旗多様体上の超幾何方程式とラドン変換

谷崎俊之（広島大学理学部）

0. Gelfand ([2], [3]) により導入されたグラスマン多様体上の一般超幾何微分方程式系の類似を一般の簡約代数群の旗多様体上で構成し，この方程式を D 加群論的見地から考察する (谷崎 [7]). またその解を与えるラドン変換を表現論的手法により解析する (Marastoni- 谷崎 citeMT).

1. V を $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, X を V 中の k 次元部分空間全体からなるグラスマン多様体とする. X 上の直積型ベクトル束 $X \times \wedge^k V$ の階数 1 の部分束 L を $W \in X$ におけるファイバーが $\wedge^k W$ となるものとして定める. このとき，群 $G = SL(V)$ が X に推移的に作用しており，また L は X 上の G 同変直線束である. L の切断に作用する微分作用素のなす環の層を $D_{X,L}$ とする. G の L への作用を微分して，リー代数の準同型 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \to \Gamma(X, D_{X,L})$ $(a \mapsto \partial_a^L)$ が定まる. G の極大トーラス K を一つ固定し $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ とする. いわゆるゲルファント超幾何方程式は L の切断を未知関数とする線形微分方程式であり，従って $D_{X,L}$ 加群に対応しているが，それは次の形をしている:

(1) $M_\xi = D_{X,L}/(J + \sum_{a \in \mathfrak{k}} D_{X,L}(\partial_a^L - \xi(a)))$.

ここで ξ は任意の (一つ固定した) $\mathfrak{k}$ の指標，また J は $D_{X,L}$ のある G 不変左イデアルである.

2. 次の観察が我々の出発点である: $D_{X,L}$ の G 不変左イデアルの集合と，ある (ヴァーマ加群と呼ばれる) $\mathfrak{g}$ 加群の部分加群の集合は，1 対 1 に対応し，この対応の元で，上にでてきた J は極大真部分加群に対応する. 従って，以下のような拡張が考えられる.

G を $\mathbf{C}$ 上の連結半単純代数群，P を G の放物型部分群とし，一般旗多様体 $X = G/P$ を考える．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$，$\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ とおく．$\mathfrak{p}$ の指標 λ に対して X 上の捻れ微分作用素の層 $D_{X,\lambda}$ およびリー代数の準同型 $\mathfrak{g} \to \Gamma(X, D_{X,\lambda})$ $(a \mapsto \partial_a^\lambda)$ が定まる ([1]，[4] 参照)．このとき，$D_{X,\lambda}$ の G 不変左イデアルの集合と，λ に対応する 1 次元 $\mathfrak{p}$ 加群を誘導してできる右 $\mathfrak{g}$ 加群 $M(\lambda)$ の部分加群の集合とは，1 対 1 に対応する（柏原 [4]）．J_λ を $D_{X,\lambda}$ の G 不変左イデアルであって，$M(\lambda)$ の極大真部分加群に対応するものとする．K を G の閉部分群とし，$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ の指標 ξ を選ぶとき，左 $D_{X,\lambda}$ 加群

(2) $\quad M_{\lambda,K,\xi} = D_{X,\lambda}/(J_\lambda + \sum_{a\in\mathfrak{k}} D_{X,\lambda}(\partial_a^\lambda - \xi(a)))$

は (1) のひとつの拡張になっている．しかし，(2) が面白い方程式であるためには G，P，λ，K，および ξ の取り方をうまく与えなければならない．実際，λ が一般なら，$J_\lambda = 0$ である．

3. P のべき単根基が可換な場合には $\mathfrak{p}$ の指標からなる有限集合 $\mathcal{A}$ があって，$\lambda \in \mathcal{A}$ に対する J_λ の具体的表示が存在する (谷崎 [6])．この場合に我々は以下の結果を得た (谷崎 [7])：ある種の $\lambda \in \mathcal{A}$ に対して，G の別の放物型部分群 $Q = Q_\lambda$ および $\mathrm{Lie}(Q)$ の指標 $\mu = \mu_\lambda$ であって，以下の条件を満たすものがとれる．$Y = G/Q$ 上の捻れ微分作用素の層であって μ に対応するものを $D_{Y,\mu}$ とする．左 $D_{Y,\mu}$ 加群 N に対してそのラドン変換 $R(N)$ が $D_{X,\lambda}$ 加群 (の複体) として定まる．$N_{\mu,K,\xi} = D_{Y,\mu}/\sum_{a\in\mathfrak{k}} D_{Y,\mu}(\partial_a^\mu - \xi(a))$ とおく．このとき自然な準同型 $M_{\lambda,K,\xi} \to R(N_{\mu,K,\xi})$ が定まる．(これは $M_{\lambda,K,\xi}$ に対応する微分方程式の解の積分表示を与える)．またさらに，Y が有限個の K 軌道からなるならば，$M_{\lambda,K,\xi}$ はホロノミー系である (これにより解空間は有限次元であることがわかる)．

4. 谷崎 [7] で行ったラドン変換の解析はどちらかというと代数幾何的手法によるものであったが，最近の Marastoni との共同研究において Borel-Weil-Bott の定理や Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution 等の表現論的手法を活用することにより，より詳しい結果が得られた．

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.

[2] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 573-577.

[3] I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, Generalized hypergeometric equations, Soviet Math. Dokl., **33** (1986), 643-646.

[4] M. Kashiwara, Representation theory and D-modules on flag varieties, Astérisque., **173-174** (1989), 55-109.

[5] C. Marasotni, T. Tanisaki, Radon transforms for quasi-equivariant $\mathcal{D}$-modules no generalized flag manifolds, preprint 1999.

[6] T. Tanisaki, Highest weight modules associated to parabolic subgroups with commutative unipotent radicals. in: Algebraic groups and their representations(ed. R. W. Carter and J. Saxl). 73–90, 1998, Kluwer Academic Publishers.

[7] T. Tanisaki, Hypergeometric systems and Radon transforms for Hermitian symmetric spaces. to appear in Advanced Studies in Pure Math. Vol. 26 (ed. T. Oshima, T. Kobayashi, T. Matsuki, K. Nishiyama)