(1)

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

(2)

$$Y(x) \underset{def}{=} f'(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$; ヘビサイドの階段函数

(3)

ディラックのデルタ函数

$$\int \varphi(x)\delta(x-a)dx = \varphi(a) \quad (\varphi : \text{十分滑らか})$$

$cf.\ \sum_j c_j \delta_{jk} = c_k$: クロネッカーのデルタ

(3')

$$\int \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0)$$

(4) $$\int_{-M}^{M}(\varphi(x)Y(x))'dx = \varphi(M) \qquad (A)$$

$$\|$$

$$\int_{-M}^{M}\varphi'(x)Y(x)dx + \int_{-M}^{M}\varphi(x)Y'(x)dx$$

$$\|$$

$$\int_{0}^{M}\varphi'(x)dx + \int_{-M}^{M}\varphi(x)Y'(x)dx$$

$$\|$$

$$\varphi(M) - \varphi(0) + \int_{-M}^{M}\varphi(x)Y'(x)dx \qquad (B)$$

(A)と(B)を比べて

$$\varphi(0) = \int_{-M}^{M}\varphi(x)Y'(x)dx$$

(3')と比べて$Y'(x) = \delta(x)$

$\Rightarrow$ シュヴルツのdistribution（超函数）(1951)

（寄道）S. Bochner: Bull. AMS **58** (1952), 78-85.

(5)

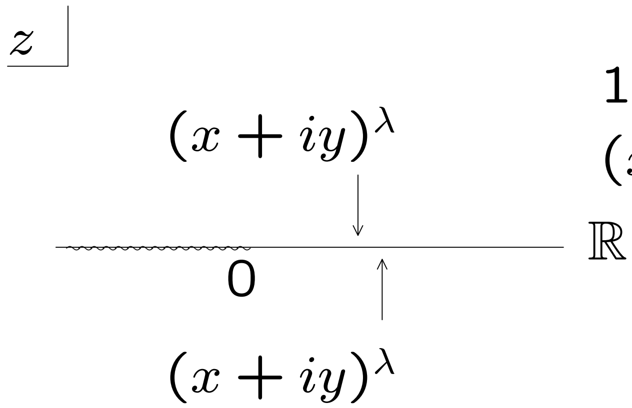
コーシーの積分公式

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\varphi(z)}{z-a}dz = \varphi(a)$$

(aの回りを時計回りに一回まわる道に沿っての積分)

(6)

近松：虚実皮膜論



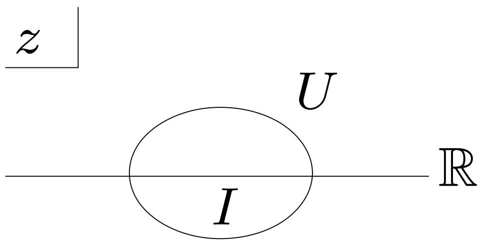
$1^\lambda = 1$

$(x+i0)^\lambda - (x-i0)^\lambda$

問 1 *(Gel'fand-Shilov*の意味での) x_+^λ と $(x+i0)^\lambda$, $(x-i0)^\lambda$ の関係式を与えよ。

(7) どんな函数の寄与は0か?

(8)



$$I = U \cap \mathbb{R}$$

$$\mathcal{O}(U - I)/\mathcal{O}(U) = \mathcal{B}(I)$$

(9) 「局所化」できるか?

(10) flabby sheaf

(11)

フーリエ変換

たとえば

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi$$
$$= \frac{-1}{i(x+i0)} + \frac{1}{i(x-i0)} = 2\pi\delta(x),$$

(11')

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi = \int_{a}^{\infty} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{a} 1 \cdot e^{ix\xi} d\xi$$
$$= \frac{-e^{ia(x+i0)}}{i(x+i0)} + \frac{e^{ia(x-i0)}}{i(x-i0)}$$

(12)

$$\frac{-e^{ia(x+i0)} + 1 - 1}{i(x+i0)} = \frac{-e^{ia(x+i0)} + 1}{i(x+i0)} + \frac{-1}{i(x+i0)}$$

$$
(13)\quad \begin{cases} (x+i0)^{-1}: & (0;+i\xi) \qquad (\xi=+1) \\ (x-i0)^{-1}: & (0;-i\xi) \\ \delta(x): & (0;\pm i\xi) \end{cases}
$$

以下$i\xi$をξと略する。

Singularity spectrum, S.S.

(14)

φ : real-valued real analytic

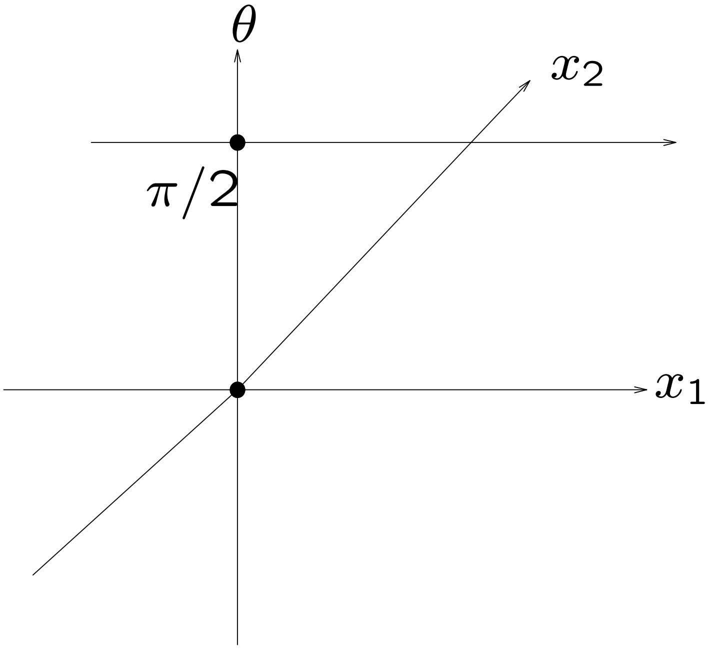
$(\varphi(x)+i0)^{-1}$: $\{z; \mathrm{Im}\varphi(z)>0\}$からの境界値

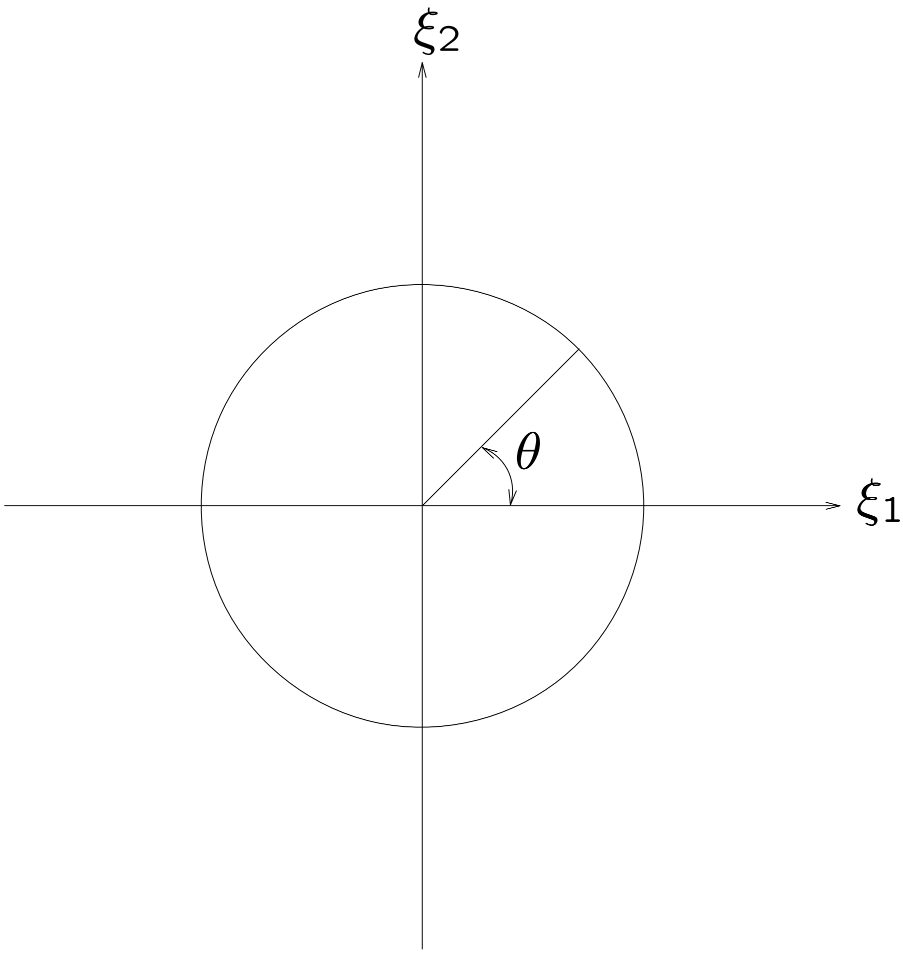
$$
\varphi(z)=\varphi(x_0)+\langle\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x_0), z-x_0\rangle+O(|z-x_0|^2)
$$

$$
\text{S.S.}\,(\frac{1}{\varphi(x)+i0})=\{(x;\xi);\varphi(x)=0,\xi=k\frac{\partial\varphi}{\partial x}(k>0)\}
$$

(15) S.S. $(f_1(x)f_2(x))$?

e.g. $\dfrac{1}{x_1 + i0} \; \dfrac{1}{x_2 + i0}$





(16)

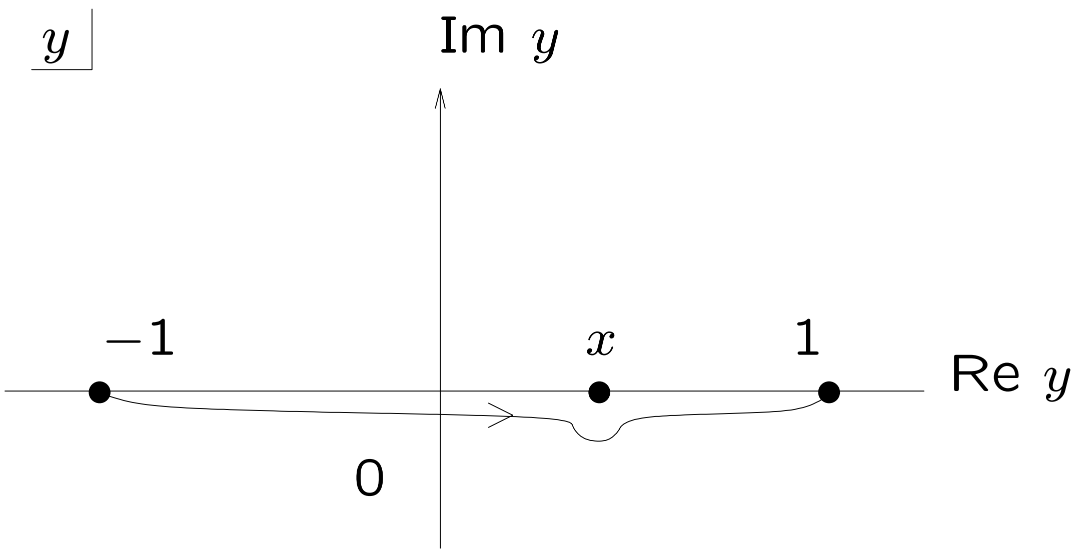
いつ $f_1(x)f_2(x)$ はwell-defか?

(17)

$$\text{sing} f_1 \cap \text{sing} f_2 \ni x \mapsto \quad \begin{array}{c} \xi = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 \neq 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ (x, \xi_j) \in S.S.\ f_j \end{array}$$

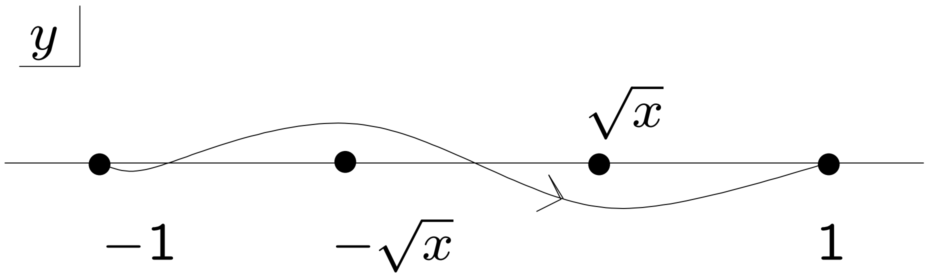
(18) 積分の特異性

例 1 $f(x) = \int_{-1}^{1}(x - y + i0)^{-1}dy : x \neq \pm 1$ なら正則



と云うふうに特異点を迂回できる。

例 2 $g(x) = \int_{-1}^{1} (x - y^2 + i0)^{-1} dy$: $x = 0$ に特異点



$x \to 0$： “ピンチ”；逃げ方なし!

問 2 $h(x) = \int \delta(x - y^2) dy$ を求めよ。

（ヒント） $t\delta(t) = 0$ を用いると良い。$h(x)$ の満たす微分方程式を探してみよ。

(19) 一般規則（一寸条件の与え方は雑）

$$g(x) = \int f(x, y) dy$$

S.S. $g(x) \ni (x, \xi) \Rightarrow \exists y$ such that

S.S.$f(x, y) \ni (x, y; \xi, 0)$

注意 $y = y(x, \xi)$ となるならほぼ正当。

(20)　ファインマン図形

頂点	:	$V_1, V_2, \ldots, V_{n'}$
線分	:	$L_1, L_2, \ldots, L_N$
半直線	:	$L_1^e, L_2^e, \ldots, L_n^e$

(20.a) L_l の端点 $W_l^{\pm}$ は V_j のどれかと一致。

(20.b) $W_l^+ \neq W_l^-$

(20.c) L_r^e のただ一つの端点は V_j のどれかと一致。

(20.d) 各 L_r^e には４次元(実)ベクトル p_r を付随させる。（運動量）

(20.e) 各 L_l には正数 m_l を付随させる。（質量）

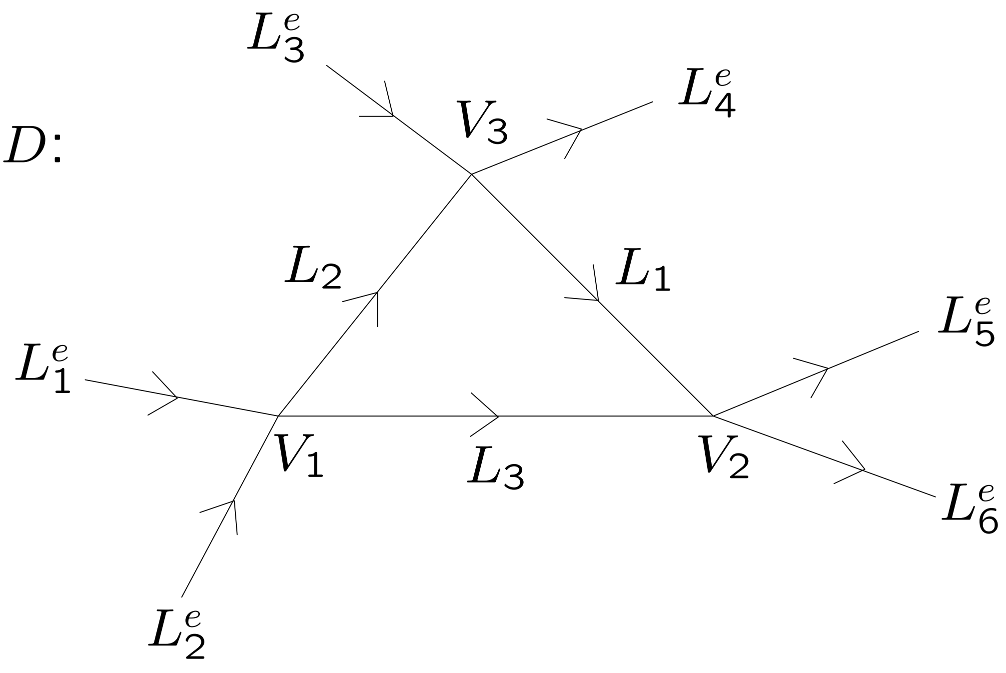
(20.f) L^e_r, L_l には方向付けを矢印 $\longrightarrow$ で与える。

(20.g)

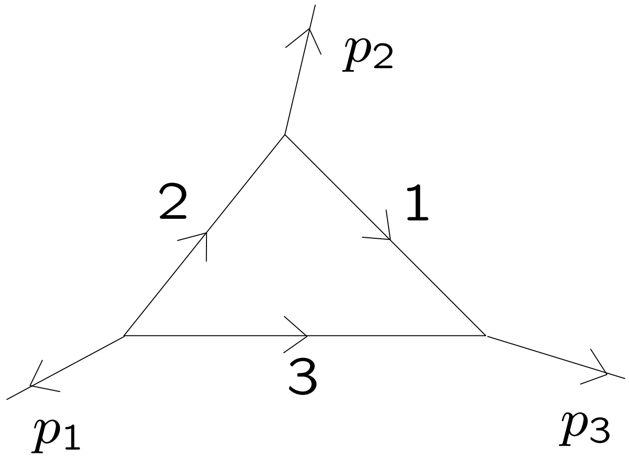
$$\begin{aligned}[j:l] &\underset{def}{=} +1 \text{ if } L_l \text{ starts from } V_j \\ &= -1 \text{ if } L_l \text{ ends at } V_j \\ &= 0 \text{ otherwise}\end{aligned}$$

(20.h) $[j:r]$ も同様に定義

D:



D':



$$p_2 = p_4^e - p_3^e \qquad \text{etc.}$$

(21)　ファインマン積分

$$f_D(p) = \int \frac{\prod_{j=1}^{n'} \delta^4(\sum_r [j;r]p_r + \sum_l [j:l]k_l)}{\prod_{l=1}^{N} (k_l^2 - m_l^2 + i0)} \prod_{l=1}^{N} d^4k_l$$

但し：δ^4: 4次元 δ、即ち

$\delta^4(q) = \delta(q_0)\delta(q_1)\delta(q_2)\delta(q_3)$。

$k_l^2 = k_{l,0}^2 - (k_{l,1}^2 + k_{l,2}^2 + k_{l,3}^2)$

(22)　S.S. F_D?

例について考える。

$$
\begin{array}{lcccccccl}
 & dp_1 & dp_2 & dp_3 & dk_1 & dk_2 & dk_3 & \\
 & 1 & & & & 1 & 1 & \text{注}1 \\
 & & 1 & & 1 & -1 & & \\
 & & & 1 & -1 & & -1 & \\
 & & & & k_1 & & & \\
 & & & & & k_2 & & \text{注}2 \\
+) & & & & & & k_3 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{cccccc}
u_1 & u_2 & u_3 & u_2 - u_3 + \alpha_1 k_1 & u_1 - u_2 + \alpha_3 k_2 & u_1 - u_3 + \alpha_3 k_3 \\
 & & & \| & \| & \| \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & (a) & (b) & (c)
\end{array}
\right\} (*)
$$

$$(\alpha_l \geq 0; l = 1, 2, 3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1)$$

注1: $\quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

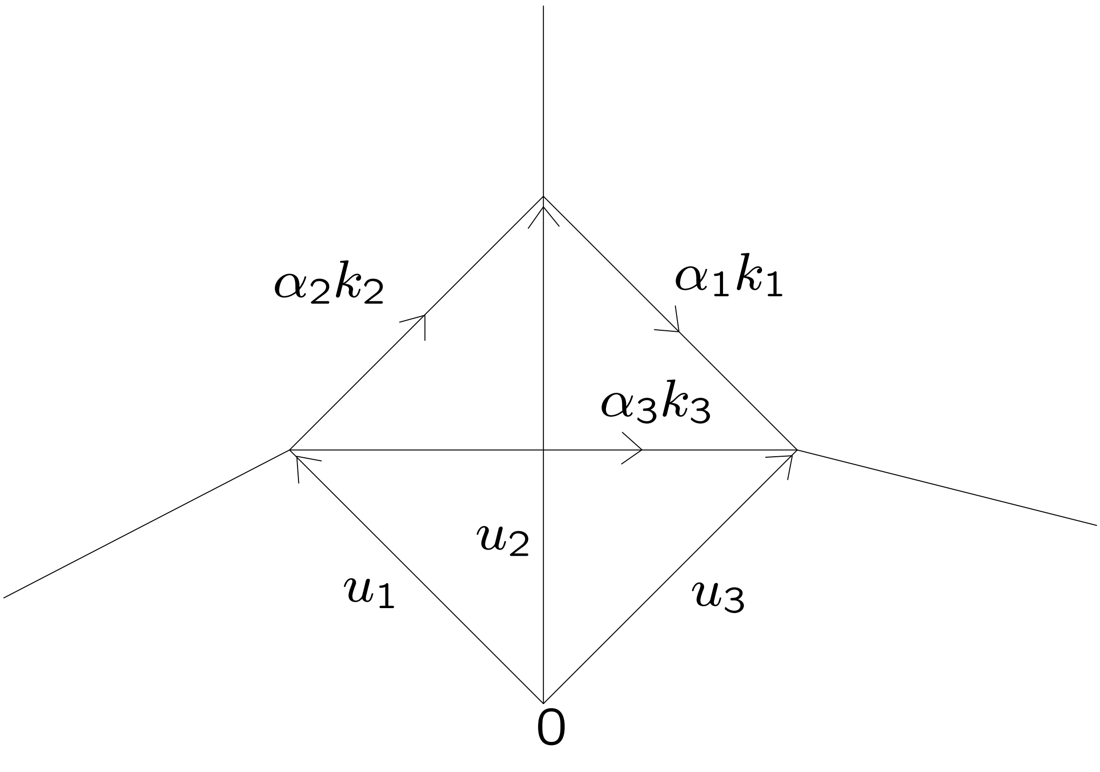
注2: $\quad k$ と $\mathrm{grad_k} k^2$ を同一視

$$
\left(\begin{array}{l}
p_1 + k_2 + k_3 = 0 \\
p_2 + k_1 - k_2 = 0 \\
p_3 - k_1 - k_3 = 0 \\
k_l^2 = m_l^2 \ (l = 1, 2, 3)
\end{array}\right.
$$

そして(*): ここで

(a)+(b)-(c) $\Rightarrow \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 - \alpha_3 k_3 = 0$:

Landau–中西の閉回路条件 (1959)



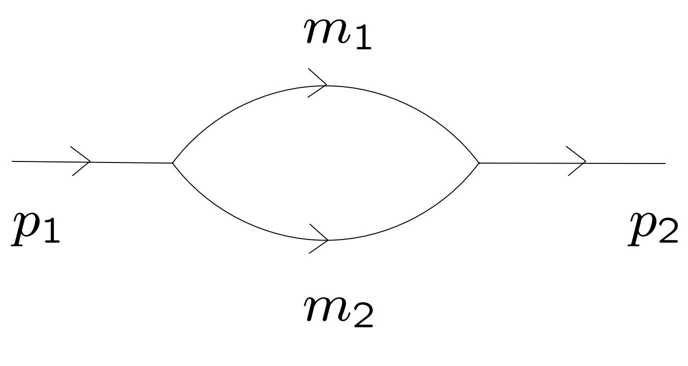
(23)

Landau–中西の捨てた情報、即ち各頂点の「位置」には“特異点毎に与えられる方向” としての内在的意味：cf. フーリエ変換の精密化(Iagolnitzer-Stapp, Commun. Math. Phys. **14** (1969), 15-55)

問 3 $F_D(p)$ の定義で $(k_l^2 - m_l^2 + i0)^{-1}$ を $\delta(k_l^2 - m_l^2)Y(k_{l,0})$ に替えると結果はどうなるか考えよ。

問 4

D:



に対して講義と同様の考察を試みよ。

又、$F_D(p_1, p_2)$ の特異点の位置を記せ。

(24)

このような解析性は発散級数を経由してしかS-行列につながっていないのに何故か“良く合う”。（Landau：理論的実験室）

その理由は？ 今は判ったと言ってよい。

Borel 総和法。

尚： $m_l = 0$: 赤外発散 (open problem)

参考文献

佐藤幹夫: 超函数の理論、数学、**10** (1958), 1-27.

Gel'fand-Shilov: Generalized Functions, vol.1, Acad. Press (1966)

柏原・河合・木村: 代数解析学の基礎、紀伊國屋、1980.