、ハーバード大学の法律学校に進み、現在、ニューヨーク市のマンハッタンにある会社の顧問弁護士をしている。パーコーは余暇にこつこつと結び目の研究を続け、時には会社の計算機を利用したりして論文を書きあげ、最近プリンストン大学から数学で学位を受けた。

図２・９の二つの結び目が本質的に等しいことを示したのは、このパーコーで、一九七〇年になってからのことである。

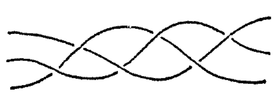


図2・12　三つ編み

舞台は位相幾何学へ

さて、当初遊びのように思われていたこの結び目の問題が、今世紀に入ってから三次元位相幾何学の最も基本的な問題の一つであるということが認識されるようになって、急速に研究が盛んになったが、なかなか思うようには進まなかった。

昔から、三つ編み（図２・12）やベルー編み（図１・１）のような組み紐の上の端と下の端とを結ぶと全体として結び目、または結び目の集まり（これを絡み輪（Link）という）になることはよく知られており（図２・13）、リトルの表には、こうした組み紐を通して得られた結び目が数多く見られる。

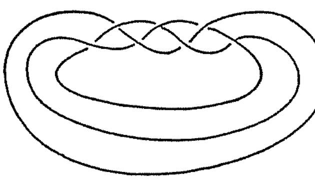


図2・13　絡み輪

ところが、一九二三年、アレキサンダーはこれとまったく逆な「どんな結び目も、こうして組み紐を通して得られる」という、「結び目の数学」と「組み紐の数学」を結ぶ重要な定理を発見した。

Ａ・Ｗ・アレキサンダーは、一八八八年、ニュージャージー州で生まれた生粋のアメリカ人である。

彼はプリンストン大学に学び、一九一五年にそこで学位をとった。当初はプリンストン大学の教授であったが、後に一九三三年に高級研究所の教授となり、生涯の大半をプリンストンで過した。

アレキサンダーは一九二〇年から三〇年にかけて、ベブレン、レフシェッツらと共に活躍し、位相幾何学の分野でのプリンストン大学の名を不動のものとした。「アレキサンダーの多項式」、「アレキサンダーの双対定理」など、彼の名を冠した多くの概念や定理によって知られる。

組み紐の種類

「組み紐の数学」で、誰もが最初に頭に浮かべる最も素朴な質問は、恐らく、「いったい、どれだけ違う組み紐があるだろうか？」であろう。そしてそれに対する最も簡単明瞭な答えは、「無限にたくさんある」である。

たしかに無限にたくさんある。たとえば、一次の組み紐、二次の組み紐、三次の組み紐、……というように紐の数が違えば、決して本質的に等しい組み紐にはなれないのだから、こういうふうに数えていっただけでも、無限に違った組み紐が出来る（図３・１）。

しかし、簡単な二次の組み紐でも、無限に違う組み紐がありそうである。たとえば、図３・２のように一回、右にねじったもの、二回ねじったもの、三回ねじったもの、……というふうにねじる回数をふやせば、いくらでも組み紐が出来るが、これらは本当に本質的に等しくない、のだろうか？

事実、そうなのであるが、簡単そうに見えるこのことも、いざ証明となると、なかなかやっかいである。

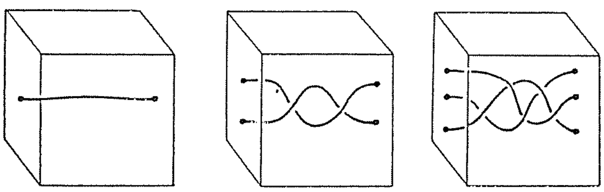


図3・1　組み紐は無限に出来る

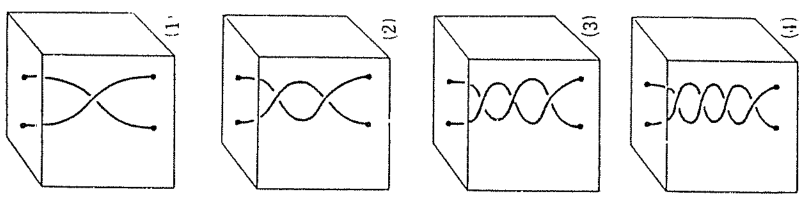


図3・2　組をねじる

いま、図３・２の(1)、(3)という二つの組み紐を同時に右に一回ねじってみよう。すると、(1)、(3)共に「ねじり」が一回ふえて、それぞれ組み紐(2)、(4)に移るだろう。したがって、右に「ねじる」という操作を施すことによって、二つの組み紐(1)、(3)の関係は(2)、(4)という二つの組み紐と同じ関係になってしまう。つまり、二次の組み紐全部の集まりは、こうした「ねじる」という操作——前の足し算のような演算——によって、組み紐が相互に関連した一つの有機体を作っている（数学者はこれを群という）。これが組み紐の理論を貫いている思想である。

組み紐の積

いま、次数nの等しくない組み紐全部の集まりをB_nと書くことにする。ここでは、簡単のために、四次の組み紐の集合B_4について考えることにするが、もちろん一般のB_nについても同じようなことが成立つことを初めに注意しておこう。

さて、二つの組み紐AとBをとってこよう。A、Bはそれぞれ立方体D_A、D_Bの中の4本の紐から出来ている（図3・3）。

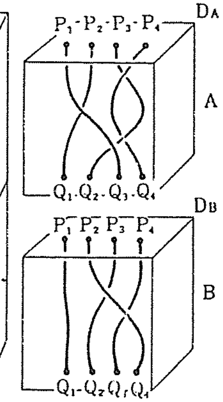


図3・3　二つの組み紐

こののD_Bの上面とD_Aの底面とを、D_B上のP_1、P_2、P_3、P_4がD_A上のQ_1、Q_2、Q_3、Q_4と一致するように貼りつけたあとで、この貼りつけた面を消してしまうと、D_A、D_Bから一つの長方体Dとその中に入っている新しい組み紐Xが出来る（図3・4）。

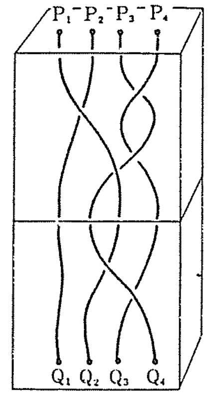


図3・4　二つの組み紐から新しい組み紐をつくる

組み紐は別に立方体の中に入っていなくてもよいのだが、もし気色が悪いというのなら、Dを上下から少し押しつぶして立方体にしておけばよい。

この新しい組み紐Xを「AとBの積」といってABと書くことにする。直観的にいえば、ABという「積を作る」ということは、組み紐Bの入っている立方体の上に組み紐Aの入っている立方体のブロックを「積み重ねる」ということだと思えばよい。

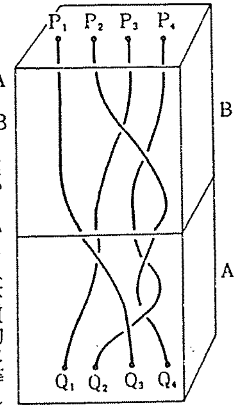


図3・5　重ね方を変えると……

この積はまた、2×3 のようにAにBを“掛ける”と考えてもよいが、算数の掛け算と違うところは、BにAを掛けた（BとAの積）BAはABと違っている（本質的に等しくない）ことである。ABでは、組み紐Bの立方体の上に組み紐Aの立方体を積み重ねたが（図3・4）、BAというのは、逆に組み紐Aのブロックの上に組み紐Bのブロックを積み重ねたのだから（図3・5）、これらは上・下を固定しておいて、中を動かしただけでは同じ組み紐にはならない。

図3・4では、P_1はQ_2と結ばれているが、図3・5ではP_1はQ_3と結ばれているから、中を動かしただけでは、決して一致させることは出来ない。ところが、算数の掛け算の公式

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$$

と同じような公式は、どんな組み紐Cをとっても、

$$(AB)C=A(BC)$$

となる（これを結合法則という）。

このことを調べるには、実際にこの式の両辺を表わす組み紐を調べたらよい。これらは、三つの組み紐C、B、Aの入っている立方体を、この順に積み重ねたものであることはすぐわかる。

単位元と逆元

次にB_4の中で特別に簡単な組み紐（図3・6）がある。これはただP_iとQ_iとを直線で結んだだけの組み紐である。

この組み紐をEとすると、Eは他のどんな組み紐、たとえば図3・6のDのようなものに対しても、

$$DE=D \qquad ED=D$$

となってしまう。つまり、これは掛け算の1のようなものである。

このような組み紐Eを〝自明な組み紐〟といっているが、B_4の単位元ということもある。

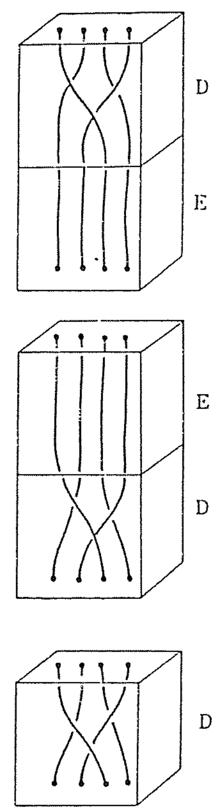


図3・6　Eは〝自明な組み紐〟

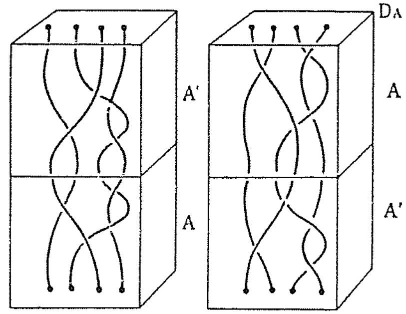
最後に各組み紐と「対」になっている組み紐がある。この「対」という意味をもう少しくわしく説明しよう。

いま立方体D_Aの底面を鏡にすると、Aの像A′がD_Aの下に映る。この二つを積み重ねてAA′、A′Aを作ると、これらはいずれも自明な組み紐Eと等しくなってしまう（図3・7）。

こういう組み紐A′のことをAの逆元といい、A^{-1}と書く。AとA^{-1}とは〝対〟になっていて、

$$AA^{-1}=E, \qquad A^{-1}A=E$$

となっている。図3・3の組み紐Bについても同じようなやり方でたしかめられるとよい。



(1)　(2)

図3・7　AA′とA′Aは自明な組み紐になる

組み紐群の考察

ここで今までのところをまとめてみると、われわれの組み紐の集合B_4は、

(一)　勝手な二つの元、つまり組み紐A、Bに対し、ABという積を作ることが出来て、いつも結合法則

$$(AB)C=A(BC)$$

が成り立っている。

(二)　B_4には単位元Eがある。Eは、

$$AE=A, \qquad EA=A$$

という性質を持っている。

(三)　各元Aには〝対〟になっている元A^{-1}があって、

$$AA^{-1}=E, \qquad A^{-1}A=E$$

という性質を持っている。A^{-1}をAの逆元という。

こういう三つの性質を持っている集合のことを数学では、「群（ぐん）」という。したがって、B_4は群である。これを四次の組み紐群、または四次のアルチンの組み紐群などという。もちろんn次の組み紐の集合B_nについても同じで、これからn次の組み紐群が出来る。

この組み紐群は、後に組み紐の理論を離れてひとりでどんどん発展していって、群の理論に大きな貢献をするのである。

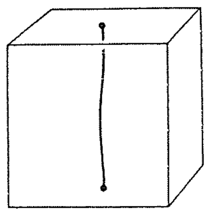


図3・8　最も簡単な組み紐。研究することは何もない

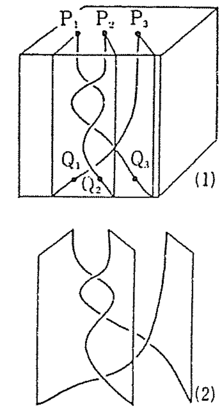


図8・1　組み紐から結び目を作る

組み紐と結び目の関係はどうなっているか

一九二五年に誕生した組み紐の理論は、主にドイツを中心に、時には、またモスクワのソ連学派も交えて、一九二〇年代の後半から一九三〇年代にかけて着実にその研究が進められて行った。

しかし、第二次世界大戦のきざしがヨーロッパに見え始めたころ、アルチンの初めに抱いた「結び目問題への応用」という大きな抱負にいつしか疑念の影がさし始めていた。

組み紐の上面の点P_1と底面の点Q_1、P_2とQ_2、P_3とQ_3とを立方体の表面で互いに交わらない線分で結ぶと、結び目が出来る（図8・1）。

このように一つの組み紐から上面の点とその真下にある底面の点とを立方体の表面上で（互いに交わらない線分で）、結んで結び目か絡み輪を作ることが出来る（第1章参照）。

アルチンの組み紐の理論の基礎になっているのは、この逆で、第2章でふれたように、

「どんな結び目も、このようにある組み紐の上の点と下の点とを立方体の表面上で結んで出来る結び目と等しくなる」

というアレキサンダーの主張である。

いまこうした立方体の表面上で結んだ紐を取り去れば、あるいは切ってしまうと、元の組み紐になってしまうので、このアレキサンダーの主張をもっと直観的に「どんな結び目も、ある所で切って伸ばせば、必ず組み紐が出来る」という言い方をした（第2章図2・14参照）。

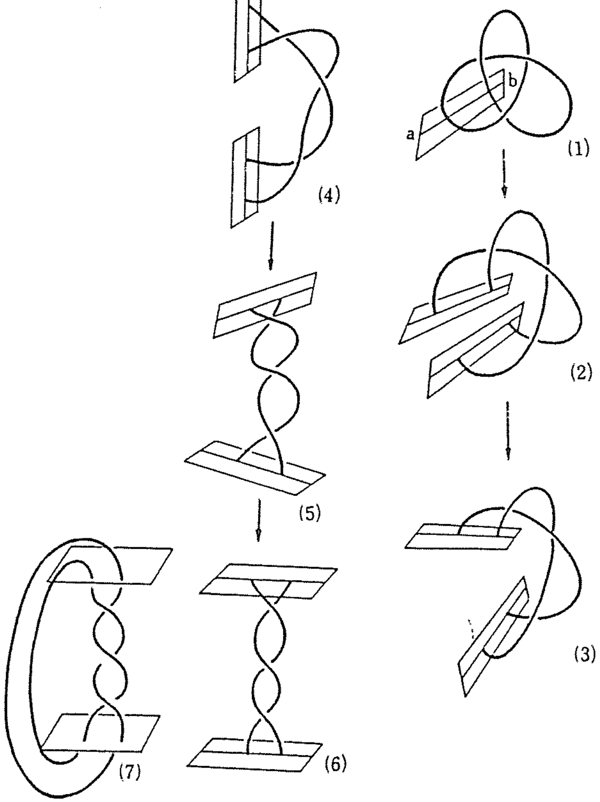


図2・14　結び目から組み紐へ

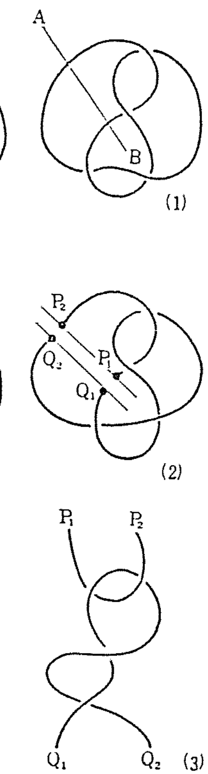


図8・2　組み紐にならない例

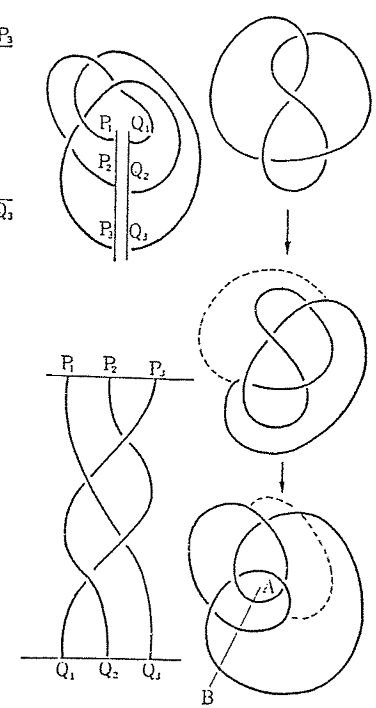


図8・3　結び目から組み紐を作る

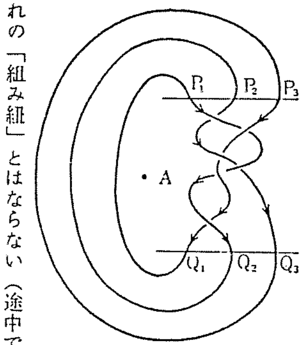


図8・4　結び目を作る

ところが、図8・2の(1)のような結び目は、このままではどこで切っても組み紐は出来ない。たとえば、A、Bで切って伸ばすと（図8・2の(2)）、P_1から出た線分はP_2にもどってしまって、この編み方はわれわれの「組み紐」とはならない（途中で紐が引き上げられている）。しかし、この結び目を少し変形して（図8・3）からA、Bで切ると三次の組み紐が出来る。

したがって、アレキサンダーの主張は「結び目を適当に変形した上で適当な所で切って伸ばせば組み紐になる」ということである。

そこでどういうふうに元の結び目を変形すれば、こういううまい切り方が見つかるかということを知るために組み紐から結び目を作る方法をよく調べてみよう。

組み紐から結び目を作る

組み紐（図8・4）でP_1、P_2、P_3をQ_1、Q_2、Q_3と図のように結ぶと結び目が出来る。この結び目に上から下に向かうように方向をつけておこう。いま一点Aを図8・4のように組み紐の外に選んでおくと、この結び目は点Aの周りにいつも同じ方向（この場合は時計回り）に回っている。したがって、この逆に結び目をいつも定まった一点の周りに時計回り（またはその逆でもよい）に回るように変形しておいた上で切ったらよいだろう。

これを前の図8・3で確かめてみよう。まずどこか一点Aを(どこでもよい)勝手にとる。ただし、Aは紐の上では困る。このAを基点ということにしよう。次に結び目に方向をつけておく。いまこの基点に自分が立っていると考えた時、この結び目が自分に対し、いつも一定の方向に回っているように結び目を変形したらよい。

図8・5の(1)では、aの部分が他の部分と逆に回っているから、この部分を自分の足もとを通して反対側に移す。これが図8・5の(2)、こうすると少なくとも点線の内部では、皆同じ方向に回っている。さて、点線の外ではいま決めた方向と逆に回っているのが二つある。bとcの部分である。まずbを自分の頭上を通して反対側に移し（図8・5の(3)）、最後にcの部分を足もとを通して反対側に動かせば、図8・6の(1)が出来る。これでどの部分も全部一定の方向に回っていることになるから、基点から勝手に直線を引いて、それに沿って結び目を切って伸ばせば、うまく組み紐が出来る（図8・6の(2)）。

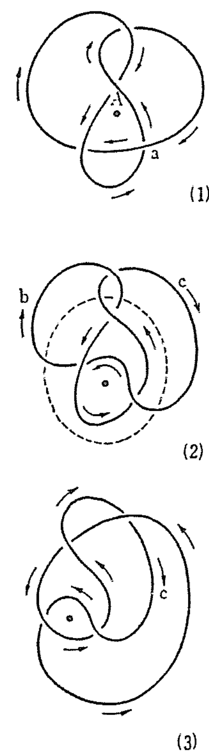


図8・5　結び目から組み紐を作る手順

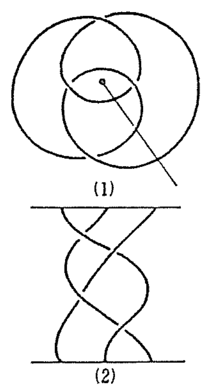
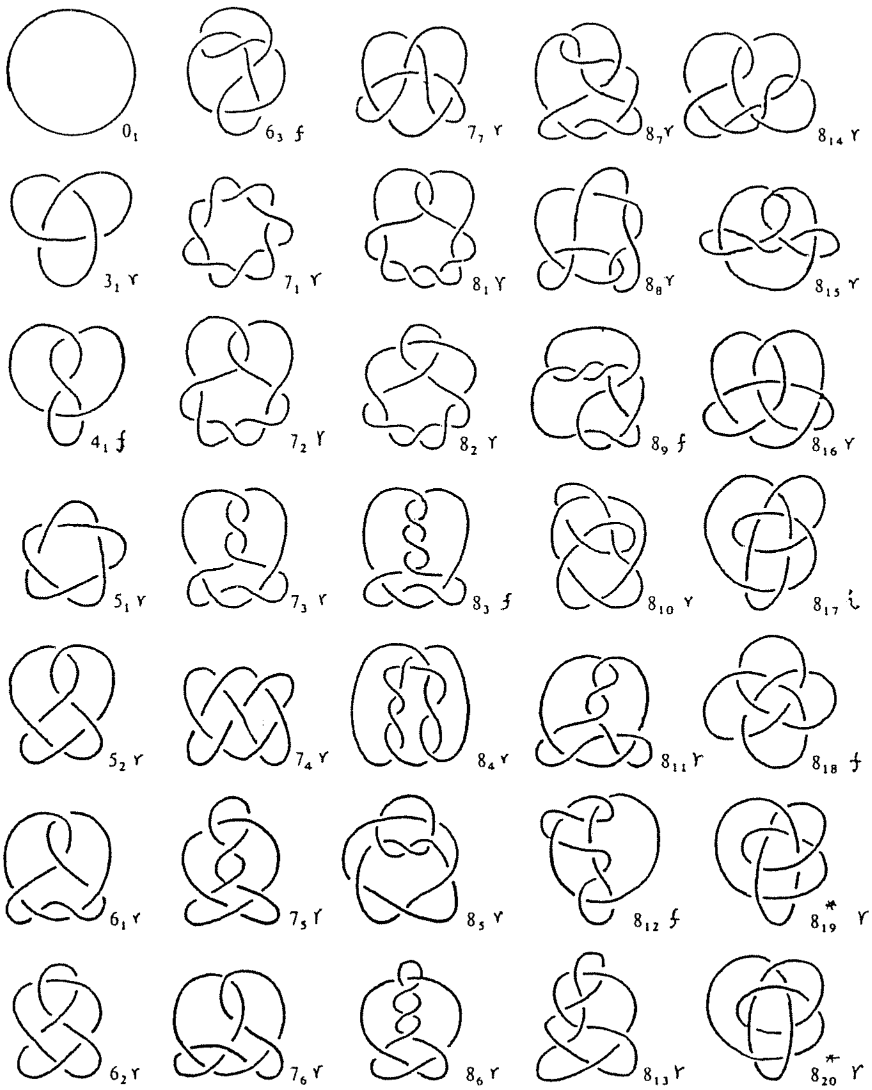


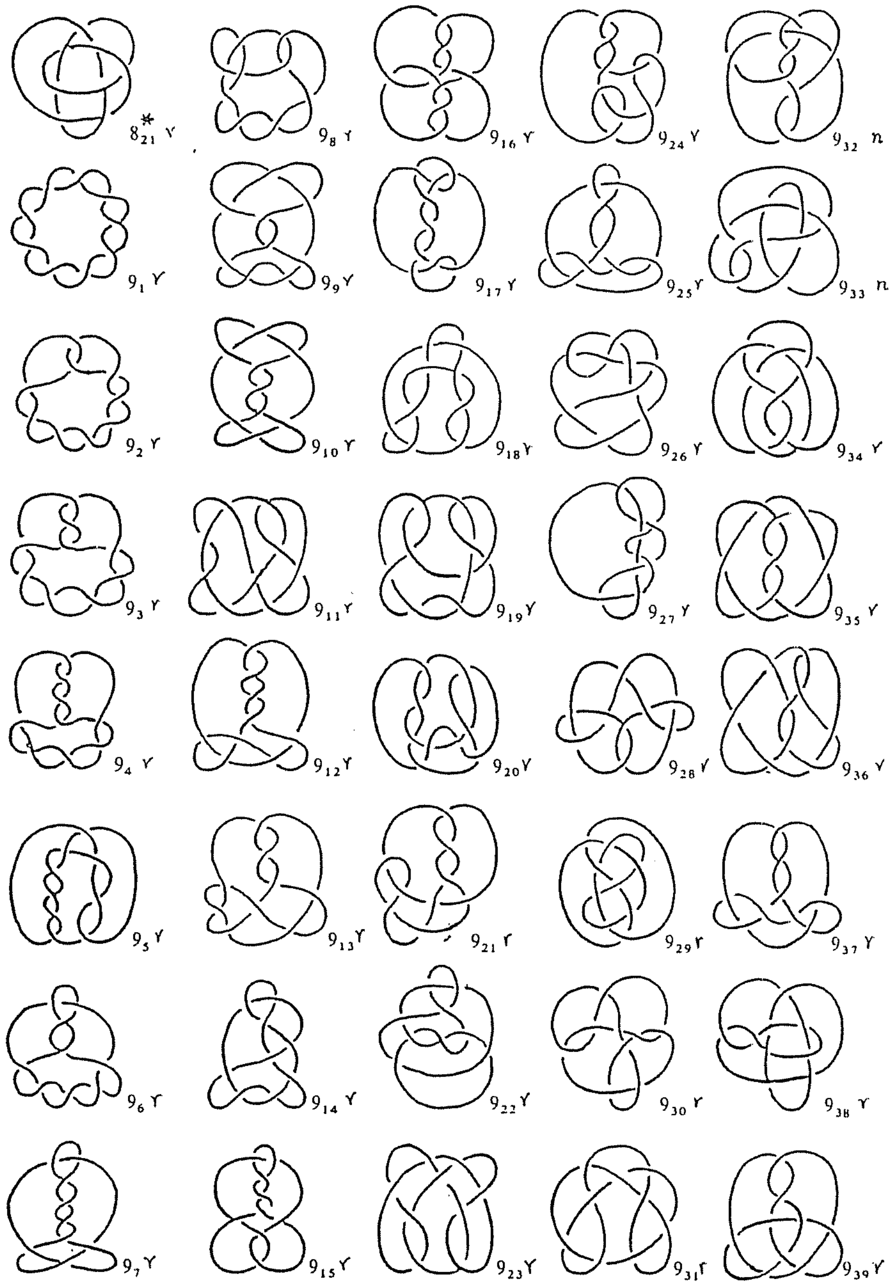
図8・6　出来た組み紐

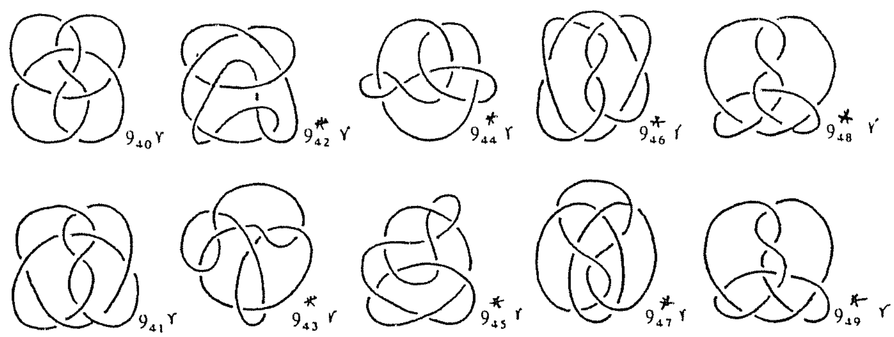
G. Burde & H. Zieschang, "Knots" より

素な結び目の表 (0_1以外)

Appendix D: Knot Projections 0_1–9_{49}




8_{21}^{*} r
9_8 r
9_{16} r
9_{24} r
9_{32} n
9_1 r
9_9 r
9_{17} r
9_{25} r
9_{33} n
9_2 r
9_{10} r
9_{18} r
9_{26} r
9_{34} r
9_3 r
9_{11} r
9_{19} r
9_{27} r
9_{35} r
9_4 r
9_{12} r
9_{20} r
9_{28} r
9_{36} r
9_5 r
9_{13} r
9_{21} r
9_{29} r
9_{37} r
9_6 r
9_{14} r
9_{22} r
9_{30} r
9_{38} r
9_7 r
9_{15} r
9_{23} r
9_{31} r
9_{39} r



* 非交代型

	amphicheiral 両手型	non-amphicheiral 非両手型
invertible 可逆	f	r
non-invertible 非可逆	i	n

可逆：向きを逆にしても同位類が変らないもの（$k \sim -k$）

両手型：鏡像をとっても同位類が変らないもの（$k \sim \bar{k}$）

上記 交叉数9までの結び目射影図式は [Reidemeister 1932] にある.

交叉数10以上については [Conway 1970], [Rolfsen 1976] および [Perko 1979].

Alexander 多項式 その他

Table I

l	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$	T	σ	q	α, β	s
3_1	t^2-t+1		3	2	2,3	3,1	r
4_1	t^2-3t+1		5	0	2	5,2	f
5_1	$t^4-t^3+t^2-t+1$		5	4	2,5	5,1	r
5_2	$2t^2-3t+2$		7	2	2	7,3	r
6_1	$2t^2-5t+2$		9	0	2	9,4	r
6_2	$t^4-3t^3+3t^2-3t+1$		11	2	2	11,4	r
6_3	$t^4-3t^3+5t^2-3t+1$		13	0	2	13,5	f
7_1	$t^6-t^5+t^4-t^3+t^2-t+1$		7	6	2,7	7,1	r
7_2	$3t^2-5t+3$		11	2	2	11,5	r
7_3	$2t^4-3t^3+3t^2-3t+2$		13	4	2	13,4	r
7_4	$4t^2-7t+4$		15	2	2	15,4	r
7_5	$2t^4-4t^3+5t^2-4t+2$		17	4	2	17,7	r
7_6	$t^4-5t^3+7t^2-5t+1$		19	2	2	19,7	r
7_7	$t^4-5t^3+9t^2-5t+1$		21	0	2	21,8	r
8_1	$3t^2-7t+3$		13	0	2	13,6	r
8_2	$t^6-3t^5+3t^4-3t^3+3t^2-3t+1$		17	4	2	17,6	r
8_3	$4t^2-9t+4$		17	0	2	17,4	f
8_4	$2t^4-5t^3+5t^2-5t+2$		19	2	2	19,5	r
8_5	$(t^2-t+1)(-t^4+2t^3-t^2+2t-1)$		21	4	2		r
8_6	$2t^4-6t^3+7t^2-6t+2$		23	2	2	23,10	r
8_7	$t^6-3t^5+5t^4-5t^3+5t^2-3t+1$		23	2	2	23,9	r
8_8	$2t^4-6t^3+9t^2-6t+2$		25	0	2	25,9	r
8_9	$t^6-3t^5+5t^4-7t^3+5t^2-3t+1$		25	0	2	25,7	f
8_{10}	$(t^2-t+1)^3$		27	2			r
8_{11}	$(2t^2-5t+2)(t^2-t+1)$		27	2	2	27,10	r
8_{12}	$t^4-7t^3+13t^2-7t+1$		29	0	2	29,12	f
8_{13}	$2t^4-7t^3+11t^2-7t+2$		29	0	2	29,11	r
8_{14}	$2t^4-8t^3+11t^2-8t+2$		31	2	2	31,12	r
8_{15}	$(t^2-t+1)(3t^2-5t+3)$		33	4	2		r
8_{16}	$t^6-4t^5+8t^4-9t^3+8t^2-4t+1$		35	2			r
8_{17}	$t^6-4t^5+8t^4-11t^3+8t^2-4t+1$		37	0			i
8_{18}	$(t^2-t+1)^2(t^2-3t+1)$,	t^2-t+1	15,3	0	2		f

Table I

t	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$	T	σ	q	α, β	s
$*8_{19}$	$(t^2-t+1)(t^4-t^2+1)$		3	6	2,3		r
8_{20}	$(t^2-t+1)^2$		9	0			r
8_{21}	$(t^2-t+1)(t^2-3t+1)$		15	2	2		r
9_1	$(t^2-t+1)(t^6-t^3+1)$		9	8	2,3,9	9,1	r
9_2	$4t^2-7t+4$		15	2	2	15,7	r
9_3	$2t^6-3t^5+3t^4-3t^3+3t^2-3t+2$		19	6	2	19,6	r
9_4	$3t^4-5t^3+5t^2-5t+3$		21	4	2	21,5	r
9_5	$6t^2-11t+6$		23	2	2	23,6	r
9_6	$(t^2-t+1)(-2t^4+2t^3-t^2+2t-2)$		27	6	2	27,5	r
9_7	$3t^4-7t^3+9t^2-7t+3$		29	4	2	29,13	r
9_8	$2t^4-8t^3+11t^2-8t+2$		31	2	2	31,11	r
9_9	$2t^6-4t^5+6t^4-7t^3+6t^2-4t+2$		31	6	2	31,9	r
9_{10}	$4t^4-8t^3+9t^2-8t+4$		33	4	2	33,10	r
9_{11}	$t^6-5t^5+7t^4-7t^3+7t^2-5t+1$		33	4	2	33,14	r
9_{12}	$(t^2-3t+1)(2t^2-3t+2)$		35	2	2	35,13	r
9_{13}	$4t^4-9t^3+11t^2-9t+4$		37	4	2	37,10	r
9_{14}	$2t^4-9t^3+15t^2-9t+2$		37	0	2	37,14	r
9_{15}	$2t^4-10t^3+15t^2-10t+2$		39	2	2	39,16	r
9_{16}	$(t^2-t+1)(-2t^4+3t^3-3t^2+3t-2)$		39	6	2		r
9_{17}	$t^6-5t^5+9t^4-9t^3+9t^2-5t+1$		39	2	2	39,14	r
9_{18}	$4t^4-10t^3+13t^2-10t+4$		41	4	2	41,17	r
9_{19}	$2t^4-10t^3+17t^2-10t+2$		41	0	2	41,16	r
9_{20}	$t^6-5t^5+9t^4-11t^3+9t^2-5t+1$		41	4	2	41,15	r
9_{21}	$2t^4-11t^3+17t^2-11t+2$		43	2	2	43,18	r
9_{22}	$t^6-5t^5+10t^4-11t^3+10t^2-5t+1$		43	2			r
9_{23}	$(t^2-t+1)(4t^2-7t+4)$		45	4	2	45,19	r
9_{24}	$(t^2-t+1)^2(t^2-3t+1)$		45	0			r
9_{25}	$3t^4-12t^3+17t^2-12t+3$		47	2			r
9_{26}	$t^6-5t^5+11t^4-13t^3+11t^2-5t+1$		47	2	2	47,18	r
9_{27}	$t^6-5t^5+11t^4-15t^3+11t^2-5t+1$		49	0	2	49,19	r
9_{28}	$(t^2-t+1)(-t^4+4t^3-7t^2+4t-1)$		51	2	2		r
9_{29}	$(t^2-t+1)(-t^4+4t^3-7t^2+4t-1)$		51	2			r

Table I

l	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$	T	σ	q	α, β	s
9_{30}	$t^6-5t^5+12t^4-17t^3+12t^2-5t+1$		53	0			r
9_{31}	$t^6-5t^5+13t^4-17t^3+13t^2-5t+1$		55	2	2	55,21	r
9_{32}	$t^6-6t^5+14t^4-17t^3+14t^2-6t+1$		59	2			n
9_{33}	$t^6-6t^5+14t^4-19t^3+14t^2-6t+1$		61	0			n
9_{34}	$t^6-6t^5+16t^4-23t^3+16t^2-6t+1$		69	0			r
9_{35}	$7t^2-13t+7$		9,3	2	3		r
9_{36}	$t^6-5t^5+8t^4-9t^3+8t^2-5t+1$		37	4			r
9_{37}	$(t^2-3t+1)(2t^2-5t+2)$		15,3	0			r
9_{38}	$(t^2-t+1)(5t^2-9t+5)$		57	4			r
9_{39}	$(t^2-3t+1)(3t^2-5t+3)$		55	2			r
9_{40}	$(t^2-t+1)(t^2-3t+1)^2$,	t^2-3t+1	15,5	2	2,3		r
9_{41}	$3t^4-12t^3+19t^2-12t+3$		7,7	0	3		r
$*9_{42}$	$t^4-2t^3+t^2-2t+1$		7	2			r
9_{43}	$t^6-3t^5+2t^4-t^3+2t^2-3t+1$		13	4			r
9_{44}	$t^4-4t^3+7t^2-4t+1$		17	0			r
9_{45}	$t^4-6t^3+9t^2-6t+1$		23	2			r
9_{46}	$2t^2-5t+2$		3,3	0	2		r
9_{47}	$t^6-4t^5+6t^4-5t^3+6t^2-4t+1$		9,3	2	3		r
9_{48}	$t^4-7t^3+11t^2-7t+1$		9,3	2			r
9_{49}	$3t^4-6t^3+7t^2-6t+3$		5,5	4	3		r
10_1	$4t^2-9t+4$		17	0	2	17,8	r
10_2	$t^8-3t^7+3t^6-3t^5+3t^4-3t^3+3t^2-3t+1$		23	6	2	23,8	r
10_3	$6t^2-13t+6$		25	0	2,3?	25,6	r
10_4	$3t^4-7t^3+7t^2-7t+3$		27	2	2,3	27,7	r
10_5	$(t^2-t+1)(t^6-2t^5+2t^4-t^3+2t^2-2t+1)$		33	4	2	33,13	r
10_6	$2t^6-6t^5+7t^4-7t^3+7t^2-6t+2$		37	4	2	37,16	r
10_7	$3t^4-11t^3+15t^2-11t+3$		43	2	2	43,16	r
10_8	$2t^6-5t^5+5t^4-5t^3+5t^2-5t+2$		29	4	2	29,6	r
10_9	$(t^2-t+1)(t^6-2t^5+2t^4-3t^3+2t^2-2t+1)$		39	2	2	39,11	r
10_{10}	$3t^4-11t^3+17t^2-11t+3$		45	0	2,3?	45,17	r
10_{11}	$4t^4-11t^3+13t^2-11t+4$		43	2	2	43,13	r
10_{12}	$2t^6-6t^5+10t^4-11t^3+10t^2-6t+2$		47	2	2	47,17	r