フラクタル上の確率過程の解析

熊谷　隆
（京都大学大学院情報学研究科）

樹木状の物体や不純物が混ざった物質のような”複雑な”構造をした物の上では、熱や波はどのように伝わっていくのであろう？素朴でおもしろい問題であるが、単に”複雑”というだけで何の構造もないのでは理論的解析ができない。そこで、このような物体が構造上持ち得る性質として、その細部の構造が全体の構造と類似しているという自己相似性に着目し、この自己相似性を手がかりに解析を進めようとするのが、「フラクタル上の解析学」の大まかな描像である。本講演では、典型的なフラクタル上の確率過程（特に、ブラウン運動と呼んでよいもの）とその生成作用素について紹介し、これらの持つ性質を通じて主にフラクタル上の熱伝導について現在知られていることを紹介する。さらに時間があれば、これらの応用としてより現実に近い（と考えられる）モデルについての研究を紹介したい。

ここでは、典型的なフラクタルとしてSierpinski gasketと呼ばれる例を考える。（図1。講演では、Sierpinski carpet（図2）等も紹介する。）Sierpinski gasketは、平面内の長さ1の正三角形の頂点をa, b, cとした時、$F_1(x) = (x-a)/2 + a,\ F_2(x) = (x-b)/2 + b,\ F_3(x) = (x-c)/2 + c$について$K = F_1(K) \cup F_2(K) \cup F_3(K)$で定まる図形である。$\mathbf{R}^N$においても、$N+1$個の縮小率$1/2$の（例えば3次元の場合、正四面体の頂点をそれぞれ不動点にするような）縮小写像から、同様にしてKを決めることができる。

図1：Sierpinski gasket　　図2：Sierpinski carpet

この K の上にいかにして自然な確率過程を作り出せるであろうか？そこで V_m を、gasket 内の一辺の長さ 2^{-m} の正三角形の頂点全体とし、V_m 上にシンプルランダムウォーク $X_m(i)$ (i は時刻を表す。$X_m(i+1) \in V_m$ が $X_m(i) \in V_m$ の隣接点に等確率で存在するようなランダムウォーク）を作る。ここで時間を 5^m 倍スピードアップしてやり $X_m([5^m t])$ とすると、$m \to \infty$ で非自明な極限 $X(t)$ が存在することが証明でき（何故 5^m という取り方をすると良いのかは、講演中に説明する）、この極限を gasket 上のブラウン運動と呼ぶ。一般にこのような確率過程には対応する生成作用素がある訳だが、今の場合対応するラプラス作用素を、ラフに言って次のような形で直接定めることも出来る。

$$\Delta f(x) = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{x_i \text{ は } x \text{ の } V_m \text{ での隣接点}} f(x_i) - 4f(x) \Big) / 5^{-m} \qquad x \in \cup_{m\geq 0} V_m \setminus V_0. \tag{1}$$

Gasket の空間的な縮小率は $1/2$、時間スケールは 5 であるから、$d_w = \log 5 / \log 2$ として、このラプラス作用素は標語的に”d_w 階の微分作用素”であるといってもよいだろう。
次にこのブラウン運動の熱核（あるいは対応するラプラス作用素の熱方程式の基本解）$p_t(x,y)$ について、基本的な性質の一つを紹介する。$p_t(x,y)$ は、フォーマルに

$$\frac{\partial p_t(x,\cdot)}{\partial t} = \Delta p_t(x,\cdot), \quad \lim_{t\to 0} p_t(x,\cdot) = \delta_x(\cdot)$$

（δ_x は x に mass のあるデルタ関数）と表されるものであり、$\mathbf{R}^N$ 上のブラウン運動の場合これは $\frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} \exp(-|x-y|^2/2t)$ というガウス核である。$d_s = 2\log(N+1)/\log(N+3)$ とするとき、$p_t(x,y)$ は $0 < t \leq 1,\ x,y \in K$ において次のような評価を持つ。

$$c_1 t^{-d_s/2} \exp(-c_2 (\frac{d(x,y)^{d_w}}{t})^{1/(d_w-1)}) \leq p_t(x,y) \leq c_3 t^{-d_s/2} \exp(-c_4 (\frac{d(x,y)^{d_w}}{t})^{1/(d_w-1)}). \tag{2}$$

$d(x,y)$ は今の場合 x と y のユークリッド距離である。N 次元ユークリッド空間上の divergence form $\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ の場合、$d_w = 2, d_s = N$ として適当な条件の下この型の評価が成り立つことが、Aronson によって示されている。d_w は粒子の拡散のスピードを表すオーダーであり、ウォーク次元と呼ばれている。(2) より、時刻 t における粒子が平均して出発点から t^{1/d_w} の定数倍の距離にいることがわかり、gasket 上の拡散は $\mathbf{R}^N$ 上の拡散よりそのオーダーが小さい（$1/d_w < 1/2$）ため、sub-diffusive な拡散と呼ばれる。d_s は対応するラプラス作用素の固有値の漸近挙動等スペクトルの情報を表すオーダーであり、スペクトル次元と呼ばれている。
講演では、このブラウン運動の性質について、さらに詳しく述べていく。