Date: 2004. 10. 20.

<table>
<tr><td>タイトル
TITLE</td><td colspan="3">WKB 解析と（高階）Painlevé 方程式
— WKB 解析と “可積分性” の関連をめぐって —
WKB analysis and (higher order) Painlevé equations
— On a relationship between WKB analysis and “integrability” —</td></tr>
<tr><td>講演者
NAME</td><td>竹井 義次
TAKEI, Yoshitsugu</td><td>所属
INSTITUTION</td><td>京大・数理研
RIMS, Kyoto University</td></tr>
</table>

100 年余り前 Painlevé と Gambier によって発見された Painlevé 方程式は,「解の動く特異点は極のみである」や「線型方程式系のモノドロミー保存変形を記述する方程式である」といった非常に良い性質（“可積分性”）をもつ２階の非線型常微分方程式である．講演者は 1990 年代半ばに，河合隆裕（京大数理研）氏や青木貴史（近畿大理工）氏達と共同で,（完全）WKB 解析の視点からこの Painlevé 方程式の研究を行った．本講演では,特に WKB 解析と “可積分性” の関連性に注目した Painlevé 方程式に対する WKB 解析の理論の見直しと，それに基づく高階 Painlevé 方程式への WKB 解析の拡張についてお話ししたい．

（完全）WKB 解析においては，WKB 解と呼ばれる形式解の Borel 和の性質を調べることが中心課題である．この WKB 解の Borel 和の解析を通して，例えば最も典型的な２階の線型常微分方程式の場合，モノドロミー群等の解の大域的な性質が，微分方程式の主部が定める特性方程式の根（“特性根”）の周回積分を用いて記述されることが示される．これと同様な構造が非線型方程式である Painlevé 方程式の場合にも存在する．すなわち，Painlevé 方程式のゼロパラメータ解と呼ばれる特別な形式解での Fréchet 微分（線型化方程式）を考えれば，その特性根の周回積分が Painlevé 方程式の解の大域的な性質を統制している．ここで興味深いのは，この Fréchet 微分の特性根の周回積分が，モノドロミー保存変形を通じて Painlevé 方程式に付随する線型方程式系（“Lax pair”）の特性根の周回積分と関係づけられることで，その結果，例えば一般には楕円積分等により表される Fréchet 微分の特性根の周回積分が簡単に求積できることになる（Painlevé 方程式の “可積分性” の一つの帰結！）．

実は，この Fréchet 微分の特性根の周回積分と Lax pair の特性根の周回積分との間の関係は，代表的な高階 Painlevé 方程式に対してもほぼそのままの形で成立し，高階 Painlevé 方程式への WKB 解析の拡張の基礎となる．講演の中では，高階 Painlevé 方程式への WKB 解析の拡張がどの程度まで達成されたかについても触れる予定である．