Date: 2004. 10. 13.

タイトル TITLE	**Small-time asymptotic estimates in local Dirichlet spaces**		
講演者 NAME	**日野 正訓**	所属 INSTITUTION	**京大・情報**

$\mathbb{R}^n$ における熱方程式の初期値問題 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u$, $u(0,x) = f(x)$ の解は，熱核密度関数 $p_t(x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\dfrac{|x-y|^2}{2t}\right)$ を用いて $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(x,y)f(y)\,dy$ と表せる．$T_t f = u(t,\cdot)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ として $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の熱半群 $\{T_t\}_{t>0}$ が定まる．また $p_t(x,y)$ の短時間漸近挙動として特に

$$\lim_{t\to 0} 2t\log p_t(x,y) = -|x-y|^2, \quad x,y \in \mathbb{R}^n \tag{$*$}$$

を得る．右辺に x と y の距離が現れるのは偶然ではなく，同様の漸近式が広いクラスのリーマン多様体上の 2 階放物型偏微分方程式の基本解について成立することが知られている．

さて，上の熱方程式に対しては，$\mathbb{R}^n$ 上のブラウン運動及び $\mathbb{R}^n$ 上のエネルギー形式 $\mathcal{E}(f,g) = \dfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla f, \nabla g)\,dx$, $f,g \in H^1(\mathbb{R}^n)$ が，それぞれ確率論的，解析的な付随物として対応し，関係式 $(*)$ には確率論的解釈を与えることもできる．またディリクレ形式の一般論として，広いクラスの抽象空間において，対称マルコフ過程と対称ディリクレ形式（エネルギー形式の一般化）との間の１対１の対応関係が知られており，例えば種々の無限次元空間上における標準的な確率過程がディリクレ形式を用いて構成され，その性質を調べることが様々な見地から行われている．

このような研究の背景をふまえ，本講演では対称ディリクレ形式が与えられたときに $(*)$ に類似した漸近評価式が底空間に依存せず普遍的に成立することを紹介する．常に対応する密度関数が存在するとは限らないので，定式化には修正が必要である．定理の主張は以下の通り．

定理 (H-J. A. Ramírez, 有吉-H) $(X,\mathcal{B},\mu)$ を σ-有限測度空間, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X,\mu)$ 上の強局所対称ディリクレ形式とする．$\{T_t\}$ を対応する $L^2(X,\mu)$ 上の半群とする．A, B を $\mu(A), \mu(B) \in (0,\infty)$ なる $\mathcal{B}$ の元とするとき，$P_t(A,B) := \int_X 1_A \cdot T_t 1_B\,d\mu$ に対して次式が成立する．

$$\lim_{t\to 0} 2t\log P_t(A,B) = -\mathsf{d}(A,B)^2.$$

ただしここで $\mathsf{d}(A,B)$ は集合 A, B 間の内在的集合間距離と呼ばれる量で，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 及び A, B から直接定義される値である．

時間に余裕があれば，ループ群などの具体的な無限次元空間における標準的なディリクレ形式に関して，上記の $\mathsf{d}(A,B)$ が幾何学的な表示を持つことについても述べる．