

ヒドラ再生実験のシミュレーションの数学的検証

東北大学大学院理学研究科 高木 泉

1952年、Alan Turing は二つの異なる拡散率をもつ化学物質が反応すると空間的に一様な状態が不安定化し得ると云う「拡散誘導不安定化」の原理を発見した。彼は、生物の形態形成のメカニズムをこの観点から説明できると考えた。

Turing のアイデアを具体化し、1972年 Alfred Gierer と Hans Meinhardt は「短距離活性化と長距離抑制」から成り立つ次のような反応拡散系を提唱した：

$$\begin{cases} A_t = \varepsilon^2 A_{xx} - A + \rho_a(x) \frac{A^p}{H^q} + \sigma_a(x) & (0 \leq x \leq \ell, \quad t > 0) \\ \tau H_t = D H_{xx} - H + \rho_h(x) \frac{A^r}{H^s} & (0 \leq x \leq \ell, \quad t > 0) \\ A_x = H_x = 0 & (x = 0, \ell, \quad t > 0) \end{cases}$$

ここで、 ε, D, τ は正定数であり、 $\rho_a(x), \rho_h(x), \sigma_a(x)$ は正值函数である。また、 $p > 1, q > 0, r > 0, s \geq 0$ であって

$$\frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}$$

とする。活性因子 $A(x, t)$ は細胞の変化を促進する物質で、それが多く集まったところから分化や分裂が始まるとされる。抑制因子 $H(x, t)$ は活性因子の自己触媒的増殖を抑えて系を安定化する役割を果たす。

$\rho_a(x), \sigma_a(x), \rho_h(x)$ はもともと細胞に含まれている位置情報（極性）を反映した振幅の小さな函数とされる。

ヒドラは体長数 mm 程度の小動物である。ヒドラの頭部と足部を切除し、頭部付近を腹部に移植すると、そこから頭が再生する。Gierer と Meinhardt はいくつかの数值シミュレーションの図を挙げて、この再生現象を説明した。

本講演では、数学的観点から、この説明の妥当性を検証する。果たして、このシミュレーションで「頭部付近の移植先から頭が再生する」ことが説明できているのだろうか…