Date: 1999. 2. 23.

タイトル TITLE	ウェーブレット解析の工学的応用について		
講演者 NAME	山田 道夫	所属 INSTITUTION	東大数理科学 / 京大数理研

ウェーブレット解析は、石油探査における時系列解析を発端として 1980 年代に開発された手法であり、時間と周波数に関して同時に局在化した情報を取り出せることから、それまでフーリエ解析に満足していなかった理工学分野に急速に広まり応用研究が行なわれるようになった。

当初ウェーブレットは関数の不連続性を検出するための積分変換 (連続ウェーブレット変換) として定式化された。これは変換関数が周波数と時刻を変数とする 2 変数関数で「周波数スペクトルの時間変化」を語れる形式になっていたが、変換が onto ではないため、フィルター操作が不自由であり応用的には不便な場合があった。この点を解決したのが 85 年に Meyer によって開発された離散直交ウェーブレットで、以後さまざまのタイプのウェーブレットが開発されることになった。

フーリエ解析が苦手とする局所周波数解析に対する需要は、昔から自然科学の多くの分野にあって、類似の、しかしそれぞれ独立した手法が開発されていた。その意味では、ウェーブレットは、古くからの手法の新しいヴァージョンであって「全く新しい斬新な手法」ではない。ウェーブレットは、むしろ、これら多くの分野にあった別々の手法に統一的な枠組みを与え標準化することに成功したことに意味がある。

ウェーブレット解析が良く使われる分野には以下のようなものがある。

- 時系列データ処理 (局所周波数解析など)
- 画像処理 (通信効率化、雑音除去など)
- 数値解析 (前処理、演算子表現など)
- その他

身近で行なったいくつかの例を挙げる。

音声信号処理

もともと音声は周波数スペクトルが時間的に変化してこそ意味がある。従来は窓つきフーリエ変換が多く用いられてきたが、時間分解能の点でウェーブレット変換の方が有利であり、単純な連続ウェーブレット変換でも従来のものをかなり改善する場合がある。この分野は長い研究史があり、ウェーブレット解析は音声解析システムの部分品としてすでに組み込まれている。

画像データ処理

ここでは気象用レーダー画像への応用を示す。目的は竜巻などの元になるメソサイクロンと呼ばれる直径数 Km 程度の大気の渦巻きの検出である。アメリカ中西部では毎年春に強い竜巻が発生し被害を及ぼすため、竜巻のリモートセンシングは重要な課題である。2 次元連続ウェーブレット変換をデータ処理に応用することにより、データからの雑音除去や渦の位置・強さの推定に有望な結果が得られている。

数値解析: スケール変換不変な作用素

スケール変換不変な作用素を扱う数値解析ではその作用素を対角化する基底を用いるのがよいが、時間 - 周波数面での局在性を持つ基底は存在しないのが普通である。そこで、作用素の表現行列をブロック対角化あるいは半ブロック対角化する双直交ウェーブレットを利用することが考えられる。一般に双直交ウェーブレットは、双直交性を考慮した 2 つの多重解像度解析に関する基本および共役なシンボル $m_0(\omega), \tilde{m}_0(\omega)$ を与えることによって構成される。方程式 $Au(t) = f(t)$ の基本および共役スケーリング関数によるスケール j におけるウェーブレット - ガレルキン表現は、作用素 A の表現行列 $\mathbf{K_j}$、および関数 $u(t), f(t)$ の展開係数ベクトル $\mathbf{c_j}, \tilde{\mathbf{s}}_\mathbf{j}$ を用いて、

$$\mathbf{K_j c_j} = \tilde{\mathbf{s}}_\mathbf{j}$$

となり、さらにスケール $j-1$ への分解を行なうと、行列 $\mathbf{K_j}$ は次のようにサイズが半分の 4 つの行列によって表される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_{j-1}} & \mathbf{\Lambda_{j-1}} \\ \mathbf{\Delta_{j-1}} & \mathbf{\Gamma_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c_{j-1}} \\ \mathbf{d_{j-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbf{j-1}} \\ \tilde{\mathbf{t}}_{\mathbf{j-1}} \end{bmatrix}$$

いま $j=1$ に対し左辺の行列がブロック対角になるためにはまず $\mathbf{\Delta_0}=\mathbf{\Lambda_0}=0$ が必要であり、このためには基本シンボル $m_0(\omega)$ と共役シンボル $\tilde{m}_0(\omega)$ の間に、

$$\tilde{m}_0(\omega)=\frac{m_0(\omega)g(2\omega)}{|m_0(\omega)|^2g(2\omega)+|m_0(\omega+\pi)|^2g(2\omega+2\pi)}$$

の関係が成り立てばよい。ここで $g(\omega)$ は作用素 A に付随する関数

$$g(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{A}[\omega+4n\pi]|\hat{\phi}(\omega/2+2n\pi)|^2 \qquad (\hat{}\ \text{はフーリエ変換})$$

である。これらのことから、一般の j に対して作用素 A の表現行列がブロック対角化されるためには、(1) 作用素 A がスケール不変、(2) 共役シンボルが発散しない、(3) $g(\omega)$ が実または純虚の関数、であればよいことが分かる。またこれらの条件のうち (1) と (2) だけが成り立つときには、表現行列は半ブロック対角化される。

この方法によって、Riesz ポテンシャル、微分 Hilbert 変換、などをブロック対角化する双直交ウェーブレットを作ることができる。また Abel 変換などは、ブロック対角化できないものの半ブロック対角化する双直交ウェーブレットの構成が可能である。半ブロック対角化さえ不可能な場合は、例えば奇数階微分作用素 (d^l/dx^l, l は奇数) である。しかしこの作用素はブロック対角化可能な 2 つの作用素の和に書くことができ、しかもこの場合、作用素の逆をとるのに必要な実用上の手続き回数を $O(n)$ とすることができ、実用的な高速アルゴリズムを得ることができる。

このような作用素の一つの応用は、地震データ補正とその積分処理である。この方法は地震の加速度記録データを念頭においたものであり、雑音除去・基線補正、および速度データを得るための積分操作を実行するものである。