漸近展開とミラー対称性

漸近展開とシンプレクティック幾何学の関係は古典的である．すなわち，余節束 T^*M 上のシンプレクティック幾何学，たとえば，ラグランジュ部分多様体，接触変換，マスロフ指数などが，線形偏微分方程式の漸近的研究に多く用いられる．

ここでは，コンパクトなシンプレクティック多様体と，非線形方程式の漸近展開の関係の一例を説明したい．

コンパクトなシンプレクティック多様体としては，リッチ曲率が 0 の計量を許容するケーラー多様体 M であって，ラグランジュトーラスをファイバーとするファイバー束を持つもの，$M \to B$ を考える．ただし，特異ファイバーを持つ場合も許す．

（余節束の場合ファイバーは $\mathbf{R}^n$ だったが，ここではそれがトーラスになる.）

将来の目的としては，次のような対象の，ファイバーがつぶれていく極限での漸近解を，B 上の常備分方程式を用いて記述したい．

（１）M 上のリッチ曲率 0 の計量 g.

（２）M 上のベクトル束 E のエルミートアインシュタイン接続 ∇.

（３）g についての調和形式．あるいは接ベクトル束係数の調和形式.

（４）(E, ∇) のコホモロジーの代表元をあたえる調和形式．特に E の正則な切断.

（１），（２）は非線形方程式の漸近解を求めることになり，これは場の量子論におけるファインマンのやり方を用いると，ファインマン図についての足しあげになり（ただし Tree のみがファインマン図として現れる），その係数は常備分方程式を用いて記述されると期待される．このファインマン図は，モース理論（多価関数のモースホモトピー論）をへて，別の多様体 $M^* \to B$ への，リーマン面からの写像によって記述されると期待され，それによってミラー対称性の説明が付くと考えられる．

現在できている部分はそれほど多くないが，考え方と，できている部分が何かを説明したい．