

シューベルト計算入門

阿部 健

1 はじめに

代数幾何の研究対象に「モジュライ」というものがあります。「モジュライ」は、然るべき幾何学的対象をパラメトライズするパラメータ空間のことです。 (x, y) 平面内の円は実数 x_0, y_0 と正の実数 r を用いて

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

と表せますから、円のモジュライは

$$\{(x_0, y_0, r) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0\}$$

となります。

代数幾何では実に様々なモジュライが研究されています。曲線のモジュライ、アーベル多様体のモジュライ、ベクトル束のモジュライなどいろいろです。

『モジュライの存在は分かっても、そこからすぐにモジュライの幾何学的性質は分からない』ことが多く、それで数学者はあの手この手を使ってモジュライの性質を調べようとします。

モジュライの幾何学的性質を調べることによって、モジュライがパラメトライズしている幾何学的対象についての性質が分かることがよくあります。「～を満たす...は何個あるか？」というタイプの問題を数え上げの問題といいます。モジュライ上の交点数の計算方法が分かると数え上げの問題に応用することが出来ることがあります。

この講義では、直線や平面のモジュライであるグラスマン多様体を扱います。グラスマン多様体は最も基本的なモジュライといってもよいでしょう。直線や平面の数え上げの問題が解けるようになることを目標にして、グラスマン多様体上の交点数の計算方法であるシューベルト計算を紹介したいと思います。

2 \mathbb{P}^3 内の 4 本の直線と交わる直線の数は何本？

シューベルト計算の入り口として、この章では、「 \mathbb{P}^3 内の 4 本の直線と交わる直線の数は何本？」という問題を考えてみる。まずは、「 \mathbb{P}^3 」や「直線」といった基本的な言葉の定義から始めよう。

2.1 複素射影空間

複素数全体のなす集合を \mathbb{C} で表す. V を $n+1$ 次元複素ベクトル空間とする. V の 1 次元複素部分ベクトル空間全体のなす集合を $\mathbb{P}(V)$ または \mathbb{P}^n と書いて, n 次元複素射影空間という. V の基底を選べば $V = \mathbb{C}^{n+1}$ と同一視出来るから, \mathbb{P}^n は, $n+1$ 個の複素数の比 $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ 全体, とも思える.

$$\mathbb{P}^n = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mid (z_0, z_1, \dots, z_n) \neq (0, \dots, 0)\}.$$

集合として

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C}^0$$

となっている. すなわち, \mathbb{P}^n は \mathbb{C}^n をコンパクト化したものである.

\mathbb{P}^n の部分集合 X が, 斉次多項式 $f_1(z_0, \dots, z_n), \dots, f_m(z_0, \dots, z_n)$ の共通零点であるとき

$$X = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_k(z_0, \dots, z_n) = 0, 1 \leq k \leq m\},$$

X を射影多様体(または \mathbb{P}^n の部分射影多様体) という.

例 2.1. m 個の斉次 1 次式 $f_k(\mathbf{z}) = a_{k0}z_0 + \dots + a_{kn}z_n$ ($1 \leq k \leq m$) に対し, 行列

$$\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

の階数が m のとき, $f_1(\mathbf{z}), \dots, f_m(\mathbf{z})$ は一次独立であるという.

\mathbb{P}^n の部分射影多様体 X が $n-l$ 個の一次独立な斉次 1 次式 $f_1(\mathbf{z}), \dots, f_{n-l}(\mathbf{z})$ の共通零点のとき, X は l 次元平面であるという. 1 次元平面のことを直線という.

例 2.2. \mathbb{P}^n の部分射影多様体 X が唯一つの d 次斉次多項式 $f(\mathbf{z})$ の零点のとき, X は d 次超曲面であるという.

練習問題 2.3. $\mathbb{P}(V)$ の l 次元平面全体の集合と V の $l+1$ 次元部分ベクトル空間全体の集合の間には, 自然な一対一対応があることを示せ.

練習問題 2.4. 一般の位置にある \mathbb{P}^n の d 次超曲面と直線は d 個の点で交わることを示せ.

2.2 \mathbb{P}^3 内の 4 本直線問題

さて, 前節で言葉を定義したので, 「 \mathbb{P}^3 内の 4 本の直線と交わる直線の数は何本?」という問題の意味は大体分かるようになった.

しかしもう少し正確に,

問題 2.5. \mathbb{P}^3 内の 一般の位置にある 4 本の直線 l_1, l_2, l_3, l_4 全てと交わる直線は何本あるか?

と言ったほうが良い.

というのも, 極端な話, 4 本の直線 l_1, l_2, l_3, l_4 がある点 P を共有していたら, P を通る直線は l_1, l_2, l_3, l_4 全てと交わるわけだから, 「 l_1, l_2, l_3, l_4 全てと交わる直線は無数本ある」ことになってしまい, これは具合が悪い. この様な不都合を避けるために, 上で, 4 直線は「一般の位置にある」という仮定をつけたのである.

注 2.6. 上の問題を, 実射影空間ではなくて何故わざわざ複素射影空間で考えるのだろうか, と疑問に思うかもしれない. これは, 複素射影空間で考えた方が問題として易しいからである. 練習問題 2.4 で d 次超曲面と直線の交点が d 個と分かるのは, 複素数体が代数閉体であるからである. 実数で議論すると, 解を持つとき持たないときの場合分けが生じ煩雑になる.

練習問題 2.7. ¹実 3 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ (斉次座標を $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ とする) 内の 4 直線 l_1, l_2, l_3, l_4 を,

$$l_1 : (x_0 = x_3 = 0)$$

$$l_2 : (x_1 = x_2 = 0)$$

$$l_3 : (x_0 - x_2 = x_1 - x_3 = 0)$$

$$l_4 : (x_0 - x_1 = x_2 + x_3 = 0)$$

で定める. これら全てと交わる $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ 内の直線は何本あるか?

3 グラスマン多様体

前章で「 \mathbb{P}^3 内の一般の位置にある 4 本の直線 l_1, l_2, l_3, l_4 全てと交わる直線は何本あるか?」という問題を提起した. \mathbb{P}^3 内の直線を例えばパラメータ表示で表して, それが各々の直線 l_i と交わる条件を書き下すことによって, 求めたい直線の本数を得ることが出来るであろう.

この考え方は次のように言い直すことができる. まず \mathbb{P}^3 内の直線の全体の集合を考える. それを $G(2, 4)$ と書こう. 直線 l_i と交わる直線全体のなす $G(2, 4)$ の部分集合を X_i と書く. 4 本全ての直線と交わる直線の集合はすなわち, $\cap_{i=1}^4 X_i$ であるから, $\cap_{i=1}^4 X_i$ が何点から成るのかを求めればよい.

ここで出てきた $G(2, 4)$ がグラスマン多様体である.

¹[Kleiman] から引用.

3.1 グラスマン多様体の定義

以下ベクトル空間や射影空間などは全て複素数上で考えるものとする. V を n 次元ベクトル空間とする.

グラスマン多様体 $G(k, V)$ とは, V の k 次元部分ベクトル空間全体の集合のこと. V を明示する必要がない時はしばしば $G(k, n)$ と書く.

例 3.1. $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$.

基底を選んで $V = \mathbb{C}^n$ (横ベクトル) と同一視しよう. V の k 次元部分ベクトル空間 W が与えられたとき, W の基底を並べることにより階数 k の $k \times n$ 行列

$$M(W) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

を得る. 行列 $M(W)$ は W の基底の選び方によるので, W によって一意的に定まるのではなく, 左から $k \times k$ 正則行列を掛ける分だけ不定性がある. 集合として

$$G(k, n) = GL_k \setminus \{ \text{階数 } k \text{ の } k \times n \text{ 行列} \}$$

と分かる.

$M(W)$ の i_1, \dots, i_k 列目から成る $k \times k$ 行列を $M(W)_{i_1 \dots i_k}$ と書く. $G(k, n)$ の部分集合 $X_{i_1 \dots i_k}$ を

$$G(k, n) \supset X_{i_1 \dots i_k} := \{ [W] \in G(k, n) \mid \det M(W)_{i_1 \dots i_k} \neq 0 \}$$

で定める. このとき

$$X_{i_1 \dots i_k} \simeq \mathbb{C}^{k(n-k)}$$

となる. 実際, 例えば $(i_1, \dots, i_k) = (1, \dots, k)$ とすると, $X_{1 \dots k}$ の元と行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

は一対一対応する.

よって, グラスマン多様体 $G(k, n)$ は $k(n-k)$ 次元複素多様体である.

3.2 プリュッカー埋め込み

グラスマン多様体 $G(k, n)$ は射影空間に埋め込まれることを見てみよう.

$G(k, V)$ から $\mathbb{P}(\wedge^k V)$ への写像 p を $[W \subset V] \mapsto [\wedge^k W \subset \wedge^k V]$ で定める. p はプリュッカー写像と呼ばれる.

$V = \mathbb{C}^n$ のときは斉次座標を用いて

$$G(k, n) \ni [W] \mapsto (\det M(W)_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \in \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

と書ける.

プリュッカー写像は単射であることが分かるので, プリュッカー埋め込みとも呼ばれる. プリュッカー埋め込みにより, グラスマン多様体 $G(k, n)$ は射影空間 $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ の部分射影多様体になる.

練習問題 3.2. プリュッカー写像が単射であることをチェックせよ.

例 3.3. $(k, n) = (2, 4)$ の場合を考えてみよう.

\mathbb{P}^5 の斉次座標を $[z_{12} : z_{13} : z_{14} : z_{23} : z_{24} : z_{34}]$ とする. プリュッカー写像 $p: G(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^5$ は,

$$M(W) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

のとき,

$$[W] \mapsto \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{12} \\ \hline a_{11} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{12} & a_{14} & a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{11} \\ \hline a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{11} & a_{12} \end{array} \right]$$

となる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

であるから, $p(G(2, 4)) \subset \mathbb{P}^5$ は, $z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23} = 0$ で定義される \mathbb{P}^5 の 2 次超曲面に含まれることが分かる.

命題 3.4. $p(G(2, 4)) \subset \mathbb{P}^5$ は, $z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23} = 0$ で定義される \mathbb{P}^5 の 2 次超曲面に一致する.

練習問題 3.5. 等式 (2) をチェックせよ.

練習問題 3.6. 命題 3.4 を証明せよ.

3.3 「 \mathbb{P}^3 内の 4 本直線問題」の解法その 1

V を 4 次元ベクトル空間とする. $p(G(2, V)) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ が 2 次超曲面であることを用いて, 問題 2.5 を解いてみよう.

$L \subset V$ を 2 次元複素部分ベクトル空間とする. $\wedge^2 L$ と外積をとる線形射

$$\wedge^2 V \rightarrow \wedge^4 V \simeq \mathbb{C}$$

の核を H_L と置く .

$G(2, V) \ni [W]$ に対し ,

$$\begin{aligned} p([W]) \text{ が超平面 } \mathbb{P}(H_L) \text{ に含まれる} &\Leftrightarrow (\wedge^2 W) \wedge (\wedge^2 L) = 0 \text{ in } \wedge^4 V \\ &\Leftrightarrow W \cap L \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(V) \text{ 内の 2 直線 } \mathbb{P}(W), \mathbb{P}(L) \text{ は交わる .} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(V)$ 内の 4 直線 $l_j = \mathbb{P}(L_j)$ ($1 \leq j \leq 4$) をとる . 上より , 直線 $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ が 4 直線と交わることは , $p([W])$ が $\cap_{j=1}^4 \mathbb{P}(H_{L_j}) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ に含まれることと同値である . よって ,

$$p(G(2, V)) \cap \bigcap_{j=1}^4 \mathbb{P}(H_{L_j}) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V) \quad (3)$$

が何点からなるかを求めればよい . 4 直線を一般に取っておけば , $\cap_{j=1}^4 \mathbb{P}(H_{L_j})$ は直線になる . 一方 $p(G(2, V)) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ は 2 次超曲面であったから , 集合 (3) は 2 点と分かる .

4 問題 2.5 の一般化

4.1 「 \mathbb{P}^3 内の 4 本直線問題」を一般化する

問題 2.5 の次のような一般化を考えよう .

問題 4.1. \mathbb{P}^{n-1} 内に $e^{(1)}$ 次元平面 , $e^{(2)}$ 次元平面 , \dots , $e^{(m)}$ 次元平面が一般の位置に配置されているとき , これら全てと交わる $(k-1)$ 次元平面の数はいくつ?

これは次のように , グラスマン多様体 $G(k, n)$ 上で部分多様体の交点数を求める問題と理解される .

$\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(V)$ (V は n 次元ベクトル空間) , $e^{(j)}$ 次元平面は $\mathbb{P}(W^{(j)})$ ($W^{(j)}$ は V の $e^{(j)} + 1$ 次元部分ベクトル空間) とする . 更に ,

$$G(k, V) \supset X^{(j)} := \{ [U] \in G(k, V) \mid U \cap W^{(j)} \neq \{0\} \}$$

と置く . すると問題 4.1 は , $\cap_{j=1}^m X^{(j)}$ は何点集合であるか , という問題になる .

この $X^{(j)}$ はグラスマン多様体 $G(k, V)$ のシューベルト多様体の特別な場合である .

4.2 シューベルト多様体

一般のシューベルト多様体を定義しよう. n 次元ベクトル空間 V の部分ベクトル空間による列

$$V_\bullet : V = V_n \supset V_{n-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 = \{0\} \quad (4)$$

(但し $\dim V_i = i$) を固定する. このような列を V のフィルトレーションという.

整数列 (a_1, \dots, a_k) が $n - k \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$ を満たすとき, グラスマン多様体 $G(k, V)$ の部分多様体 $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ を

$$\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet) := \{[U] \in G(k, V) \mid \dim(U \cap V_{n-k-a_i+i}) \geq i \text{ for } 1 \leq i \leq k\} \quad (5)$$

で定める. これをシューベルト多様体と言う.

例 4.2. $\Omega_{0, \dots, 0} = G(k, n) \cdot \Omega_{n-k, \dots, n-k} = \{[V_k]\}$.

例 4.3. $k = 2$ とすると, $G(2, V)$ は $(n-1)$ 次元射影空間 $\mathbb{P}(V)$ の直線をパラメトライズする.

$\Omega_{n-2, n-5}(V_\bullet)$ は, 点 $\mathbb{P}(V_1)$ を通り 4次元平面 $\mathbb{P}(V_5)$ に含まれる直線から成る.

$\Omega_{n-3, n-4}(V_\bullet)$ は, 直線 $\mathbb{P}(V_2)$ と交わり 3次元平面 $\mathbb{P}(V_4)$ に含まれる直線から成る.

練習問題 4.4. $W^{(j)}$ を前節に出て来た V の $(e^{(j)} + 1)$ 次元部分ベクトル空間とする. フィルトレーション V_\bullet が $V_{e^{(j)}+1} = W^{(j)}$ を満たすとする. このとき

$$X^{(j)} = \Omega_{n-k-e^{(j)}, 0, \dots, 0}(V_\bullet)$$

を示せ.

問題 4.1 は, V のフィルトレーション $V_\bullet^{(1)}, \dots, V_\bullet^{(m)}$ が一般に与えられている時,

$$\bigcap_{j=1}^m \Omega_{n-k-e^{(j)}, 0, \dots, 0}(V_\bullet^{(j)})$$

は何点集合か? と言い換えられる. この様に定式化すると, もう一段階一般化して次の問題を考えるのが自然であろう.

問題 4.5. V のフィルトレーション $V_\bullet^{(1)}, \dots, V_\bullet^{(m)}$ が一般に与えられている時,

$$\bigcap_{j=1}^m \Omega_{\vec{a}^{(j)}}(V_\bullet^{(j)}) \quad (6)$$

は何点集合か? 但し, $\vec{a}^{(j)}$ は整数列 $(a_1^{(j)}, \dots, a_k^{(j)})$ で $n - k \geq a_1^{(j)} \geq \cdots \geq a_k^{(j)} \geq 0$ を満たすものとする.

以後, 数列 $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k)$ に対して, $\sum_{i=1}^k a_i$ を $|\vec{a}|$ と書く.

4.3 交点数についてひと言

N 次元複素多様体 X とその部分多様体 Y_1, \dots, Y_m が与えられていて, それらの余次元が c_1, \dots, c_m とする. Y_1, \dots, Y_m が横断的に交わるなら

$$Y_1 \cap \dots \cap Y_m$$

は X の余次元 $\sum_{j=1}^m c_j$ の部分多様体になる. 特に $N = \sum_{j=1}^m c_j$ の時, $Y_1 \cap \dots \cap Y_m$ は零次元, 即ち有限個の点からなる.

事実 4.6. グラスマン多様体 $G(k, V)$ の部分多様体 Y_1, \dots, Y_m に対して, $g_1, \dots, g_m \in GL(V)$ を一般に選べば, $g_1 Y_1, \dots, g_m Y_m$ は横断的に交わる.

そこで $\dim G(k, V) = \sum_{j=1}^m \operatorname{codim} Y_j$ が満たされる時, Y_1, \dots, Y_m の交点数 $(Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_m)_{G(k, V)}$ を $|g_1 Y_1 \cap \dots \cap g_m Y_m|$ で定める.

問題 4.5 が意味を持つのは, (6) が 0 次元になっている時である. その条件を求めるために, シューベルト多様体 $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ の次元を計算してみよう.

$V = \mathbb{C}^n$ (座標を (x_1, \dots, x_n)) として, $V_i = (x_l = 0; l > i)$ とする. 一般の元 $[W] \in \Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ に対して $M(W)$ は,

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$n-k-a_1+1$ 列 $n-k-a_2+2$ 列

となるので, $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ はグラスマン多様体 $G(k, V)$ の $k(n-k) - \sum_{i=1}^k a_i$ 次元部分多様体である. グラスマン多様体 $G(k, V)$ の次元は $k(n-k)$ であったから, $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ は余次元 $\sum_{i=1}^k a_i$ である.

以後問題 4.5 を考える際, (6) が 0 次元になる条件

$$k(n-k) = \sum_{j=1}^m |\vec{a}^{(j)}| \quad (7)$$

を仮定する.

5 シューベルト計算

交点数 $(\Omega_{\vec{a}^{(1)}}(V_\bullet^{(1)}) \cdots \Omega_{\vec{a}^{(m)}}(V_\bullet^{(m)}))_{G(k, n)}$ を求める計算のことをシューベルト計算と呼ぶ.

V の任意のフィルトレーション V_\bullet, V'_\bullet は $GL(V)$ の作用で移りあうから, 交点数の議論においては, $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V_\bullet)$ と $\Omega_{a_1, \dots, a_k}(V'_\bullet)$ を区別する必要がない. 以後フィルトレーションを省略して単に Ω_{a_1, \dots, a_k} と書く.

5.1 グラスマン多様体上の交点数に関する事実

命題 5.1. $\vec{a} = (n - k \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0)$ と $\vec{b} = (n - k \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0)$ が $|\vec{a}| + |\vec{b}| = k(n - k)$ を満たすとする.

$1 \leq \forall i \leq k$ に対して $a_i + b_{k+1-i} = n - k$ の時 $\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} = 1$ で, それ以外のとき $\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} = 0$.

$\vec{a} = (n - k \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0)$ に対して, $a_i + b_{k+1-i} = n - k$ で定まる k 項数列 $\vec{b} = (n - k \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0)$ を \vec{a}^c と書く.

記号 5.2. $Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_l$ をグラスマン多様体 $G(k, n)$ の部分多様体で $\sum_{j=1}^m \text{codim} Y_j = \sum_{j=1}^l \text{codim} Z_j (=: d)$ を満たすものとする. $G(k, n)$ の任意の d 次元部分多様体 S に対して

$$(Y_1 \cdots Y_m \cdot S)_{G(k, n)} = (Z_1 \cdots Z_l \cdot S)_{G(k, n)}$$

が成り立つ時,

$$Y_1 \cdots Y_m \approx Z_1 \cdots Z_l$$

と書く.

事実 5.3. Y をグラスマン多様体 $G(k, n)$ の d 次元部分多様体とする. このとき,

$$Y \approx \sum_{\vec{a}} r_{\vec{a}} \Omega_{\vec{a}} \quad (8)$$

となる整数 $r_{\vec{a}}$ が一意的に存在する. 但し, \vec{a} は $|\vec{a}| = d$ を満たす整数列 $(n - k \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0)$ を動く.

練習問題 5.4. 上で, $r_{\vec{a}} = (Y \cdot \Omega_{\vec{a}^c})_{G(k, n)}$ であることを示せ.

例 5.5. $\mathbb{P}^{n-1} \supset Q$ を非特異 2 次超曲面とする. グラスマン多様体 $G(2, n)$ の部分多様体 $\tau(Q)$ を

$$G(2, n) \supset \tau(Q) := \{[U] \in G(2, n) \mid \text{直線 } \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^{n-1} \text{ は } Q \text{ に含まれる.}\}$$

で定める. $\tau(Q)$ は $G(2, n)$ の中で余次元 3 となる. 事実 5.3 より, 整数 α, β が存在して

$$\tau(Q) \approx \alpha \Omega_{3,0} + \beta \Omega_{2,1} \quad (9)$$

となる. α, β を求めてみよう.

$$\alpha = (\tau(Q) \cdot \Omega_{n-2, n-5})_{G(2, n)} = \#(\tau(Q) \cap \Omega_{n-2, n-5}(V_\bullet))$$

であった. 例 4.3 より, $\Omega_{n-2, n-5}(V_\bullet)$ は点 $\mathbb{P}(V_1)$ を通り 4 次元平面 $\mathbb{P}(V_5)$ に含まれる \mathbb{P}^{n-1} 内の直線をパラメライズしていた. 点 $\mathbb{P}(V_1)$ を Q の外に取れば $\tau(Q) \cap \Omega_{n-2, n-5}(V_\bullet)$ は空集合. よって $\alpha = 0$.

同様に β は, Q に含まれ直線 $\mathbb{P}(V_2)$ と交わり 3次元平面 $\mathbb{P}(V_4)$ に含まれる \mathbb{P}^{n-1} 内の直線の数, と分かる. 3次元射影空間 $\mathbb{P}(V_4)$ 内の 2次超曲面 $Q' := \mathbb{P}(V_4) \cap Q$ と直線 $\mathbb{P}(V_2)$ の交点を p_1, p_2 とする. Q' に含まれる直線で p_i を通るものは 2本ある. よって $\beta = 4$. 以上より

$$\tau(Q) \approx 4\Omega_{2,1}. \quad (10)$$

5.2 ピエリの公式

$\Omega_{\vec{a}}, \Omega_{\vec{b}}$ を $G(k, n)$ のシューベルト多様体とする. 事実 5.3 より

$$\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \approx \sum_{|\vec{d}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|} r_{\vec{d}} \Omega_{\vec{d}} \quad (11)$$

である. 練習問題 5.4 より $r_{\vec{d}} = (\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \cdot \Omega_{\vec{d}^c})_{G(k,n)}$.

補題 5.6. \vec{b}, \vec{c} を k 項整数列とする. $b_i + c_{k-i+1} > n - k$ なら $\Omega_{\vec{b}} \cdot \Omega_{\vec{c}} \approx 0$.

Proof. V のフィルトレーション V', V'' を一般にとる. $\Omega_{\vec{b}}(V') \cap \Omega_{\vec{c}}(V'') = \emptyset$ を示そう. $[U] \in \Omega_{\vec{b}}(V') \cap \Omega_{\vec{c}}(V'')$ とすると

$$\begin{aligned} \dim U \cap V'_{n-k-b_i+i} &\geq i \\ \dim U \cap V''_{n-k-c_{k-i+1}+(k-i+1)} &\geq k-i+1. \end{aligned}$$

よって

$$U \cap V'_{n-k-b_i+i} \cap V''_{n-k-c_{k-i+1}+(k-i+1)} \neq \emptyset. \quad (12)$$

一方, V', V'' は一般なので

$$\dim V'_{n-k-b_i+i} \cap V''_{n-k-c_{k-i+1}+(k-i+1)} = n - k + 1 - b_i - c_{k-i+1}. \quad (13)$$

今 $b_i + c_{k-i+1} > n - k$ と仮定しているので (12) に矛盾. \square

系 5.7. (11) で, ある i に対して $a_i > d_i$ または $b_i > d_i$ なら $r_{\vec{d}} = 0$.

Proof. $b_i > d_i$ とする. $\vec{c} := \vec{d}^c$ と置く.

$$b_i + c_{k+1-i} = b_i + (n - k - d_i) > n - k.$$

\square

\vec{a} が $(a, 0, \dots, 0)$ という形のときは, 次のピエリの公式により $r_{\vec{d}}$ を完全に決定できる.

定理 5.8 (ピエリの公式). $\vec{a} = (a, 0, \dots, 0)$, $\vec{b} = (n - k \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0)$ に対し

$$\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \approx \sum_{\vec{d}} \Omega_{\vec{d}}.$$

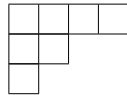
但し, $\vec{d} = (d_1, \dots, d_k)$ は, $|\vec{d}| = |\vec{b}| + a$ で

$$0 \leq b_k \leq d_k \leq b_{k-1} \leq d_{k-1} \leq \dots \leq d_2 \leq b_1 \leq d_1 \leq n - k$$

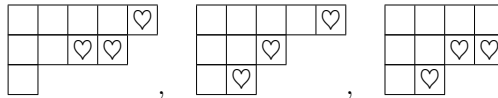
を満たす k 項整数列を走る.

これはヤング図形で書くと理解しやすい. \vec{b} に a 個の箱を, 「同じ列には高々1つ」というルールに従って加えて出来るものたちが \vec{d} である.

例 5.9. $(k, n) = (3, 8)$ とする. $\vec{b} = (4, 2, 1)$ のヤング図形表示は



$\vec{a} = (3, 0, 0)$ のとき, \vec{d} として現れるのは



である. よって

$$\Omega_{3,0,0} \cdot \Omega_{4,2,1} \approx \Omega_{5,4,1} + \Omega_{5,3,2} + \Omega_{4,4,2}.$$

5.3 「 \mathbb{P}^3 内の 4 本直線問題」の解法その 2

問題 2.5 はピエリの公式を用いても解ける.

\mathbb{P}^3 内の一般の位置にある 4 直線全々と交わる直線の本数は交点数 $(\Omega_{1,0}^4)_{G(2,4)}$ で与えられる.

$$\begin{aligned} \Omega_{1,0} \cdot \Omega_{1,0} &\approx \Omega_{2,0} + \Omega_{1,1}, \\ (\Omega_{2,0} + \Omega_{1,1}) \cdot \Omega_{1,0} &\approx \Omega_{2,1} + \Omega_{2,1}, \\ 2\Omega_{2,1} \cdot \Omega_{1,0} &\approx 2\Omega_{2,2}. \end{aligned}$$

よって

$$\Omega_{1,0}^4 \approx 2\Omega_{2,2}.$$

$\Omega_{2,2}$ の係数が求めるものであるから, 答えは 2 本.

ピエリの公式を使えば, 問題 4.1 は原理的に解ける.

練習問題 5.10. 平面は一般の位置に配置されているとする.

- (1) \mathbb{P}^4 内の 3 つの直線全てと交わる直線は何本?
- (2) \mathbb{P}^4 内の 1 つの直線, 4 つの 2 次元平面全てと交わる直線は何本?
- (3) \mathbb{P}^4 内の 6 つの 2 次元平面全てと交わる直線は何本?
- (4) \mathbb{P}^4 内の 6 つの直線全てと交わる 2 次元平面は何枚?
- (5) \mathbb{P}^5 内の 2 つの 2 次元平面, 4 つの 3 次元平面全てと交わる直線は何本?
- (6) \mathbb{P}^5 内の 3 つの直線, 3 つの 2 次元平面全てと交わる 2 次元平面は何枚?

ピエリの公式の「双対版」を考えてみよう. V の k 次元部分ベクトル空間 U に対し

$$V^* \supset U^\perp := \{f \in V^* \mid f|_U \equiv 0\}$$

と置く. U^\perp は V^* の $(n-k)$ 次元部分ベクトル空間になる. これにより, グラスマン多様体の同型

$$G(k, V) \simeq G(n-k, V^*)$$

が出来る. V のフィルトレーション V_\bullet に対して V^* のフィルトレーション $(V^*)_\bullet$ を $(V^*)_i = V_{n-i}^\perp$ で定める. 上の同型で, $G(k, V)$ のシューベルト多様体 $\Omega_{\vec{a}}(V_\bullet)$ は $G(n-k, V^*)$ のシューベルト多様体 $\Omega_{\vec{a}^*}(V^*_\bullet)$ に写る. ここで $\vec{a}^* = (a_1^*, \dots, a_{n-k}^*)$ は \vec{a} をヤング図形と思って対角線に関して行と列をひ

くり返したものである. 例えば, $\vec{a} = (3, 1) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$ なら $\vec{a}^* = (2, 1, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$.

この対応を用いればピエリの公式は次のようにも表せる.

定理 5.11. k 項数列 $\vec{a} = (\overbrace{1, \dots, 1}^{a \text{ 個}}, 0, \dots, 0)$, $\vec{b} = (n-k \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0)$ をとる. $G(k, V)$ 内のシューベルト多様体に関して

$$\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \approx \sum_{\vec{d}} \Omega_{\vec{d}}$$

が成立する. 但し \vec{d} は「同じ行には高々1つ」というルールに従って \vec{b} に a 個の箱を加えて出来るヤング図形を走る.

例 5.12. $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1)$ のとき

$$\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \approx \begin{cases} 0 & b_1 = n-k \text{ のとき} \\ \Omega_{b_1+1, b_2+1, \dots, b_k+1} & b_1 < n-k \text{ のとき.} \end{cases}$$

これをチェックしてみよう.

$b_1 = n-k$ の場合は補題 5.6 より OK. $b_1 < n-k$ とする. H を V の $(n-1)$ 次元部分ベクトル空間とすると

$$\Omega_{\vec{a}} = \{[U] \in G(k, V) \mid U \subset H\}.$$

一般なフィルトレーション

$$V_\bullet : V = V_n \supset V_{n-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

をとる. $\dim H \cap V_i = i - 1$ となる. V のフィルトレーション V'_\bullet を

$$V'_\bullet : V \supset H \supset H \cap V_{n-1} \supset \cdots \supset H \cap V_2 \supset H \cap V_1 = 0$$

で定める. すると

$$\Omega_{\vec{a}} \cap \Omega_{\vec{b}}(V_\bullet) = \Omega_{b_1+1, \dots, b_k+1}(V'_\bullet)$$

となる.

5.4 ジアンベリの公式

\vec{a} が $(a, 0, \dots, 0)$ という形するとき, シューベルト多様体は special であると言う.

ピエリの公式は, 二つのシューベルト多様体の交差 $\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}}$ の計算方法を, 一方が special な場合に与えてくれる.

問題 4.1 を解くにはピエリの公式だけで十分であるが, 問題 4.5 では一般のシューベルト多様体の交差 $\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}}$ の計算が必要になる.

ジアンベリの公式を使えば, 一般の交差 $\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}}$ を special な場合に帰着することが出来る.

$\Omega_{a, 0, \dots, 0}$ を Ω_a と略記する.

定理 5.13 (ジアンベリの公式). 次が成り立つ.

$$\Omega_{a_1, \dots, a_k} \approx \begin{vmatrix} \Omega_{a_1} & \Omega_{a_1+1} & \Omega_{a_1+2} & \cdots & \Omega_{a_1+k-1} \\ \Omega_{a_2-1} & \Omega_{a_2} & \Omega_{a_2+1} & \cdots & \Omega_{a_2+k-2} \\ \Omega_{a_3-2} & \Omega_{a_3-1} & \Omega_{a_3} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \Omega_{a_k-k+1} & \cdots & \cdots & & \Omega_{a_k} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

例 5.14.

$$\begin{aligned} \Omega_{4,2,1} &\approx \begin{vmatrix} \Omega_4 & \Omega_5 & \Omega_6 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & \Omega_0 & \Omega_1 \end{vmatrix} \\ &= \Omega_4 \Omega_2 \Omega_1 + \Omega_6 \Omega_1 - \Omega_5 \Omega_1 \Omega_1 - \Omega_4 \Omega_3 \end{aligned}$$

練習問題 5.15. \mathbb{P}^7 内の非特異 2 次超曲面 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 を一般にとる. それらの交わり $X := Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4$ は非特異 3 次元射影多様体である (X の標準束は自明であることが分かり, X はカラビ・ヤウ多様体と呼ばれるものになっている.) X に含まれる直線の数 512 であることを示せ.

6 ピエリの公式とジアンベリの公式の証明

6.1 ピエリ \Rightarrow ジアンベリ

ジアンベリの公式は次の補題を使えば数学的帰納法ですぐ出る.

補題 6.1.

$$(-1)^k \Omega_{a_1, \dots, a_k} \approx \sum_{i=1}^k (-1)^i \Omega_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}-1, \dots, a_k-1} \cdot \Omega_{a_i+k-i}. \quad (15)$$

(15) の右辺に出てくる積は片方が special なシューベルト多様体なので, ピエリの公式を使って計算できる. 実際計算するとほとんどの項はキャンセルして上の左辺の項だけ生き残る.

練習問題 6.2. ピエリの公式を使って

$$\Omega_{4,2} \approx -\Omega_1 \cdot \Omega_5 + \Omega_4 \cdot \Omega_2$$

を確かめよ.

6.2 ピエリの公式の証明

補題 6.3. $a_k = 0, b_i + c_{k-i+1} = n - k$ のとき

$$\begin{aligned} & (\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \cdot \Omega_{\vec{c}})_{G(k,n)} \\ &= (\Omega_{a_1, \dots, a_{k-1}} \cdot \Omega_{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_k} \cdot \Omega_{c_1, \dots, c_{k-i}, c_{k-i+2}, \dots, c_k})_{G(k-1, n-1)}. \end{aligned}$$

Proof. V のフィルトレーション $V_\bullet, V'_\bullet, V''_\bullet$ をとる. (13) より

$$L := V'_{n-k-b_i+i} \cap V''_{n-k-c_{k-i+1}+(k-i+1)}$$

は V の 1 次元部分ベクトル空間. $\bar{V} := V/L$ とする. \bar{V} のフィルトレーション $\bar{V}_\bullet, \bar{V}'_\bullet, \bar{V}''_\bullet$ を

$$\begin{aligned} \bar{V}_\bullet &: \bar{V}_{n-1} \supset \dots \supset \bar{V}_1 \supset \bar{V}_0 = 0 \\ \bar{V}'_\bullet &: \bar{V}'_n \supset \dots \supset \bar{V}'_{n-k-b_{i+1}+i+1} \supset \bar{V}'_{n-k-b_{i-1}+i-1} \supset \dots \\ \bar{V}''_\bullet &: \bar{V}''_n \supset \dots \supset \bar{V}''_{n-k-c_{k-i+2}+k-i+2} \supset \bar{V}''_{n-k-c_{k-i}+k-i} \supset \dots \end{aligned}$$

で定める. (12) より $[U] \in \Omega_{\vec{b}}(V'_\bullet) \cap \Omega_{\vec{c}}(V''_\bullet)$ に対し $U \supset L$ である. U に $U/L \subset \bar{V}$ を対応させることにより $\Omega_{\vec{a}}(V_\bullet) \cap \Omega_{\vec{b}}(V'_\bullet) \cap \Omega_{\vec{c}}(V''_\bullet)$ と $\Omega_{a_1, \dots, a_{k-1}}(\bar{V}_\bullet) \cap \Omega_{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_k}(\bar{V}'_\bullet) \cap \Omega_{c_1, \dots, c_{k-i}, c_{k-i+2}, \dots, c_k}(\bar{V}''_\bullet)$ の一対一対応を得る. \square

さて, 以上の準備の下ピエリの公式を証明しよう. 同値であるから「双対版」の定理 5.11 を証明する. $k - a$ に関する数学的帰納法を用いる.

$k - a = 0$ の場合は例 5.12 より OK . $k - a > 0$ とする .

$$\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \approx \sum_{\vec{d}} r_{\vec{d}} \Omega_{\vec{d}}$$

とする . \vec{d} が「同じ行には高々1つ」というルールに従って \vec{b} に a 個の箱を加えて出来るときに $r_{\vec{d}} = 1$, それ以外は 0 を示す . 系 5.7 より任意の i に対して $b_i \leq d_i$ の場合のみ考えればよい . $a < k$ なので , ある i に対して $b_i = d_i$. $\vec{c} = \vec{d}^c$ と置く .

$$\begin{aligned} r_{\vec{d}} &= (\Omega_{\vec{a}} \cdot \Omega_{\vec{b}} \cdot \Omega_{\vec{c}})_{G(k,n)} \\ &= (\Omega_{1,\dots,1,0,\dots} \cdot \Omega_{b_1,\dots,b_{i-1},b_{i+1},\dots,b_k} \cdot \Omega_{c_1,\dots,c_{k-i},c_{k-i+2},\dots,c_k})_{G(k-1,n-1)} \\ &= (\Omega_{1,\dots,1,0,\dots} \cdot \Omega_{b_1,\dots,b_{i-1},b_{i+1},\dots,b_k} \text{ の } \Omega_{d_1,\dots,d_{i-1},d_{i+1},\dots,d_k} \text{ の係数}) \end{aligned}$$

となる . よって , 帰納法の仮定を使って証明が終わる .

7 終わりに

さて , いままでグラスマン多様体上の交点数の計算方法であるシューベルト計算を紹介してきました . 本講義は概ね [GH] の 193 項から 211 項までの内容に依拠しています . 本講義を復習する際に参照してみてください .

この講義に引き続き勉強を続けたい方のための簡単なガイドとして , 関連する話題をいくつか徒然なるままに述べたいと思います .

今まで見てきたように , シューベルト計算を使えば , 空間内の直線や平面の個数を数えられるようになりました . 直線や平面の様に線形なものだけでなく曲線や曲面のように曲がったものの個数も数えたい , と思うのは自然でしょう . 例えば「 \mathbb{P}^2 内の 5 本の直線 l_1, \dots, l_5 全てと接する 2 次曲線の個数はいくつ?」という問題を考えることが出来ます . \mathbb{P}^2 内の 2 次曲線は

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5yz + a_6xz = 0$$

と表せますから , \mathbb{P}^2 内の 2 次曲線全体は \mathbb{P}^5 でパラメトライズされます . l_i と接する 2 次曲線たちは , \mathbb{P}^5 の中で 2 次超曲面をなします . それなら 5 本の直線と接する 2 次曲線は $2^5 = 32$ 個ありそうですが , 実はこれは正しくありません . 今の場合 , \mathbb{P}^5 で交点数を計算しても正しい答えは得られないのです . この問題の正しい答えや , そのほかのモジュライ上の交点数についての面白い話題を [向井 2] で読むことが出来ます .

練習問題 5.15 でカラビ・ヤウ多様体内の直線の数を数えました . 直線は「次数 1 の種数 0 の代数曲線」というものになっています . そこで「カラビ・ヤウ多様体内の次数 d の種数 0 の代数曲線は何個?」という問題を考えるのは自然なことです . この個数は安定射のモジュライ上の交点数として表せますが ,

実際それがいくつなのかを計算するのは難しそうです。これは物理からのアイデアであるミラー対象性を用いて解決されています。ミラー対象性について興味のある方は、入門書 [Katz] 及びその文献にある論文や書籍に当たってみるとよいでしょう。

グラスマン多様体は直線や平面のモジュライ空間でしたが、そのほかにも様々なモジュライ空間があります。モジュライ空間とは、「然るべき幾何学的対象をパラメトライズするパラメータ空間」のことです(グラスマン多様体の場合は「然るべき幾何学的対象」が直線や平面。)いろいろなモジュライ空間を考えていくと、多くの場合、幾何学的対象のうち「安定なもの」を考えることが重要になってきます。こころへの事情について詳しく述べることは本講義の範囲を超えてしまいます。「安定なもの」とはなにか、グラスマン多様体の他にどんなモジュライ空間があるのか、と疑問に思われた方は、名著 [向井1] を読まれると良いでしょう。

参考文献

- [GH] Griffiths, Phillip; Harris, Joseph: Principles of algebraic geometry. Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [Katz] Katz, Sheldon: Enumerative geometry and string theory. Student Mathematical Library, 32. IAS/Park City Mathematical Subseries. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2006.
- [Kleiman] Kleiman, Steven L. Problem 15: rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974), pp. 445–482. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
- [向井1] 向井茂 『モジュライ理論1・2』現代数学の展開 岩波書店。
- [向井2] 向井茂 モジュライ入門 数え上げとコンパクト化をめぐって, 数理科学 2008年3月号 37-42 サイエンス社。