Date: 2004.4.14

タイトル TITLE	Well-posedness of the Cauchy problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition		
講演者 NAME	堤　誉志雄	所属 INSTITUTION	京大・理

偏微分方程式を研究するときのもっとも基本的な問題の一つは，解が存在するかどうかであろう．しかし実際には，解が存在するだけでは不十分なことが多く，妥当と思われるいくつかの “条件” を満たす解が存在するかどうかと言うことが問題となる．この問題を Hadamard は，適切性 (well-psoedness)・不適切性 (ill-posedness) という概念を導入することによって定式化した．現在では Hadamard の定式化に従い，ある偏微分方程式の境界値問題または初期値問題が，ある関数空間からデータを持ってきたときに必ず解を唯一つ持ち，さらにデータの変動に対して解も連続的に変化する場合，その問題は考えている関数空間で適切であると言い，そうでない場合は不適切であると言う．(すなわち適切性とは，解の存在・一意性・データに関する連続依存性の三つを合わせた概念である．) 解が存在しても，一意性やデータに関する連続依存性が崩れる例は，いくつも知られている．今回は，流体力学やプラズマ物理で現れる mKdV 方程式 (modified Korteweg-de Vries equation) を例に取り，初期値問題の適切性・不適切性と関数空間の関係について解説したい．

具体的には，次のような問題を考える．

(1) $$\partial_t u + \partial_x^3 u + u^2 \partial_x u = 0, \quad t \in [-T, T], \quad x \in \mathbf{T},$$

(2) $$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{T}.$$

ここで，T は解の存在時間を表すある正定数で，$\mathbf{T}$ は 1 次元トーラスを表す．この初期値問題の適切性については，すでに多くの結果が知られている．特に最近，Bourgain [1] と Kenig, Ponce and Vega [2] によって，“$u_0 \in H^s(\mathbf{T})$, $s \geq 1/2$ のとき，初期値問題 (1)-(2) は時間局所的に適切である” ことが示された．また，Kenig, Ponce and Vega は，フーリエ制限法と言う彼らが用いた証明方法では，ソボレフ空間 $H^s(\mathbf{T})$ の指数 s を 1/2 より下げることはできないことも示している．彼らの証明は非常に精緻なもので新しいアイディアを豊富に含んでおり，その後の非線形分散型方程式研究に大きな影響を与えた．しかし実際に，空間 $H^s(\mathbf{T})$ に対し $s < 1/2$ のときは，初期値問題 (1)-(2) が不適切になるのか，あるいは彼らとは別の手法を用いれば適切性が示せるのか，と言う問題は未解決のままであった．講演では，この問題の背景と最近の進展について解説する．

REFERENCES

[1] J. Bourgain, Geometric and Functional Analysis, 3 (1993), 209–262.

[2] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 573–603.