1　はじめに

組合せ最適化問題の中でも最も研究されている問題の 1 つである安定集合問題（独立集合問題ともいう）を例とし、線形計画問題や半正定値計画問題がどのように組合せ最適化問題に利用されているか（私の専門分野）を、私の研究成果を交えながら紹介する。本アブストラクトでは、線形計画問題と半正定値計画問題に関する基本的なことがらと安定集合問題を簡単に紹介しておく。

2　線形計画問題

数理的に定式された最適化問題に対する解法を研究する分野である数理計画では、最も基本的でありかつ有用な問題である線形計画問題が有名である。線形計画問題とは、有限個の実変数からなる有限本の一次等式あるいは一次不等式（制約条件）と 1 つの一次関数（目的関数）が与えられたもとで、制約条件が定める領域内で目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題である。標準的な問題は形式的に、

$$\begin{array}{lrcl} \text{最大化} & c^T x & & \\ \text{制約条件} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{1}$$

のように記述される。ただし、$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ は定数行列、$b \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}^n$ は定数（縦）ベクトル、x は実変数ベクトルであり、c^T は c の転置を表す。制約条件を満たす x を実行可能解とよび、実行可能解の中で目的関数 $c^T x$ を最大化するものを最適解とよぶ。線形計画問題の重要性としては、効率的な解法（多項式時間解法）の存在と双対定理の 2 つがあげられる。多くの組合せ最適化問題に対して、線形計画問題の双対定理に基づいた効率的な解法が提案されている。ここでは、簡単に双対定理についてふれる。上記の線形計画問題 (1) に対して、次の線形計画問題

$$\begin{array}{lrcl} \text{最小化} & b^T y & & \\ \text{制約条件} & A^T y & \geq & c \end{array} \tag{2}$$

を双対問題とよび、(1) を主問題とよぶ。定義から次の定理が簡単に示せる。

弱双対定理　(1) の任意の実行可能解 x と (2) の任意の実行可能解 y に対して

$$c^T x \leq b^T y$$

が成立する。　／／

さらに次の定理が知られている。

強双対定理　主問題あるいは双対問題の一方が最適解を持つならば他方も最適解を持ち、さらにこれらの目的関数値が一致する。　／／

3　半正定値計画問題

線形計画問題は古典的な問題であるが、次に紹介する半正定値計画問題（ＳＤＰ）が近年注目を浴びている。ＳＤＰを定義する前に以下のような記号を導入しておく。

$\mathcal{S}^n$: $n \times n$ 実対称行列全体

$O \in \mathcal{S}^n$: ゼロ行列

$U \bullet V$: $U, V \in \mathcal{S}^n$ の内積 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} V_{ij}$

$U \succeq O$: $U \in \mathcal{S}^n$ が半正定値

与えられた定数行列 $A_i \in \mathcal{S}^n$ $(i = 0, \ldots, m)$ と定数ベクトル $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ に対して、標準系のＳＤＰは

$$\begin{array}{lrcl} \text{最大化} & A_0 \bullet X & & \\ \text{制約条件} & A_i \bullet X & = & b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & X & \succeq & O \end{array} \tag{3}$$

と定義される。線形計画問題の主問題 (1) で非負条件 $x \geq 0$ であったものが (3) では半正定性 $X \succeq O$ に置き換わり、他の制約条件や目的関数は線形であることに変わりはない。また、線形計画問題は A_i と X が対角行列に制限したＳＤＰとみなすことができる。線形計画問題と同様にＳＤＰにも双対問題が存在し、

$$\begin{array}{lrcl} \text{最小化} & b^T y & & \\ \text{制約条件} & \sum_{i=1}^m A_i y_i - Z & = & A_0 \\ & Z & \succeq & O \end{array} \tag{4}$$

となる。ただし、$y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ と Z が変数となる。定義から明らかなようにやはり次の弱双対定理が成立する。

弱双対定理　(3) の実行可能解 X と (4) の実行可能解 (y, Z) に対して

$$A_0 \bullet X \leq b^T y$$

が成立する。　／／

さらに強双対定理については線形計画問題よりも強い仮定を必要とするが以下のものが知られている。

強双対定理

1. 主問題 (3) に実行可能解で正定値行列となるものが存在するならば、主問題に最適解が存在すれば双対問題にも最適解が存在し、これらの目的関数値は一致する。

2. 双対問題 (4) に実行可能解で Z の部分が正定値行列となるものが存在するならば、双対問題に最適解が存在すれば主問題にも最適解が存在し、これらの目的関数値は一致する。

また線形計画問題と同様にＳＤＰに対しても多項式時間解法が知られている。

4　安定集合問題とその一般化

線形計画問題では、変数ベクトルの各要素は実数値を取ることができるが、線形計画問題の制約条件に「変数ベクトルの各要素が整数値である」という整数条件を追加した問題を整数計画問題という。特に、「変数ベクトルの各要素が 0 または 1 である」という条件を追加したものを $0-1$ 整数計画問題とよぶ。多くの組合せ最適化問題を $0-1$ 整数計画問題として定式化できるが、そのため $0-1$ 整数計画問題はＮＰ困難と呼ばれる難しい問題のクラスに属する。ここでは、$0-1$ 整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{制約条件} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \cdots, m \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \cdots, n \end{array}$$

の中でも特殊な問題、各制約不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ の左辺には非ゼロ係数が高々 2 つしか現れないような問題を考える。このとき、それぞれの制約不等式を次の 3 つの型

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\leq 1 \\ -x_i - x_j &\leq -1 \\ x_i - x_j &\leq 0 \end{aligned}$$

のどれかで置き換えることで等価な問題を得る。このように記述できる問題をここでは一般化安定集合問題とよぶことにする。また、安定集合問題とはこの 3 つの型の不等式のうち第 1 型のみの制約不等式で記述される $0-1$ 整数計画問題である。特殊な問題ではあるが、やはりクラスＮＰ困難に属する。

数学談話会においては、安定集合問題と一般化安定集合問題の関係や整数計画問題、半正定値計画問題の利用法について話をする。