詳しいことは
岡本久・長岡亮介 著
関数とは何か
（近代科学者 2014年刊）
で説明してあります.

関数の歴史

岡本 久
〒 606-8502　京都市左京区北白川追分町
京都大学数理解析研究所
okamoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

このファイルは公開講座の原稿から文献を抜き取ったものです.

昨今の大学では, 最も重要な知識だけをできるだけ短時間に教育することが最優先されていることが多く, 数学の発展過程において天才数学者たちがいかに右往左往したか, ということにふれている余裕がなくなっている. 本稿の目的は, 数学と言えどもその発展には多くの挫折が伴っていることを例示することにある. 同時に, 数学上の発見というものをどう評価するか, という問題が非常に難しいことを指摘したいと思う. ある命題の証明が誰によってなされたのかを特定することはときとして非常に難しい. 証明が完成されたことを 100 点であるとしても, その前に 99 点くらいまでもってきた人物がいることがしばしばある. こういったときに, 99 から 100 まで持ってきた人物が栄誉を独り占めすることがいいことだとは思えない. こうした業績評価に関するコンセンサスは現在ではまだできているとはいえないが, いずれ確立する必要がしょうずるであろう.

数学史の書物は多い. 関数の歴史についても多くの良書がある. たとえば, [?, ?, ?] などを読むと関数に対する数学者のイメージがどういうふうに変遷してきたのかがわかる. 本稿はすでに定評のある文献に書いてあることのまとめのようなものであり, 数学史としてのオリジナリティーを主張するつもりはない. ただ, 数学史の教科書には関数のグラフがほとんどあげられていないので, 関数の直感的なイメージがつかみにくい. そこで, この講義ではできるだけ多くのグラフを提供することによって聴く人の便宜を図った.

以下に書いてあることはできるだけ疑いの目をもって読んで欲しい. 数学史の書物・論文には正しくないことが平気でのっていたりすることがある. 私もついうっかりそうした間違いを犯しているかもしれない. 2次資料・3次資料の間違いを安易に引き写すことはあってはならないことであるが, なかなかなくならないものである.

1　Euler—関数を解析学の主役にした男

> Everything, even the obvious, is earned with hard thinking by some pioneering genius. —Paul J. Nahin[?], (42 ページ).

> 「Newton の運動方程式」の発見者が Euler だというのはなんとも意表外であるが, 事実は事実として認められなくてはならない. —山本義隆 [?], (177 ページ).

> In the early eighteenth century, functional notation was used only in very limited circumstances. —Cannon & Dostrovsky[?], (2 ページ).

> The intuitions of great men are sounder than the deductive demonstrations of mediorities. —M. Kline, [?], (168 ページ)

> First the derivative was used, then discovered, explored and developed, and only then, defined. —J.V. Grabiner[?]

いくつかの書物には『微分積分学の基礎は Leibniz と Newton がそれぞれ独立に発見した．これによって数学は新しい時代にはいった．』といった趣旨の文章が書いてある．これは必ずしも間違いではないが, 彼ら以前にまともな微積分の研究が存在しなかったかのような印象を与えるので少し問題があるように思う．Descartes, Fermat, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow, Wallis といった人々の研究もきわめて重要だったのである．Leibniz や Newton がこれらの人々をはるかにしのぐ決定的な進歩を与えたことは事実であるが, 名声の 100%が彼らふたりだけに (特に Newton だけに) 行くのは正しくない．確かに微分学については Newton や Leibniz の革新性は疑う余地のないことだけれども, 無から一挙に新概念が見いだされたわけではない．また, 積分学については Cavalieri や Roberval の業績も高く評価されるべきだと思う．一例を挙げてみよう．イタリア人 Evangelista Torricelli (1608–1647) が 1644 年に発見した次の事実は当時の数学界に相当な刺激を与えたと言われている ([**?**, 227 ページ]):

> 双曲線 $y = 1/x; z = 0$ を xyz 空間において x 軸のまわりに回転させた曲面と平面 $x = 1$ で囲まれた, 無限に長いラッパのような立体を考える．この表面積は ∞ であるがその体積は有限である．

現代の積分の知識があればこれを証明することは簡単である．しかし彼がこれに気づいたとき Newton はまだ生まれてすらいなかったのである．上の命題は当時の人々の目に大きなパラドクスと映ったとしても不思議はない．

確かに Newton や Leibniz の業績は極めて大きいが, 彼らが残したものは現在の解析学とはずいぶんと違い, 読むことすら難しい[1]．現在我々が習う形で解析学を整備したのは L. Euler (Leonhard Euler, 1707–1783) である．彼によって関数が解析学の主役となったのである．そして, 非常に多くの現代の数学者は Euler が敷いた線路の延長を走っていると言うことができるであろう．本節の目的は Euler の業績を振り返りながら解析学の基礎を振り返ることである[2]．

数学史の書物には間違いが多いが、これはある程度までは不可避である。誰が書いてもどこかに間違いはある。そういった宿命にあると思って方がよい（もちろん本稿にもあるはずだ)。

1.1 関数とその表現

解析学の基本的な対象は関数である．解析学の歴史は関数をうまく表現する方法の開発と改良の歴史であるというのは極論かもしれないが一面の真理である．たとえば関数をべき級数展開することによって詳しい情報が得られるということは 17 世紀の (特に Newton の) 大きな発見である．たとえば,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{1}$$

という指数関数のべき級数展開は現在ではよく知られているが, これが発見されるまでには長い下積みの試行錯誤があった．

さて, 関数とは何か, それはどう理論づけられてきたのか, それはどう表現したらよいのか；こうした問題について議論する前にそこで重要な働きをする L. Euler について簡単に紹介しておこう．

1.2 Euler の業績

Leonhard Euler は 1707 年, スイスに生まれバーゼル大学に学び, そこでヨハン・ベルヌーイに数学の手ほどきを受けた．その後天才を発揮し, ロシアのサンクト・ペテルブルグに新しく設立されたロシアアカデミーで数学の教授となり, 後にベルリンのアカデミーに移った後, 再度サンクト・ペテルブルグにもどって, 1783 年にそこで亡くなった．世界一のことなら何でものっているというギネスブックには最も多くの論文を書いた数学者として名前がのっているが, 流体力学など, 数学周辺における業績にも輝かしいものが多い．そんな彼の業績のうちのひとつに

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{2}$$

[1]たとえば [**?**][**?**] を見よ

[2]Euler 以前の解析学については [**?**, **?**, **?**, **?**] が参考となるであろう．

を示したことがあげられる. 左辺の級数がある値に収束するということは比較的容易にわかるが, それがどういう値であるのかは当時かなりの大問題だったようである. 彼の師匠であるヨハン・ベルヌーイなどもずいぶんと研究を重ねたようであるが Euler が 1734 年に解決するまで誰にもわからなかったのである. この級数の値の決定はすでに数学者としての地位を確立していた Euler の名前を不動のものにしたと言われている (印刷公表は 1740 年. Euler 全集 Ser.I の第 XIV 巻,84-85 頁, [?, ?] も参照せよ).

しかしながら, Euler の数々の輝かしい業績の中で見れば (2) は比較的重要性の低いものであると言わざるをえないであろう. 彼の解析学, 流体力学, 整数論, 変分法などの業績は歴史上燦然と輝くものだからである.

Euler の数理科学に残した影響には様々なものがあげられるが, そのうち良く知られているものをいくつか列挙してみよう:

- 自然対数の底を定義し, それに対して e という文字を最初に使用した. それは現代でも使われている. また, e が無理数であることを証明した[3].
- 変分法の基礎を確立した. そしてそれを力学の多くの問題に応用した.
- Euler の公式 $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ を発見した.
- Euler の定理 $V - E + F = 2$ を発見した. ここで, V は多面体の頂点の個数, E は辺の個数, F は面の個数である.
- 剛体の運動方程式を確立した.
- 実験科学であった流体力学を数理科学にした.

Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0$$

を最初に見つけたのは誰でしょう？と問われれば, Laplace でしょう, と答える人が大多数であろう. しかし, 事実は違う. Leonhard Euler が 1761 年にすでに導いている ([?]). また, 流体力学のベルヌーイの定理も D. Bernouuli が発見したものであると言われているが, 彼の本 [?] を読んでも我々が今知っているものには出会わない. 少し遅いけれども Euler が [?] で見つけているものが我々の知っているベルヌーイの定理である.

その他にも輝かしい業績を残したのであるが, きりがないのでここで終わることにする. 興味のある読者は [?],[?],[?] を参考にして欲しい.

彼が成し遂げた業績もすばらしいが, 彼がやろうとして失敗したことにも大きな意義があるものが多い. 例えば代数学の基本定理

定理 1.1 (代数学の基本定理) 実数を係数とする多項式は, 1 次もしくは 2 次の実係数多項式の積として表される.

を証明しようとしたが, 基本的なところで勘違いがあったらしい [?]. 現在ではこの定理は Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) が最初に証明したことになっている. しかし, 現代人の目から見れば Gauss の証明も決して厳密なものではなく, 現在の基準で言えばギャップがないわけではない [?]. これは Gauss も気になっていたとみえて、その後に別証明をいくつか公表している。このギャップがその後 Bolzano による中間値の定理の解析的証明を促すことになる. これについては 7 節を参照せよ. **現在の大学の講義では洗練された理論を習うことが多いけれども, そうした理論や証明も一瞬のひらめきで瞬時に完成するものではない. 何世代にもわたって少しずつ磨かれてきた場合が非常に多い**ということは頭の中に入れておいて欲しい.

Euler の名前を冠する公式や概念は非常に多い. 実に驚くべき多さである. さらに, 様々な公式や関数には, Euler が最初の発見者であるにもかかわらず Euler の名前がついていないものもある. たとえば

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

[3]ちなみにいくつかの書物では e を Napier 数と呼んでいるが, これはよい名前とは言えない. 対数の発見で Napier は科学に業績は計り知れない貢献をしたが, 彼が e を発見したわけではない. また, 対数表の発見と対数関数の発見は別物である

はしばしば Fresnel 積分と呼ばれいるが, 最初に発見したのは Euler である ([?]). 彼の証明は現代数学者の目から見ればきわめて形式的であり, 厳密なものとはいえないけれども, きわめて説得力のあるものであり, 当時の数学者には証明と受け入れられたに違いない.

2 関数

Descartes や Fermat が解析幾何学を発見したとき, 曲線と関数の概念が芽生えていた言うことは可能であろうか. 私にはそうは思えない. 概念が漠然と把握されていたということと数学的な対象として枠組みが理解されていたということは別ものである. 17 世紀にはまだ関数はあまりにぼんやりした対象であった.

関数という言葉を最初に使ったのは Leibniz である. しかし, 岩波書店の数学辞典第 3 版によると, 関数という言葉は Leibniz が 1670 年代から用い始めたが, 最初のころは現在の意味とはずいぶん違うものを意味していた. Leibniz も Newton も微分積分を関数の上に展開したわけではない. 関数を主役にしたのは Johann Bernoulli や Euler である. 関数もなかったのに微分積分学をどう展開したのかというと, 答えは簡単で, 彼らは (実質的に関数を使っていたということはできるかもしれないが) 具体的には平面曲線に対して微積分学を展開したのである.

関数が登場してもそれらは我々が教えられる関数とはだいぶイメージの違うものであった. 我々は,「X と Y を集合とせよ. X の任意の元に対して Y 元がただ一つ指定されるとき, この対応を関数あるいは写像と呼び, $f : X \to Y$ と表す」という定義を教えられる. しかし, こういった定義は 18 世紀にはなかった. A.F. Monna によるとこうした定義はゆっくりと浸透していったのであって, ある時点からこの定義が定着したといったものではないらしい.

さて, Johann Bernoulli によって 1718 年に始めて φx という記号によって関数 φ が定義されたという. そこで Johann Bernoulli の定義を引用しよう [?, 第 2 巻の 241 ページ]:

> Definition. On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque maniére que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

彼の流儀は Euler に継承される.

3 Euler による関数の定義

Euler の書いた無限小解析の教科書 [?] は出版後相当長い期間にわたって指導書としての役割を果たしたと言われている. そこで彼は関数を次のように定義している:

定義 3.1 [Euler の関数の定義 1] ある変化量の関数というのは, その変化量といくつかの数, すなわち定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう. (文献 [?, 2 ページ])

これは上にあげた Bernoulli の定義を踏襲したものであると言ってよかろう. 解析的表示式という言葉を入れたのは Bernoulli の定義をわかりやすくしようという意図があったのであろうか. いずれにせよ現代数学における関数とはだいぶ趣の異なるものである. 彼は $a + 3z$ や $az + b\sqrt{a^2 - z^2}$ を z の関数の例としてあげ (a や b が定数であり z が変数である), 引き続き次のように述べている[4]:

> 関数は代数関数と超越関数に分かれる. 代数関数というのは, 代数的演算のみを用いて組み立てられる関数のことである. 超越関数というのはその内部に超越的演算が見られる関数のことである.

これを読むと, Euler は具体的な表示式だけを関数と呼んでいるようにも思えるが, 必ずしもそうとは言いきれない. その後で彼は, 陰関数についても言及しているからである. いずれにせよ彼の真意はやや不鮮明であるが, 現在の我々が知っている定義よりもかなり狭いものであるようだ. また, 関数の定義域という概念が確立していないことも注意されるべきである. これは無理もないことで, 我々の見るところ, 定義域というものが認識されるのはどんなに早くても Fourier の時代 (19 世紀初頭) であり, もっと完全な概念ができるのは集合論が確立してからのことであるからである.

その 7 年後, [?, page vi] において彼は関数を次のように定義している:

[4] [?] 和訳の 3 ページ

定義 3.2 [Euler の関数の定義 2] Those quantities that depend on others in this way, namely, those that undergo a change when others change, are called *functions* of these quantities. This definition applies rather widely and includes all ways in which one quantity can be determined by others. Hence, if x designated (designates か？) the variable quantity, all other quantities that in any way depend on x or are determined by it are called its functions.

と述べている．かなり関数の概念が広がっているように解釈できる．これだけを文字通りに読むとこの定義は現在的な定義と大差ないと判断することも無理ではないように思える．しかし, 実際に彼が使う関数は具体的な表示のできるものばかりであり, 彼が, 「対応」を使った現代流の定義を頭の中に思い浮かべていたわけではないようである[5]．このあたりが歴史解釈の難しいところで, 著者が書いたことと頭の中に思い浮かべていたこととは必ずしも一致しないのである．

解析的表示式をもって関数の定義とする流儀は後に Dirichlet が現代的な関数の概念に近いものを思いつくまでずっと使われ続けることになる．実際, 1813 年に出版された Lagrange の関数論の教科書でも, ほぼ同様である [?]: 解析学を現代化したというふうに言われている Cauchy でさえ Euler 的な関数の定義で満足しているように思える ([?]).

19 世紀になると定義 3.1 と定義 3.2 の違いが重要であると考える数学者が増えていったようであるが, 18 世紀中は定義 3.1 で概ね満足していたようである．これは Euler 本人についても当てはまる．

さて, 話を元に戻そう．こうした定義およびほかの重要な概念を出発点として, Euler は無限小解析の理論を展開していった．そしてそれを応用することによって力学の肥沃な世界を開拓していったのである．彼の解析学の世界を知ることは有意義であるが言葉の関係で (ラテン語を読むことはやさしくは無いので) 理解はそう簡単ではない．ただ, [?] には英訳も和訳もあり，また, [?] の前半には英訳がある．従って, その雰囲気を知ることは可能である．

注意 3.1 いまから 4 千年ほど前のバビロニア時代の粘土板には様々な数表が記されているという ([?] の 34 ページ, [?] の 24 ページ]．こうした数表について E.T. Bell[?](32 ページ) は “instinct for functionality” と表現している．しかし，われわれはこうした数表を関数の先駆けとは見なさないことにする．これは Youshkevich[?] も言っているように，古代では抽象的な関数というものを研究対象にしていないからである．また, 対応こそ関数である, という考えは 19 世紀以降に出てきたものである．したがって, $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ と $1, 1.414213, 1.732050, \cdots, \sqrt{n}$ という対応表があったとしてもこれを関数の先駆けと見なすことは現代の目で過去をゆがめて見ていることでもあろう．こういった理由から本書では, 古代の「関数表」を関数の中に含めることはしない．

4 Fourier 以降

つぎに Fourier[6]に話を移そう．Fourier と言えば Fourier 級数や Fourier 変換でその名が知られている．彼の熱の理論 [?] において Fourier 級数や Fourier 変換を縦横に駆使したのである．彼は関数をどうとらえていたのであろうか？

Fourier は [?][?] において次のように関数を定義している:([?] の 430 ページ)

> In general the function $f(x)$ represents a succession of values or ordinates each of which is arbitrary. An infinity of values being given to the abscissa x, there are an equal number of of ordinates $f(x)$. All have actual numerical values, either positive or negative or null.
>
> We do not suppose these ordinates to be subjected to a common law; they succeed each other in any manner whatever, and each of them is given as if it were a single quantity.

[?] では, 全く任意の関数という言葉をひんぱんに用いている．たとえば 432 ページでは、

[5] しかし,Truesdell が [?] の 62 ページで述べているように, $f(x) = \begin{cases} a & (x = x_0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$ というものも関数として扱っていたわけであるから, 彼には時代の先が見えていたということもできるであろう．Euler のこうした概念は 1765 年の彼の論文 (Opera Omnia III-1, 564 頁) に現れている．

[6] Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

> The function $f(x)$ denotes a function completely arbitrary, that is to say a succession of given values, subject or not to a common law, and answering to all the values of x included between 0 and any magnitude X.

と言っている. Fourier の著作は極めて画期的なものである. 彼は定義域という言葉こそ使っていないが, 定義域というものを意識しているとおぼしき表現がここだけでなく随所に見られる. 第１章の Grabiner の言葉のように, 定義域という概念は定義される前にこうして使われていたのである.

時代を下って Cauchy による関数の定義を読んでみよう ([?]).

> いろいろの変数の間に, その中の１つの値を与えたとき, それからほかの変数の値を, ことごとく決めることができるような関係があったら, 通例はこの中の１つのもので表された変数を考える. この１つのものを「独立変数」と名づけ, その独立変数によって表されるほかの変数を, この変数の「函数」と呼んでいる.

これは Euler の定義 3.2 とほぼ同じとみなしてよかろう. Cauchy は Fourier を読んでいるから関数の定義域もはっきりと理解している. しかし何故か, Fourier も Cauchy も定義域という言葉を用いてはいない. 定義域と言う言葉はいつごろから使われるようになったのであろうか？

Dirichlet[?](1837 年) では次のような定義が見られる. a と b を定数とし, x を変数とする. 変数 x は a と b の間の任意の値を取ることができる. このとき任意の x に対してただひとつの有限な y が対応し, しかも, x が a から b への区間の間を連続的に走るときに $y = f(x)$ もまた少ずつ変わってゆくとき, y をこの区間における x の連続関数と呼ぶ.

Dini[?] は 19 世紀後半に多大の影響を与えた解析学の教科書であるが, ここでも Dirichlet の定義が踏襲されている.

しかしこうした定義も一挙に浸透したわけではない. 1842 年に書かれた De Morgan の微積分学の教科書 [?] では次のようになっている:

> The letter with respect to which differenciation takes place is called the independent variable. The expression differenciated should be called the dependent variable, but the phrase is not found necessary. Every expression which in any way contains x, or depends for its value upon the value of x, is called a *function* of x.

つまり de Morgan は定義域を知らず, 18 世紀の定義で満足していたのである.

注意 4.1 Dirichlet の Fourier 級数に関する論文 [?] で関数の概念が相当広く拡張されたことは注目すべきである. 彼はこの論文で『有理数においてある定数 a をとり, 無理数において別の定数 b をとる関数』もまた関数であると明確に述べている. 19 世紀初頭には解析的な表示式が関数である, あるいはそうした関数列の極限, その極限の形の関数列のそのまた極限, $\cdots$ といったものが解析学の対象であると暗黙のうちに合点されていたようである. そのような考えからすると Dirichlet の関数は単に観念的なものとしか思われなかったであろう. しかし, こうした関数も年月がたつとともに関数の一員として認められてゆくことになる (抵抗は大きかったようであるが). 1884 年, G. Peano は

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\downarrow 0}\frac{\sin^2(n!\pi x)}{\sin^2(n!\pi x)+t^2} = \begin{cases} 1 & (x\text{ は無理数}) \\ 0 & (x\text{ は有理数}) \end{cases}$$

を発見した ([?], 英訳が [?] の 44 ページにある). 単に技巧的なものと思われた関数も Euler 的な関数の一員であることが判明したのである. その後

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m = \begin{cases} 0 & (x\text{ は無理数}) \\ 1 & (x\text{ は有理数}) \end{cases}$$

が Pringsheim[?]7 ページ, Lebesgue[?][139 ページ] によって発見された.

5 連続性:その定義の変遷

さて, Euler の頭の中にあったのは $\sin x$ や $\sqrt{x^2+1}$ といった "式" であったようである. これは関数の定義 3.2 が書かれたあとでも実質的にそうだったようである. 彼にとってみれば, どんな関数でも微分や積分の操作が行える, ということは自明のことであったのである. 彼はまた, 連続関数や不連続関数という言葉も使っている. 彼によれば, ひとつの式だけで表現できる関数が連続関数であり, 二つ以上の式を用いなければならない関数が不連続関数である. 従って, $f(x)=\log(\sin x)$ は連続関数であり, $f(x)=1/x$ も連続関数であるということになり, 一方,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \leq x) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

は彼にとってみれば不連続関数であった. こうした定義は無意味なものになるということがその後わかってきたため, オイラー流の連続関数という概念は今では使われない. 実際, Cauchy が 1844 年に示したように ([**?**]), 上の "不連続関数" は $f(x)=\sqrt{x^2}$ とも $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^2\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ とも書けるけれど, この右辺は Euler の意味での連続関数である. これからわかるように, Euler の連続関数の定義は定義ではない.

Euler ほどの天才であれば不完全な定義を使っていても正しい結果を出すことは可能であったが, 不完全な定義はふつうの人々には混乱をもたらす. 従っていずれは完全な定義が必要になってくるのであるが, 18 世紀の数学はまだその必要性を感じなかったのであろう. ただ 18 世紀の段階で様々な論争があったことは事実であり, 混乱もあったようである. Langer は [**?**](4 ページ) で次のように述べている:

> The written words flowing from different pens had different meanings. While, for instance, the function and the analytic formula were one to d'Alembert, the function was thought of as a graph by Euler, and probably meant something else again to still another.

Fourier[**?**](英語版 340 ページ) は $e^{-|x|}$ を不連続関数と呼んでいることから, このころまでは Euler 流の不連続性の定義が生きていることを示している.

現在我々が習う連続性の定義が現れるのは 1817 年のことである.

定義 5.1 [Bolzano の連続関数] *According to a correct definition, the expression that a function fx varies according to the law of continuity for all values of x inside or outside certain limits means just that: if x is some such value, the difference $f(x+\omega)-fx$ can be made smaller than any given quantity provided ω can be taken as small as we please.*

これが Bolzano[**?**] に現れる ([**?**] の 256 ページ). この定義は, 現在ならば $|f(x+\omega)-f(x)|$ と書いているところを $f(x+\omega)-fx$ と書いている点を除けば, 現在使われている定義と同じである. 絶対値の記号 $|\ |$ が使われるのは Cajori[**?**, 492 節] によれば 1841 年の Weierstrass によるものであるから, Bolzano の無記号は仕方のないことである. (ちなみに現代の絶対値記号が初めて現れるという Weierstrass の論文 [**?**] は, 一様収束が初めて使われた論文としても有名である. ただし, この論文は公表されたものではないので, 絶対値に $|\ |$ を用いる習慣は Weierstrass の講義を通じて徐々に広まったのであろう.)

Cauchy は次のように連続関数を定義した ([**?**]).

> (i を無限小であるとして) 与えられた範囲内のすべての x に対して, 函数 $f(x)$ がただ１つの有限な値をもつとき, 差 $f(x+i)-f(x)$ がこの範囲内でいつも無限小であるならば, $f(x)$ は問題となっている範囲の中で, 変数 x の「連続函数」であるという.

無限小を用いているけれども, 他の部分を読めばわかるように, コーシーは現代的な連続関数の概念をきちんと理解している. 一方, Bolzano も Cauchy も１点での連続性を定義してから区間上の連続を定義する, という現代の流儀にはなっておらず, 区間での連続性のみを問題にしているように見える[7]. しかし, Bolzano はその後 [**?**] では１点だけで連続で他では連続でないような関数も考えている. ラウグヴィッツ [**?**][214 ページ][8]によれば, Riemann も (19 世紀も半ばになっても) 連続性を各点のものとは考えていないようである.

[7] あるいはその区別がついていない

[8] この本がどれほど正確な本なのかは疑問である. たとえば 1734 年に Euler がコーシーの収束判定条件に正確な表現を与えているという下りなど明らかにおかしい.

6 解析学の厳密化—Cauchy を尊敬せよ:しかし崇拝の対象にしてはならない

> **Klein [?, 208 ページ]** The investigator himself, however, as in the other sciences, does not work in this rigorous deductive fashion. On the contrary, he makes essential use of his phantasy and proceeds inductively, aided by heiristic expedients.

> ··· だからといってぼくはなにもアリストテレスに耳を傾けてはならぬとはいいません. むしろアリストテレスを知り熱心に研究することをすすめます. ぼくが非難するのは, ただ盲目的にかれのいったことすべてに服従し, その命令を不可避なものと受け取ってそれ以上の根拠を探し求めないような仕方で無条件降伏することです. このアリストテレスの濫用からすぐにまた他の極端な混乱が生じます. すなわち他の人々がもはやアリストテレスの証明の力を理解しようとは努めなくなるのです. ··· ガリレオ・ガリレイ [?], 上 173 ページ.

18 世紀の解析学は厳密ではなく 19 世紀になるとその反省に迫られ, Cauchy が解析学に厳密性を吹き込み, 今日の厳密な解析学が誕生した. こういった調子の文章が見られることがままある. これは全くのウソというわけではないが, 真実からはほど遠い. Cauchy の貢献は極めて大きいが, 彼によって厳密化がすべて達成されたわけではない. このあたりの歴史を極限という概念を例にとって調べてみよう.

極限の概念は何も Cauchy に始まるものではない. Newton は limit という言葉を使っていたし, 微分を the last ratio とか the ultimate ratio とかいう言葉で表現している. このことは Newton の Principia Mathematica(英語訳 [?] の 435 ページ) で確認できる. しかし、Newton はそもそも ultimate ratio とは何なのかを定義できていない。説明し出すと議論は堂々巡りになり, 結局無限小を使って説明しているのと大差ないことになってしまう.

彼にとって ultimate ratio が存在するかどうかは特に問題ではなかったようであるが, それが本当に存在するかどうかを疑問に思う人々は当時にも当然いたわけで, 全く気にかけていなかったわけではない. かれはプリンキピアのべつのところで ultimate ratio の存在を力説しているが, 要するに無定義用語を別の無定義用語で置き換えただけである. Newton に心酔している人でなければ, これに納得するとは思えない.

これに対して, Leibniz は無限小量を使って微分を定義した. ultimate ratio と比べると無限小量の方が厳密さに欠けるけれども, 理解はしやすくなる. 無限小量はその後 Bernoulli 兄弟や Euler に引き継がれる. 奇妙なことに Euler はこうした批判にはあまり興味を示さなかったように思える[9].

Euler は解析学の手法や概念を無限小量を使って説明した. 無限小とはどのような量よりも小さい量であると定義される. そして, Euler あるいは彼と同期の人々の書いたものを読むと, あるときは無限小量をゼロでないように扱い, あるときはゼロであるかのように使っている. Euler は無限小量はゼロであると開き直っているときもあるし, そうでないときもある. 現代の我々は無限小が量でないことを知っているから Euler を笑ってしまうかもしれないが, 無限小はきわめて便利な考え方であるので簡単には捨てられなかったのである. 現代でも物理的な直感に基づいて微分の概念を説明するには無限小を使うことは意味のあることである. しかし, それと数学的厳密さとはもちろん別物である. 18 世紀の数学者も当然それを理解していた. Euclid 幾何学のように, あるいは代数学のように疑問の余地を残さない理論展開を必要としなかったわけではないのである. しかし, 現代の我々には既知となっているように, 問題は極めて微妙なものである. 18 世紀の人々にこれが解決できなかったのはそれだけの地盤ができていなかったからである.

18 世紀には進むべき道が大きく広がっていたから, d'Alembert の言うように,「Allez en avant, et la foi vous viendra. (Push on and faith will catch up with you; まずは進めるだけ進め. 正しい道を進んできたという確信は後からついてくる)」といった考え方でもよかったのであろう. しかし, 解析学には出来たときから批判も絶えなかった. そのなかで最も有名なものは司教 George Berkeley (1685–1753) によるものであろう. 彼の有名なエッセイ「The Analyst: A Discourse Addressed To An Infidel Mathematician」は 1734 年に書かれたもので, その中には

> And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?

[9] 非常に難しい問題であるということを直感的に理解したから厳密化の問題をあえて避けることにしたのであろうか？だとすればそれはそれで賢明な判断だったということが出来よう.

あるいはこれと同様の言葉が随所に現れ, 17 世紀解析学の痛いところをついている. 多くの数学者は Berkeley の批判に答えようとしたが, 成功したとはいいがたい. たとえば C. Maclaurin は 1742 年に Treatise of Fluxions を著して反論に努めた. しかし, (筆者は Maclaurin の本を読んでいないのでわからないけれども) 成功したとは言い難いというのが一般的な見方である. Maclaurin を含めてイギリスの数学者は（Newton に倣ったのであろうか）ユークリッド幾何学の枠組みで解析学を厳密化しようとしたのであるが, それでは成功しないのは今の我々には明らかなことである. むろん Maclaurin 自身を含めて当時の人々はそれで成功すると思いこんでいたようであるが[10]. 一方 Euler や d'Almebert はそれよりも理論や応用を進めることに努めたから解析学を厳密にしようとする時間はなかったように見える. 18 世紀も後半になると解析学を厳密な基礎の上に打ち立てようとする機運がでてきたのであろうか, Lagrange が解析学の代数化という主張をするようになる.

1784 年ベルリンのアカデミーは無限大に関する懸賞論文を募集した [?, ?]. これには解析学の厳密化が要求されていたのである[11]. Grabiner[?] によれば, この時点で「解析学の厳密化」が重要な未解決問題として認識されたわけである. 賞は S. L'Huilier[12] という人物に与えられた. L'Huilier の論文を読んでいるわけではないのでよくはわからないが、

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Lhuilier.html

によると、

> The standard concepts and notation for derivatives, and the standard elementary theorems on limits which appear in an undergraduate calculus text today appear in a remarkably similar form in Lhuilier's prize winning essay. Lhuilier introduced the notation "lim", and was the first to allow two-sided limits.

ということであるから、d'Alembert のように極限の概念をもって解析学の基礎付けを試みたものと思われる。しかし、Lagrange は L'Huilier の答えには満足していなかったようである. なぜならばその後ラグランジュは自分自身で解析学の厳密化に取りかかるからである。

Lagrange の解析学の厳密な基礎付けは彼の理工科学校の教科書 [?, ?] で展開されている. 彼は L'Huilier などの答えに満足できず, 自分で理論を再構築しようとしたのであろう. 彼がとった方法は解析学の代数化である [?, ?]. それは一言で言えば, 形式的べき級数を出発点としてすべての操作を記号の代数的演算で済ませてしまうという方法である. これによって極限とか無限小が追放された理論体系が可能になったと彼は信じたのである. 彼の本は当時の人々にはずいぶんと読まれたようである. 彼はこの中で導関数 (dérivée) という言葉を使用し, それは今でも使われている. しかし, よく読めば厳密な理論になっていないことは明らかであろう. 詳しく述べる余裕はないので, [?, ?] を参照して欲しい.

結局, 18 世紀の解析学は極めて曖昧な土台の上に構築されていた. そして厳密化の必要性は理解されていたものの, それをどう実行すべきなのかは誰にもわからなかったのである. いくつかの書物には「18 世紀の解析学者は厳密な推論に無頓着であった. その状況を打破したのが Cauchy である.」といったことが書かれているが, これは 100%正しくはない. たしかに級数の収束についていささかルーズであったのは確かであるが, 級数の収束・発散を考慮しなかったわけではない. たとえば, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ が無限大に発散することは Johann Bernoulli も知っていたし, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ が有限な値になることも知っていて, その値を求めようと必死になっていたらしい ([?]). 従って, 18 世紀の数学者は収束・発散を気にせずに計算していたというのは当たらないのである.

d'Alembert も Lagarange も失敗したとは言え, 解析学を厳密に展開しようと試みたことは事実であり, これは強調されるべき事実である. 失敗も立派な業績の一つに数え得る場合もある. 彼らの (特に Lagrange の) 試みは評価されるべきである. 初めて空を飛んだライト兄弟の偉業は大いに讃えられるべきであるが, 彼ら以前に空を飛ぼうとして失敗した人々が大勢いたはずで, そうした冒険家の存在が技術の進歩に大きな役割を果たしていたことを忘れてはならない.

---

[10] これを笑うことは簡単であるが, そうしてはいけない. 古代ギリシャの数学者たちも円の正方化だできると信じていたのであるから.

[11] Lagrange はパリに移るまではベルリンアカデミーの数学主任教授をしていたから, この懸賞は Lagrange の影響をうけて掲げられたものであろう.

[12] L'Huilier はオイラーの多面体定理は穴がある場合（つまりトーラス面のような場合）には修正が必要であることに気づいた最初の人物でもある。

7 Bolzano の貢献

歴史上, 現代的な連続関数の概念が最初に現れるのは 1817 年である．この年チェコのプラハで B. Bolzano が公表したパンフレットにそれが現れたのである [?]. このパンフレットで彼が示したのは中間値の定理である．中間値の定理はそれ以前の文献にも現れてはいるが,「グラフを書いてみれば明らか」といった直感的な説明ですませていたようである[13]. 幾何学的直感によらない, 純粋に解析的な証明を行おうとするところに Bolzano の歴史的意義がある [?]. もっともこの論文を読むと彼が代数学の基本定理を強く意識していたことがわかって大変面白い．つまり, 代数学の基本定理は極めて重要な定理であるが, その定理を証明しようとすると, どのような証明をしてみても必ず「奇数次の実係数多項式は少なくともひとつの実根を持つ」という命題に頼らざるをえないが, これはすなわち中間値の定理の系であるから, 中間値の定理を幾何学的直感に頼らずに証明せねばならない, と彼は考えるのである．さらに, このパンフレットで歴史上初めて連続関数が正しく定義されたことの意義も大きい．彼はまた, 中間値の定理に連続の仮定が必要であることも力説しているが, その中で彼は, 関数 $x+\sqrt{(x-2)(x+1)}$ は $x=2$ で正, $x=-1$ で負であるが $-1<x<2$ のいかなる値でもゼロにはならないと言っている．そしてこれは連続性の仮定が満たされないからであると言っているのであるが, これは我々現代人には奇妙である.「関数が複素数値ならば中間値の定理は成り立たない」という注意ならばわかるのだが. もちろん, このころには複素数に市民権がなかったのであろうから, 彼の頭の中には連続と言えば自動的に実数値関数という図式があったのであったのかもしれないが, 筆者にはよくわからない.

$f(0)=0, f(1)=1/2$, x が無理数ならば $f(x)=x/2$, x が有理数ならば $f(x)=x$. このとき $f(0)=0$ と $f(1)=1/2$ の間の任意の数は適当な $x\in[0,1]$ によって $f(x)$ で表される．この関数は, 有理数と無理数でばらばらに関数値を定義しているが, このようなものですら関数と認めていた Bolzano には大きな先見性を認めざるを得ない (いたるところ不連続な関数を関数と認めたのは Dirichlet が最初であり, Bolzano はそれより後のことではあるが.) しかし, 彼のような偉大な思想家でも違いをおかすことはある．たとえば, 彼は多変数の実関数について,「各々の変数ごとに連続であれば多変数関数として連続である」という定理を書いているが, これはもちろん正しくはない．不思議なことに同じ間違いを Cauchy も犯すのである．(Grattan-Guiness[?] によれば偶然の一致ではなく Cauchy がまねをしたということになるのだが.)

Bolzano は神学者としてはあまりに過激であったため大学から追われ, その後は著作に専念した, しかし彼の著作の大部分は生前には印刷されず, 19 世紀後半にドイツで再評価されるまで数学の流れに影響を与えることは少なかった．Bolzano については [?, ?, ?, ?] を参照されたい．プラハ大学で Bolzano に数学を教えた人物の中に F. Gerstner という人がいるが ([?]), この人は数学者としてよりも流体力学における Gerstner のトロコイド波の発見者として有名である.

さて, Bolzano による連続関数の定義 5.1 をもう一度振り返ろう: これが初めて現れたのが Bolzano のパンフレットなのである．数学史上の記念すべきできごとであると言えよう．しかも, Bolzano 以前の多くの数学者には関数の定義域が必ずしもはっきりしなかったのが, 彼の論文では定義域をはっきりと認識していることにも注意すべきであろう．極めて残念なことに彼のパンフレットはほとんど読まれなかったため, 彼の後世への影響はほとんどなかったと思われる．これについては異論もあり, たとえば, Grattan-Guiness [?, ?] は「Cauchy は Bolzano のパンフレットを読み, それに基づいて彼の Cours d'Analyse を書いたけれども Bolzano の名前を引用しなかった」としている．しかし, これは状況証拠だけで犯人に仕立て上げられたようなものらしい．Freudenthal[?] ははっきりとこれを否定しているし, 多くの歴史家は Grattan-Guiness[?] を信用していないようである．Grabiner[?] は Cauchy を賞賛しており, Bolzano と Cauchy の研究は独立であった可能性が高いとしている.

Bolzano は当時ほとんど読まれなかったと言われているが, Abel は Bolzano を賞賛しているという. Abel の手書き原稿の一部には,「私が調べたところに寄ると Bolzano は賢い男らしい」と読める部分があるらしい. [?].

現代の微積分学の教科書では中間値の定理を証明するときに上に有界な数列には上限が存在するという, いわゆる Bolzano-Weierstrass の定理を利用することが多い (たとえば [?, ?, ?])．しかし, Cauchy の証明は違う．2 分法を用いるのである．2 分法自体は Lagrange によって使われていたのであるが ([?]). こうした違いもあるので, Cauchy が Bolzano を剽窃したということは当たらないという意見が強いようである.

[13] たとえば [?] の和訳 21 ページや [?] を見よ.

8 Cauchy の貢献

さて, Cauchy が解析学を厳密な基礎の上に構築しようとしたのは彼のエコールポリテクニクにおける教科書 [?, ?] である. このうち, 後者の目的は前者の厳密性を, 無限小量を使うことによって「やわらげる」ことであったという. [?] の「まえがき」には,

> 「解析力学」を著した有名な学者が, その「導関数」の理論の基礎のためにこの公式を必要としたということを知らないわけではないが, あらゆる尊敬をほしいままにしているこの偉大な権威者のことと言っても, 発散する級数を用いることによって不確実な結果へ導かれることもあることは, 現代の数学者の大部分が等しく認めるところである. —中略— この書物を読んでくれる人々は微分学の原理やこれの最も重要な応用は, 級数の助けを借りなくても容易に取り扱うことができることに確信をもっていただきたい.

とあって, Lagrange への強烈なライバル心が見られる.

彼のエコールポリテクニクにおけるこれらの教科書は, 厳密性に関してそれまでの教科書とは明白な違いをもっており, まさに画期的なものということができる. 級数の収束と発散についても明白に述べているし, (彼が [?] のまえがきで述べているように) 不定積分の存在を証明しようとした (あるいは証明すべきことであると認識したと言うべきか) のも彼が最初であろう. 不定積分の存在を言うためにまず定積分を定義してそれを関数と見なしたときにそれが不定積分になるということ, つまり,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

を証明したのもここに初めて現れるものである. (それまでこの等式は定理というよりはむしろ定義だったのである)

Cauchy は解析学の厳密化の祖であるかのように言われているが, 筆者の意見では, 解析学の厳密化は (失敗したけれども)Lagrange によって始められ, プラハで Bolzano というあだ花が咲いてその後, Cauchy と Weierstrass の二人によって完成したものである (Cauchy の功労が第一であることは認めるが). Lagrange の試みは高く評価されねばならない. Bolzano も Cauchy も Lagrange の著作を読むことによって厳密な解析学を構築することに意義を見い出したに違いない [?]. つまりやる気になったのである. Cauchy の方法と Lagrange の方法はあまりにも違うが, そのことが Cauchy が Lagrange を無視したことにはならないのである. Lagrange の欠点をとことん突き詰めたからこそ完全に新しいアイデアで出発することができたのであると著者は信じたい.

Cauchy は他人のアイデアでもそれを引用せずに書くことはしばしばであったし, あっちこっちに書き散らしたものの中には互いに矛盾することも多い. 有名な間違い定理に次のものがある ([?] の 120 ページに現れる):

定理 8.1 (ある区間上の関数 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はすべて連続であるとする. そして $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が区間のすべての点で収束するものと仮定する. このとき $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ はその区間で連続である.)

ここで収束は各点収束である. この定理はもちろん正しくない. しかし, 当初誰もこの間違いに気づかなかった. 最初に気づいたのは Abel で, 1826 年のことである (後述). また, 多変数関数の連続性で勘違いしていたことも有名である. すなわち, 多変数関数が各々の変数について連続ならば連続であるという間違った "定理" を堂々と書いている[14]. このように, 解析学の厳密化は徐々に進んでいったと見るべきであろう.

こうした事実は多くの人々に少しずつ認識されていったようである. そんな中で各点収束と一様収束の違いが認識されていったらしい. 歴史上一様収束の概念に最も早く到達したのは Weierstrass で 1841 年ころのことであると言われている [?]. しかし, この論文は彼がまだ学生だったころに書かれたもので, 出版されたわけではない. また, 一様収束 (gleichmässig convergirt) という言葉は使われているが, それを定義しているわけではなく, ただ一方的に使っているだけである. だから, この一編の論文だけから, 彼が一様収束をどの程度重要な概念であると思っていたかを推し量ることはできない. しかし, その後 Weierstrass は講義の中で一様収束について詳しく述べ, 現在我々が知っている「一様収束すれば項別積分ができる」といった定理に到達した. (論文を出版しないのは Weierstrass にはきわめて特徴的なこと

[14] [?] の 47 ページ

であって, 彼の場合新しいアイデアを論文にすることの方が少なかった). 印刷公表されたものの中で最も古い一様収束の概念はStokes[?]であると言われている. しかしこれは議論の余地のあるところであろう. Stokesは一様収束でない場合を議論しているように見えるので, 一様収束するとどういう好都合な事態になるのかを理解していたかどうかは判然としない. それとほぼ独立にSeidel[?]もこの概念に気づいて公表しているらしい. Hardy[?]やGrattan-Guiness [?]にはこの辺の歴史に詳しい. Hardy[?]もそうであるが, Abelが一様収束の概念に到達していたという解説は多い. しかし, Grattan-Guiness[?]はそうは見ていない. 1853年のCauchyの論文[?]になると我々の知っている一様収束と同じものが出ている. 結局この論文が一番古いものであるということもできる.

Weierstrassが学生のときにもっとも影響を与えたGudermann[?]の251ページから252ページにかけて次の文が書かれている.

> Anmerkung 1. Es ist ein bemerkenswerther Umstand, das sowohl die unendlichen Producte in §58 als auch die so eben gefundenen Reihen einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz haben, welcher nicht von der Grösse der Amplituden φ und ψ, sondern lediglich von der Grösse des Moduls k oder k' abhängt.

確かに一様収束の概念が見える. しかし, これもただ使っているだけである. Weierstrassに影響を与えたという間接的な影響以外に数学界に与えた影響はないものと思われる.

Cauchyが解析学の教科書を発表した1821,23年以降, Cauchy流の厳密化はAbelなどの数学者には熱狂的に迎えられたが, 一挙に主流となったわけではない[?]. また, Cauchyが必ずしも厳密でないことは認識されていたようである. たとえば([?]の558ページ) Jacobiは

> 完全に厳密な証明というものを知っていたのはディリクレだけだ. ガウスでもなければCauchyでもなければましてや私でもない. ··· ガウスが証明できたと言えばそれは極めて明解であった. コーシーが同じことを言ってもお神籤のようなものだ. しかし, ディリクレが出来たと言えばそれは間違いのない事実である.

と言ったと言われている[15].

とはいえ, [?, ?]の貢献も見逃すことはできない. EulerもLagrangeも, 関数が微分できることは当たり前であって, 疑問に思うことは無かった. しかし, Cauchyは微分できることもあり出来ないこともあることをちゃんと理解していた. [?]には微分係数の定義がきちんと書かれている. これは大きな進歩であろう:

> [?]の9ページ。函数 $y = f(x)$ が, 変数 x の与えられた範囲内で連続であると, 変数 x の, 問題にしている範囲内に, 無限小増分を与えたときに, 函数自身が無限小増分を生じる. したがって, $\Delta x = i$ と置くと, 「差分比」
>
> $$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> の両項は, 無限少量である. しかし, これらの両項は, 同時に限りなく零に近づくけれども, 比そのものは, 1つの正または負の極限値に収束することがある. その極限値はもし存在するならば, x の1つ1つの値に対して定まった値となるが, それは x とともに変化する.

積分を微分の逆とみるのではなく, まず定積分を定義してそれが微分の逆になっていることを証明する, という現代の我々の流儀を生みだしたのもCauchyであると言われている. しかし, これにはFourierの影響もあるかもしれない.

Lagarangeは運動学にも幾何学的直感にもよらない解析学を構築しようとして（本人はできたと思ったみたであるが）成功しなかった. D'AlembertやLagrangeが「解析学の厳正な構築」を唱え, それが重要な問題であることを何度も奨励したからこそBolzanoやCauchyの理論が生まれたのである([?]).

[15]そうはいっても, ディリクレも「ディリクレの原理」を証明無しに用いていたのではあるが

1667	Gregory が解析的表示を研究対象にする（関数のはじまりか？）
1692	Leibniz が functio という言葉を使う
1718	Johann Bernoulli の関数の定義
1748	Euler の Introductio in Analysin Infinitorum 出版される
1753	D. Bernoulli が任意関数を三角級数で表されることを主張する
1755	Euler の Institutiones Calculi Differentialis 出版される
1797	Lagrange の Théorie des Fonctions Analytiques [?] 出版される
1806	Ampére の論文出版される
1806	Argand が複素数を平面の点と同一視する理論を発表
1807	Fourier が任意関数を三角級数で表されることを主張する
1817	Bolzano の Rein Analytischer ··· 出版される
1821	Cauchy の Cour d'Analyse 出版される
1823	Cauchy の Résumé des leçons ··· 出版される
1829	Dirichlet の Sur la convergence ··· 出版される
1832 年ころ？	Bolzano の至るところで単調でない関数（出版されず）
1834	Lobatchevsky による関数の定義
1837	Hamilton が複素数 $a+\sqrt{-1}b$ を実数のペア (a,b) で表す理論を発表
1841	Weierstrass が一様収束という用語を用いる (公表はされず)
1847	Stokes が一様収束の概念に到達
1872	Dedekind の Stetigkeit und Irrationale Zahlen 出版される
1872	Heine が一様連続の概念を使う
1875	Weierstrass の「連続だが至る所微分不可能な関数」発表される
1889	Peano が自然数の公理系発表

9　連続だが至る所微分不可能な連続関数とその周辺の話題

9.1　連続性と微分可能性

すでに第 1 章で見たように, 連続関数の意味は Euler のころと Bolzano や Cauchy 以後では異なっている. では, Bolzano や Cauchy による連続関数の概念や微分可能性の概念は直ちに数学界に受け入れられたのであろうか？ 実はそうではなく, この概念が数学者の間に浸透して消化されていくにはずいぶんと長い時間がかかっているのである. 実際, Ampère の定理およびその類似が 19 世紀中頃まで生き残っていたのである [?, ?].

定理 9.1 (Ampère の定理,1806 年) 任意の関数は有限個の例外点を除いてすべての点では微分可能である.

もちろん今の我々はこんな定理が成り立たないことを知っているが, 笑って軽蔑してはいけない. ここにはひとつの進歩が見えるからである. Euler は関数が微分できることは自明のことであって, 考察の対象になっていなかった. Lagrange になると微分ができるということを証明しようとしている (結局できなかった). Ampère も Lagrange の影響を受けてこれを証明しようとしたわけである. しかしこれはできるはずもなかった. 1806 年の段階では (連続) 関数が何なのかについて何もコンセンサスはなかったからである. [?] によると Ampère は有界変動関数のようなものを想定していたらしい. Ampère の原論文を読んでみても何が言いたいのか我々にはよくわからないのが正直なところである. Ampère は電磁気学にその名を残しているので物理学の方でより著名であるが, エコールポリテクニクでは数学の教授であった. 緻密に解析学を研究することには向いていなかったのであろう.

Galois が 1830 年に書いた論文 [?] には, 任意の関数が微分可能であり自分がそれを証明したと勘違いしているふしがある.

次に, $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ とする．これに関して次の定義を読み比べてみる：

定義 9.1 f が単調非増大であるとは, $x\le y$ なる任意の $x,y\in[a,b]$ に対して $f(x)\le f(y)$ が成立すること.

定義 9.2 f が連続であるとは, 任意の $x\in[a,b]$ において

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)-f(x)\right]=0$$

が成り立つこと.

定義 9.3 f が微分可能であるとは, 任意の $x\in[a,b]$ において

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在すること.

これらが異なる概念であることは明白であろう．しかし, 微分可能であることにより近いのは単調性であろうか連続性であろうか？ 連続性の方が表面的には似通っているが, 単調性はある意味で右肩上がりになっていることであるから, 傾きの存在に近いということができる．しかし, 単調関数に連続性は仮定していないのである．単調関数に不連続点があったとしてもそれは高々可算無限個であることがわかっている．さらに, $[a,b]$ の中の任意の可算集合 (稠密であってもよい) が与えられたときにその可算集合を不連続点にするような単調非減少関数を作ることは容易である (読者は各自これを試みられたい)．どちらの概念も微分とはほど遠いように思えるが, 以下に示すように, 連続であっても至る所で微分できない関数はいくらでも存在するが, あとで示すように, 単調関数は "ほとんど至るところ" で微分可能なのである．("ほとんど至る所" の意味は後で記す．)

関数から解析的な表示式という先入観を完全に取り除いたのは Dirichlet である ([?], 1829 年). Euler の第 2 の関数の定義を突き詰めれば 勝手に値を指定しただけの "関数" というものも相手にせねばならないと思い至った Dirichlet は偉かったと思う．Dirichlet がこうした考えに至ったには理由がある．これについては第 7 章で述べる予定である．しかし, 同時にそれは予想もしない怪物を解き放つことになる．その先駆けとなるのが Riemann による,「稠密な点集合で不連続になるが積分可能な関数」である ([?], 1854 年). それは次のように定義される．まず, 関数 d を

$$d(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1/2)\\ 0 & (x=1/2)\\ x-1 & (1/2<x\le 1)\end{cases}$$

で定義する．そしてそれを周期 1 で全数直線上に拡張する．このとき Riemann は

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(nx)}{n^2}$$

で関数 R を定義した．これはすべての点で有限の値になり, 有界な関数である．既約分数に表したときに分母が偶数となるすべての有理点で右極限と左極限を持つがそれは一致しない．それ以外の点では連続である．$R(x)$ は Riemann 積分可能である.

1870 年に Hankel はおそらく Riemann に刺激を受けたのであろう (Riemann の論文は 1854 年に書かれたが, 印刷公表になったのは 1868 年である) 次のようなアイデアを述べている (Condensation der Singularitäten の方法). Hankel のアイデアを用いれば, 至る所連続であるがすべての有理点で微分不可能になるような関数がいくらでも作ることができる．まず $-1\le x\le 1$ で連続であり, $x\neq 0$ では C^1 級の関数 φ をとる (たとえば $\varphi(x)=|x|$). そして

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi\left(\sin(n\pi x)\right) \tag{3}$$

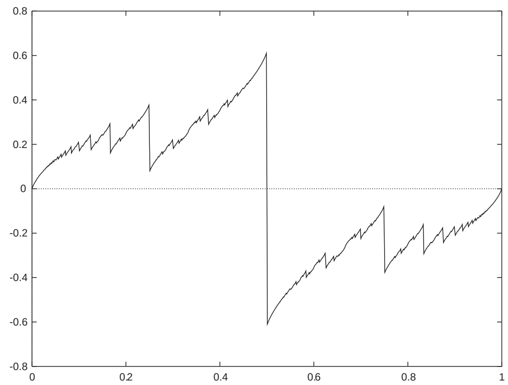


図 1: Riemann の, 積分可能だが稠密な点集合で不連続な関数

とする. ここで数列 $\{\alpha_n\}$ は絶対収束するならば (3) は一様収束するから連続関数を定義する. さらに, $\sum n|\alpha_n| < \infty$ を仮定すると, (3) は全ての有理点で微分不可能となる. 彼はこうした方法を Condensationsprincip der Singularitäten と呼んだ.

その後 Cantor[?] は次のようなアイデアを提唱した: 区間 $[0,1]$ で稠密な可算集合 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ をとり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi(x - r_n)$$

とする. この関数も有理点で微分不可能となる.

H.A. Schwarz[?] は 1873 年に微分不可能関数に関する注意書きを発表している. 彼は彼の関数の微分不可能な点の集合が稠密であることを証明した. しかし, 至る所で微分不可能な関数というものを思い浮かべていたわけではない. 彼の例は「微分不可能」という言葉を当時の人々がどうとらえていたのかを知るためには意義があるが, 数学的にはその後意義を失うことになる. 実際, 彼の関数は単調増大であるために, ほとんどいたるところ微分可能なのである. 具体的には,

$$\varphi(x) = \sqrt{x - [x]} + [x] \qquad ([x] \text{ は } x \text{ を超えない最大の整数})$$

とおき,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{4^n}$$

$S(x)$ は $x = k/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots; k = 0, 1, 2 \cdots, 2^n)$ において微分できない. (今日, Schwarz は Cauchy-Schwarz の不等式でその名を残している.)

10 Weierstrass の微分不可能関数

19 世紀の初めのころにはすべての連続関数は有限個の例外点を除けば微分可能であると思われていたらしい. 一般に, 人間は自分の経験に強く縛られるのが普通で, 特に根拠のないことでも経験し易いことだけに基づいて正しいと思いこむことがしばしばある. Hankel 以降は, 『連続であるが稠密な点集合で微分できない関数が存在する』ことが認識された. しかし, すべての点で連続でだがいかなる点においても微分不可能な関数が存在する, ということが認識されるためにはもう少し時間がかかる. これを最初に示したのが Weierstrass (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) である.

Weierstrass[?] によると, Riemann がどこでも微分できない関数の例として

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \sin\left(\pi n^2 x\right) \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{4}$$

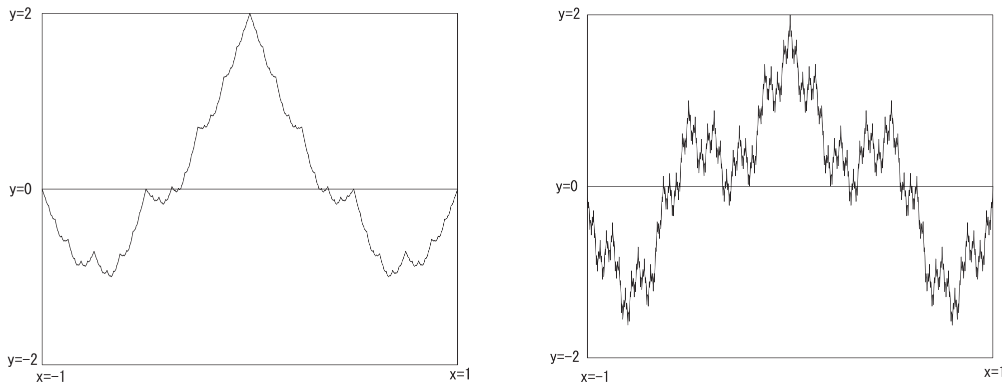


図 2: Weierstrass 関数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$ のグラフ. (左) $b = 1/2, a = 2$. (右) $b = 1/2, a = 4$.

を考えたということである[16]. しかし, この関数が微分不可能であることを厳密に示すことは意外に難しく[17], Weierstrass がもう少し証明しやすい例として

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x) \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{5}$$

を考えた ([?]). Weierstrass は,

定理 10.1 b は実数で $0 < b < 1$, a は整数で, しかも奇数. さらに $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ と仮定する. このとき, すべての $x \in [-1, 1]$ で f は微係数を持たない.

を証明した ([?] の日付は 1872 年となっているが,1872 年に出版されたわけではない. この定理が出版物で公表されたのは 1875 年の du Bois-Reymond の [?] である). Weierstrass は $ab > 1$ と仮定するだけで微分不可能になると信じていたらしいが, ここに述べたような制限された形でしか証明はできなかった. 一般の場合を証明したのは Hardy (G.H. Hardy, 1877–1947) である.

定理 10.2 (Hardy[?]) b は実数で $0 < b < 1$, a も実数で $ab \geq 1$ と仮定する. このとき, すべての $x \in [-1, 1]$ で f は有限な微係数を持たない.

[?] の証明は初等的でわかりやすい. [?] は明解に書かれているが, 読む通すには多少の努力を要する.

注意 10.1 Riemann の関数 (4) はほとんどいたるところで微分できない (例えば無理数では導関数が存在しない) が, 微分できる点も無限に存在する. 詳しくは [?, ?] を見よ. また, Riemann 関数に関する解説 [?] は歴史的なことがわかってたいへんおもしろい解説である. $x = 0$ で微係数 $+\infty$ をとることは簡単にわかる. グラフを図 3 に描いた. $a = 3, 4, \cdots$ について

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^a x)}{n^2}$$

と定義しても全く同様に $f_a'(0) = \infty$ である. また,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(\pi n x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1 - x) \\ \frac{\pi}{2}(-1 - x) \end{cases}$$

[16] 1861 年ころの講義でこの関数を導入したと言われている [?]

[17] 実際, この関数では微分できない点も無限に多く存在するが, 微分できる点も無限に多く存在することがその後の研究で明らかにされる

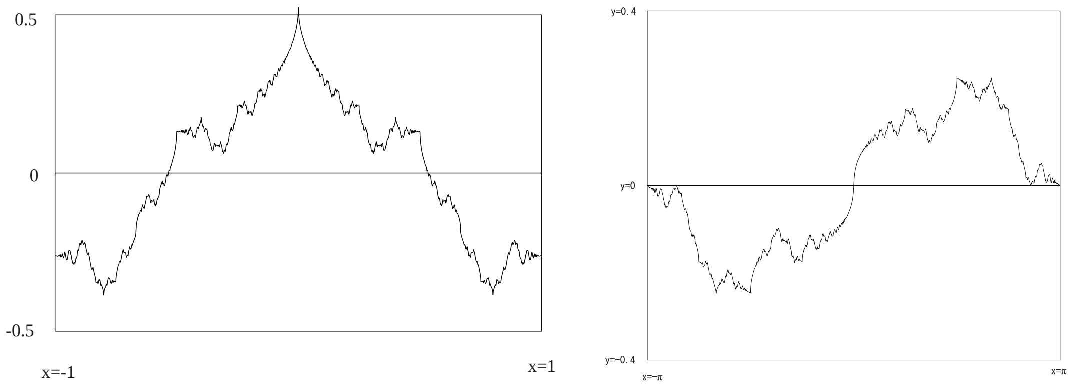


図 3: (右) Riemann 関数 (4) のグラフ.　(左) Riemann 関数で sin を cos で置き換えたもの: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2 x)}{\pi n^2}$ のグラフ.

は穏当な関数であることに注意せよ. Luther[?] にはさらに詳しい情報がある. 彼によれば Smith の証明 [?] には間違いがあるらしい. Luther は,

$$g_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^\mu} \sin\left(\pi n^2 x\right)$$

と定義し, $1 \leq \mu \leq 3/2$ ならば g_μ は連続であるがいたるところで微分不可能であることを示した.

Darboux[?](107 ページ) は Weierstrass とは独立に同様のアイデアに達した. 彼は,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((n+1)!x\right)}{n!} \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

を連続であるが至る所微分できない関数であるとして紹介している. この関数をそのまま可視化しようとしてもうまくいかない. これは $n!$ があまりに急激に大きくなりすぎるため, 人間の目には細かい構造が見えなくなってしまうためである. これを改良するために $0 < \alpha < 1$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((n+1)!\pi x\right)}{(n!)^\alpha} \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{6}$$

を考えてみると, これは比較的可視化しやすい.

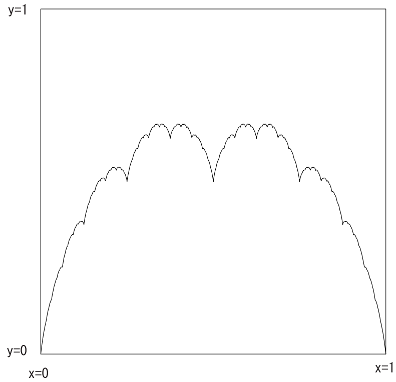
11　Takagi 関数とその周辺

1903 年高木貞治は [?] において,「連続であるが至る所微分不可能である関数」の非常に簡単な例を与えた. それは,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi\left(2^n x\right). \tag{7}$$

ここで,

$$\psi(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1-x & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$



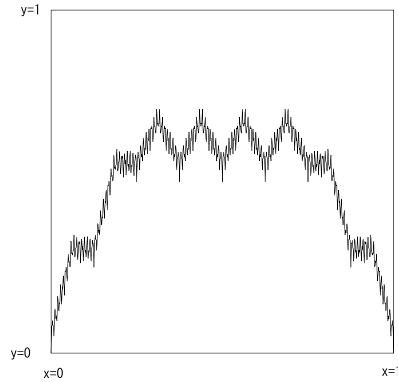


図 4: (左)Takagi 関数のグラフ. (右) McCarthy の関数 (少し変更しているが本質的に同じもの)

と定義する. 関数 $\psi(x)$ は山型関数あるいはテント関数と呼ばれることがある. (7) の形で書くと大変理解しやすいが, 高木貞治のもともとの定義は数の 2 進法表示を使っており, (7) と同値であるが直感的な理解はしづらい.

Takagi 関数はその後様々な人によって再発見されている. McCarthy[?] による次の例は高木のものの類似であるが, 微分不可能であることの証明が少しだけ易しい:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi\left(2^{2^n-1} x\right) \tag{8}$$

これよりもさらに古く, Faber[?] は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \psi\left(2^{n!} x\right) \tag{9}$$

を考えている. これらはいずれも連続だが至る所で微分不可能な関数である.

Hildebrandt[?] は Takagi 関数を (7) の形で再発見している. Begle and Ayres [?] は $\pm\infty$ まで込めて, Takagi 関数の微係数の有無を調べている. 彼らの結果は,

- $x = k/2^n$ $(n = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, \cdots, 2^n)$ のときには $\pm\infty$ を許容しても微係数は存在しない.
- x がそれ以外のとき, x を 2 進展開したときに n 番目までにあらわれる 0 の個数を O_n, 1 の個数を I_n としたとき, $D_n = O_n - I_n$ とおく. もし $\lim_{n\to\infty} D_n$ が存在すればそれは $+\infty$ もしくは $-\infty$ のどちらかであるが, このときはその極限が x における微係数になる. 極限が存在しないときは微係数は存在しない.

また Takagi 関数は次のように一般化することができる:

$$F_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \psi\left(a^n x\right). \tag{10}$$

ここで a, b は自然数である. $a = b = 2$ の場合が Takagi 関数に相当する. van der Waerden[?] は高木貞治の論文を知らずに $a = b = 10$ の場合を発見している (1930 年のことである). $a = b$ の場合が [?] によって定義されている. [?] によると, $F_{a,a}$ の微分不可能性の証明は, a が奇数であれば多少の修正のもとで $a \geq 3$ の場合にも適用可能であるということである. 筆者の見るところ, a が自然数であれば, 奇数であろうが偶数であろうが同じ要領で証明可能である.

Knopp[?] は次の関数を考えた:

$$K_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \psi\left(\beta^n x\right). \tag{11}$$

定理 11.1 (Knopp,1918) α は実数で $0 < \alpha < 1$, β は自然数で $\alpha\beta > 4$ であるものと仮定する[18]. このとき関数 $K_{\alpha,\beta}$ は $[0,1]$ で連続だがいたるところ微分できない関数である.

Hata and Yamaguti [?] は, 絶対収束する級数 $\{a_n\}$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\psi)^n (x)$$

という形で表される関数 f を Takagi class と名付けた. ここで, $(2\psi)^n = (2\psi) \circ (2\psi) \circ \cdots (2\psi)$ (n 個の合成) である. Takagi class は非常に多くの微分不可能関数を含むが, たとえば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \psi^n(x) = x(1-x)$$

のような滑らかな関数も含んでいる.

小平邦彦 [?] にも微分できない関数の例が載っている. 彼の例は Hankel の延長戦上にあるが, 彼が Hankel の論文を知っていたのかどうかは定かでない. 自力で思いついたとしても驚くべきことではないが.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\sin(\pi n! x)| \tag{12}$$

[?] ではこれが至る所で連続だが, 任意の有理点で微分できないことが証明されている. 実際は無理点でも微分できないので, これはいたるところ微分できない関数の例になっている.

図 5: 高木貞治. 写真は高木貞治全集より拝借. 1875 年 4 月 21 日岐阜県大野郡数屋村（現在では本巣市数屋）生まれ. 明治 24 年 9 月, 京都の第三高等学校に入学. 明治 27 年, 19 歳で (当時日本にただ 1 つしかなかった) 帝国大学理科大学数学科に入った. 明治 31 年より 3 年間ドイツ留学. 明治 34 年, ドイツ留学中に東京帝国大学助教授となる. 明治 37 年教授. 昭和 15 年文化勲章受章. 1960 年没.

ここで Takagi 関数に関連する論文を一覧にしてみよう.

1903	Takagi 関数の発見 (高木貞治)
1907	Faber による Takagi 関数の類似 (9) の発見
1918	Knopp による Faber 関数と Takagi 関数の一般化
1930	van der Waerden の関数
1933	Hildebrandt による Takagi 関数の再発見
1953	McCarthy による Takagi 関数の類似の発見
1957	de Rham による Takagi 関数の再発見
1984	Hata and Yamaguti による Takagi 関数の一般化 [?]
1991	Sekiguchi と Shiota による Takagi 関数の一般化
1995	Matsumoto, Tokushige らによる Takagi 関数の一般化

[18] 当然, 仮定 $\alpha\beta > 4$ は強すぎる仮定である. これがどこまで弱められるのか, 筆者は知らない.

Lagrange のころには関数の微分可能性は疑われることもなかったが, それから 100 年もせぬうちに微分できない連続関数という病的なものの存在は知れ渡ったのである. しかし, これは単に病的な例外なのであろうか？微分できない関数の存在を認めないわけにはいかなくなったが, これに対する数学者の態度は（少なくとも発見の当初は）つれないものであった. たとえば,

> かつては新しい函数が作られるとすれば, それは何か実用上の目的を達するためであった. 今日では, 人はただ先人の推理の謬まりを探し出すために殊更に作り出すのであって, これからは, このこと以外得るところは何ものもないのである. [?][133 ページ]

エルミートも次のように述べている.

> Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées $\cdots$ [C. Hermite, [?] (318 ページ)]

時代がさらに下っても偏見は残っている. Takagi 関数の発見者である高木貞治さえ解析概論 [?] においては Takagi 関数を継子扱いしているように思える.

このように蛇蝎のように嫌われた関数もふしぎなことに徐々に光が当たってくるようにになるのは歴史の不思議である. 微分できない連続関数は単なるやっかいものであって, 無視することができるならばその方がよいという態度は徐々に消えて行くことになる. 物理現象の様々なモデルにはそうした関数が現れるのであり, 無視することはできないのである. たとえば, ブラウン運動のほとんどすべての軌跡が連続だけれども微分できない関数になることがあげられる. この事実は 1923 年に N. Wiener によって示されたものである ([?, 39 ページ])[19]. また, 現代ではフラクタル集合やフラクタル関数が物理学的にも応用があることが認識されているが, 微分できないけれども連続な関数はフラクタルの代表選手であることが多い.

連続だが微分可能でない関数の実例ははいくらでもあるのだけれども次の例は歴史的な意義があるので少し説明することにする.

例 11.1 Bolzano の例. B. Bolzano [?] の 487 ページ. 平面の 2 点 (a, A), (b, B) を結ぶ線分が与えられたとき, この線分を次のような 5 点

$$(a, A),\ \left(a + \frac{3}{8}(b-a), A + \frac{5}{8}(B-A)\right),\ \left(\frac{1}{2}(b+a), \frac{1}{2}(B+A)\right),$$

$$\left(a + \frac{7}{8}(b-a), A + \frac{9}{8}(B-A)\right),\ (b, B)$$

を結んだ折れ線で置き換える. 4 本の新たな線分ができるから, それぞれの小線分に同じ操作を施す. $f_0(x) = x\ (0 \le x \le 1)$ から始めてこの操作を無限に繰り返したときにできる関数を Bolzano 関数と呼ぶ.

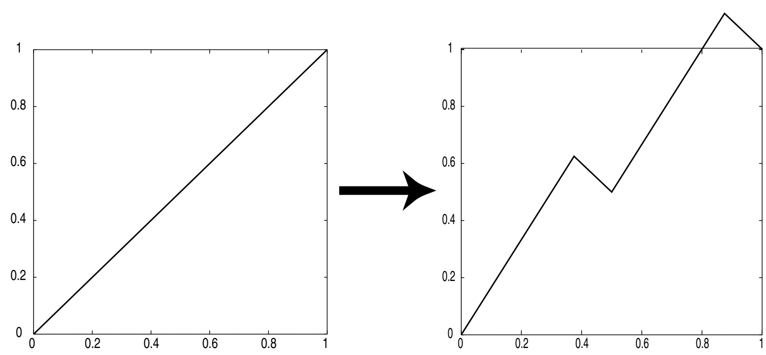


図 6: Bolzano の操作.

[19] その証明についてはたとえば [?] を参照せよ

Bolzano 関数は $[0,1]$ で連続であり，すべての点で微分不可能であることが知られている ([**?**]). [**?**, §111]([**?**, §75]) を読めばわかることであるが, Bolzano 自身は至るところ微分不可能ということを考えていたわけではなく，「連続だが, どのような小区間でも単調でない関数」の例としてこれを考えていたらしい. [**?**] の 507–508 ページでは稠密な点において微分不可能であることを指摘しているから、彼の意識は相当現代的であったと言う事ができる。この関数がすべての点で微分不可能であることを最初に証明したのは Rychlik で, 1922 年のことであるという. [**?**] 参照.

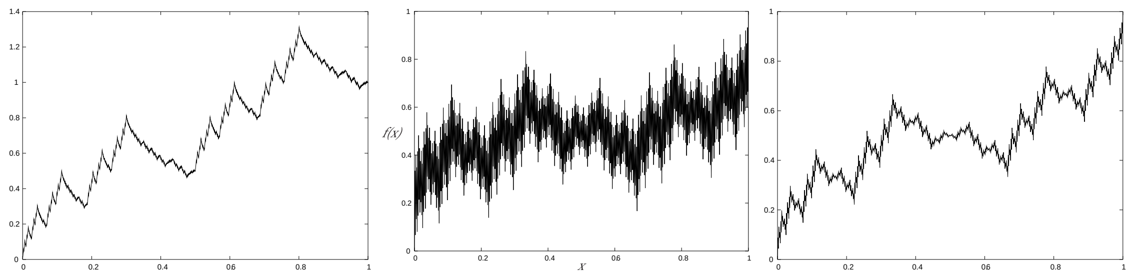


図 7: Bolzano の関数 (左). Perkins の関数 (中央). Bourbaki の関数 (右).

Bolzano の関数は次のように拡張することができる. まずパラメーター $a \in (0,1)$ を用意する. 任意の線分 PQ $(P=(x,y), Q=(x+h,y+k))$ が与えられたとき, 点 M を $M=(x+ah, y+(2-a)k)$ で定義し, 線分 PQ を折れ線 PMQ に置き換える操作を Φ で表すことにしよう. 任意の線分に対しそれを中点で二つに分け, その各々の小線分に操作 Φ を施す. この操作を $f_0(x)=x \quad (0 \le x \le 1)$ から初めて無限に繰り返すときにできる関数を B_a とする. $B_{3/4}$ が Bolzano の関数である.

♢ ♢ ♢

結局, 微分できない関数はいくらでも存在することがわかったのであるが, これはまことに都合が悪い. 微積分学の手法が使えない世界では, 偏微分方程式が取り扱えないし, 偏微分方程式が扱えないのでは数理物理学への応用は限られたものになってしまう. 従って, 何らかの意味で微分不可能性を克服あるいは回避する必要があるが, これを可能にしてくれるのが超関数 (distribution) の理論である.

いわゆる病的な (pathologocal) 関数については [**?**] がその歴史について論じている. また, 多くの例が [**?**] にまとめられていて便利である. どちらもよい文献であるが, [**?**](特に後半) はかなり専門的である.

Kline[**?**, 177 ページ] は

> In one respect it was fortunate that Weierstrass's example[20] came late in the development of the calculus, for, as Picard said in 1905, "If Newton and Leibniz had known that continuous functions need not necessarily have a derivative, the differential culculus would never have been created." Rigorous thinking can be an obstacle to creativity.

と述べているが, 筆者もその通りであると思う.

12　付録：関数の定義の変遷

Johann Bernoulli の関数の定義 On appelle ici Fonction d'une grandeur variable, une quantite de quelque maniere que ce foit de cette grandeur variable & de constantes. (Opera Omnia, vol. I & II, Georg Olms (1968) 元々は 1742 年の出版.)

[20] a continuous but nowhere differentiable function

Euler の関数の定義 1 ある変化量の関数というのは, その変化量といくつかの数, すなわち定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう. [?]

Euler の関数の定義 2 Those quantities that depend on others in this way, namely, those that undergo a change when others change, are called functions of these quantities. This definition applies rather widely and includes all ways in which one quantity can be determined by others. Hence, if x designates the variable quantity, all other quantities that in any way depend on x or are determined by it are called its functions. [?]

注意 12.1 (Euler の定義の補足) 定義 1 までは, 多項式, 指数関数, 三角関数, 対数関数, べき級数が関数の主役であった. 陰関数も関数と認めていた. 特に逆関数も関数と認めている. べき級数は多項式の極限であり, Euler にとって, 『f_n が関数で $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ならば f も関数である』という命題は暗に仮定されている. f が関数ならばそれには原始関数が存在するということも暗黙のうちに仮定されていたから, 『関数に積分操作をしても関数になる』という命題も認められていた. Euler はゼロ次 Bessel 関数を定義している. 常微分方程式の解として定義される関数もあることを認めている. （常微分方程式の解は多くの場合にべき級数で書ける.）

注意 12.2 (Euler は何故ほんの数年で関数の定義を広くしたのか？) 振動弦の問題：偏微分方程式の解は関数たり得るのか？波動方程式や熱方程式の研究が, 関数概念の拡張を数学者に強制した.

Lagrange(1797 年), Fourier(1822 年), Cauchy（1822 年): ここでは関数がなんであるか, はっきりとは定義せず. Euler の定義で満足しているようである。

Cauchy [?]. いろいろの変数の間に, その中の１つの値を与えたとき, それからほかの変数の値を, ことごとく決めることができるような関係があったら, 通例はこの中の１つのもので表された変数を考える. この１つのものを「独立変数」と名づけ, その独立変数によって表されるほかの変数を, この変数の「函数」と呼んでいる. (これは Euler の定義 2 とほぼ同じとみなしてよかろう.)

Fourier J. Fourier, Theorie de la Chaleur, (1822): 英訳 by A. Freeman, The Theory of Heat, (1878). Fourier は全く任意の関数」という言葉をひんぱんに用いている. 例：

"The function f(x) denotes a function completely arbitrary, that is to say a succession of given values, subject or not to a common law, and answering to all the values of x included between 0 and any magnitude X."

と定義している. Fourier の著作は極めて画期的なものである. 彼は定義域という言葉こそ使っていないが, 定義域というものを意識しているとおぼしき表現が随所に見られる.

Dirichlet Dirichlet の例（1829 年）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

Dedekind Dedekind の定義 (1887 年)

デーデキント, 数について, 岩波文庫 (1961). 65 ページ. 一つの集合 S の「写像」とは, 一つの法則のことであって, この法則に従って S のひとつひとつの確定した要素 s に確定した事物が「属し」, これを s の「像」といい, $\varphi(s)$ で表す. …集合の写像の例としては, その要素に確定した記号または名前を付けるだけでもよい

法則とは何か？対応とは何か？ これは結局のところ未定義用語である.

Peano の定義. S を集合とせよ. 直積集合 S × S を定義せよ. S × S の部分集合 R で, (x,y) ∈ R, (x,z) ∈ R ならば y=z となるものを関数とよぶ. しかし, 彌永昌吉&彌永健一著, 集合と位相, 岩波書店 (1976) によると, 集合の定義が終わる前に写像が定義されている.

Bochner 「関数」という観念は, 数学や科学に対して最高級の重要性をもつ数学的対象である. この観念を記述するには「対応」という言葉を使うのと「関係」という言葉を使うのと二つの主な道があって, 両方ともよく意味を明らかにしてはくれる. しかし本当をいうと, 関数の観念は定義可能なものではなく, 定義のつもりでいるもの (would-be definition) も実際は同語反復であるにすぎない. (ボホナー, 科学史における数学 (村田 全, 訳), みすず書房 (1970), S. Bochner, The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton University Press (1966) の和訳.) の 164 ページ.

Weyl だれも函数とは何であるかを説明することはできない, しかしこれは数学において真に重大な事柄である. （ヘルマン・ワイル, 数学と自然科学の哲学, 岩波書店 (1959) の 9 ページ）