フラクタルにしみ込む拡散過程について
- ベソフ空間論の応用 -

熊谷　隆（京都大学数理解析研究所）

「$\mathbf{R}^N$ 内に複雑な形をした媒体の集合 $\{K_i\}_{i=1}^M$（$M=\infty$ でも構わない）があるとき、各 K_i の中では K_i の熱拡散に応じたブラウン運動、外では $\mathbf{R}^N$ 上の普通のブラウン運動をするような拡散過程を構成することができるだろうか？また、構成できたとすると、その拡散過程はどのような挙動をするだろうか？」
素朴な問題意識ではあるが、このような拡散過程の解析は、点在する石油を効率よく採掘する、不純物をある割合で混ぜて金属の強度を高めるといった現実の問題ともつながりうる問題である。そこで、このような物体 K_i が構造上持ち得る性質として、細部の構造が全体の構造と類似しているという自己相似性を仮定し、この自己相似性を手がかりに解析をすすめようというのが我々のアプローチである。具体的なモデルとして（ここで現実とはかなり隔たりがでるが）、各 K_i が nested fractal と呼ばれるフラクタル（Sierpinski gasket を典型例とするフラクタルのクラス）の場合にこの問題に取り組んだ成果が、今回の講演内容である。講演では、以下の 3 つの結果を紹介する予定である。

(A) 上述した、各 K_i に ”しみ込む” 拡散過程 $\tilde{X}_t$ の構成

(B) $\tilde{X}_t$ の熱核の短・長時間評価

(C) $\tilde{X}_t$ の短時間挙動における most probable path（対応する action integral の値を最小にするパス）の導出（大偏差原理）

各 K_i 上には反射壁ブラウン運動が構成でき、これに対応するディリクレ形式 $\mathcal{E}_{K_i}(\cdot,\cdot)$（$R^N$ 上のブラウン運動の場合、$\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla f(x)|^2dx$ にあたるもの）の定義域は、ベソフ空間と呼ばれるソボレフ空間を一般化した関数空間になることが証明できる。そこで、2 次形式

$$\tilde{\mathcal{E}}(f,f)=\sum_{i=1}^M \mathcal{E}_{K_i}(f|_{K_i},f|_{K_i})+\int_{\mathbf{R}^N\setminus\cup_i \mathrm{Conv}\ (K_i)}|\nabla f(x)|^2dx$$

（Conv は凸閉包のこと）を考え、この 2 次形式が然るべき $\mathbf{L}^2$- 空間上で可閉であり、 local, regular という良い性質を持っていることを示すことにより、この 2 次形式に対応する拡散過程が存在することを示す。その際、ベソフ空間論における古典的なトレースの理論が有用である。

講演では、フラクタル上のブラウン運動（対応するラプラス作用素）の構成と、その基本的な性質についても簡単に紹介する。