Date: 2004. 11. 10.

タイトル TITLE	**Nash 不等式の局所化と熱核の Li-Yau 型の空間非一様な漸近評価**		
講演者 NAME	**木上 淳**	所属 INSTITUTION	**京大・情報**

Nash は 1958 年の論文 [3] で放物型の偏微分方程式の基本解の漸近挙動の研究をおこなった。彼の結果を現代流に書き直すためにまず枠組みを準備する。

(X,d) を局所コンパクトな距離空間、μ を (X,d) 上の Radon 測度、$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X,\mu)$ 上の local regular Dirichlet form とする。($\mathcal{F}$ は $L^2(X,\mu)$ の部分集合、$\mathcal{E}$ は $\mathcal{F}$ 上の非負 2 次形式) さらに L を

$$\mathcal{E}(u,v) = -\int_X u(Lv)d\mu$$

をみたす non-positive self-adjoint operator, $t > 0$ に対して $T_t = e^{Lt}$ とする。ここで

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$$

の基本解を $p(t,x,y)$ とおく。すなわち、

$$(T_t u)(x) = \int_X p(t,x,y)u(y)d\mu_y$$

である。この枠組みは、広い範囲に適応できる。例えば

(A) X は $\mathbb{R}^n$ の領域、d はユークリッドの距離、μ はルベーグ測度、$\mathcal{F} = W^{1,2}(X)$,

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_X \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$$

このとき L はラプラシアンである。

(B) X は Riemann 多様体、d は geodesic distance, μ は Riemannian volume,

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_X (\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v)_x d\mu$$

ただし、$(\cdot,\cdot)_x$ は Riemannian metric. このとき L は Riemann 多様体に付随する自然なラプラシアンである。

(C) X は Sierpinski gasket（自己相似集合）, d はユークリッドの距離（の X への制限）, μ は Hausdorff 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は X 上の自己相似的な Dirichlet form. このとき L はいわゆる Sierpinski gasket 上の standard Laplacian

さて Nash の結果は、

Theorem 1. 任意の $u \in \mathcal{F} \cap L^1(X,\mu)$ に対して

$$\mathcal{E}(u,u)||u||_1^{4/\theta} \geq c||u||_2^{2+4/\theta} \tag{1}$$

が成り立つならば、 任意の $t>0$ で

$$\sup_{x,y\in X} p(t,x,y) \leq c' t^{-\theta/2} \tag{2}$$

(1) は Nash 不等式と呼ばれる。その後、Carlen-Kusuoka-Strook[1] により、Nash 不等式と (2) は同値であることもわかっている。つまり Nash 不等式は空間一様な熱核の上からの評価と同値なのである。

一方 1986 年に Li-Yau[2] は次の結果を得た。

Theorem 2. X を *Ricci* 曲率が非負の完備な *Riemann* 多様体とする。$X.d,\mu$ を *(B)* で与えたものとすれば、任意の $t>0$, 任意の $x,y\in X$ に対して、

$$\frac{c_1}{V(\sqrt{t},x)}\exp\big(-\frac{d(x,y)^2}{c_2 t}\big) \leq p(t,x,y) \leq \frac{c_3}{V(\sqrt{t},x)}\exp\big(-\frac{d(x,y)^2}{c_4 t}\big), \tag{3}$$

ただし、$V(r,x)=\mu(B_r(x))$, $B_r(x)$ は x を中心とする半径 r の球。

(3) は特に空間 x に関して非一様性を許す次の評価を導く。

$$p(t,x,x) \leq \frac{c}{V(\sqrt{t},x)}. \tag{4}$$

これに対して、Nash 不等式から導かれる (2) は空間一様な評価であった。

本講演では、(4) に見られるような空間非一様な熱核の漸近挙動をとらえるために Nash 不等式の自然な拡張（局所 Nash 不等式）を導入する。さらに局所 Nash 不等式と (3) 型の熱核の評価の関係についても述べる。また応用として、上記 (C) の場合に、楠岡によって与えられたフラクタル上の可測 Riemannian metric に対応する熱核の漸近評価において Riemann 多様体のアナロジーが成立することを解説する。

参考文献

[1] E. Carlen, S. Kusuoka, and D. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré **23**(1987), 245–287.

[2] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153 –201.

[3] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. **80** (1958), 931–954.