

現代の数学と数理解析

—— 基礎概念とその諸科学への広がり

第6回

2004年5月28日(金) 16:30-18:00

講師：小林 俊行

題目：対称性と幾何
—— 連続群と不連続群

要約：野山に咲く花や、京都に古くからある建物など、我々が美しいと感じるものの背後には「対称性」が潜んでいたり、あるいは逆に、「対称性のくずれ」の中にほっとするような落ち着きを感じることもあります。

そもそも対称性とはなんでしょう？

「球面が丸い」とか「直線はまっすぐである」と漠然と認識していることをどうしたら数学的にきちんと説明できるでしょうか？ その一つの方法は、「球面を回転させても変わらない」とか「直線を平行移動しても変わらない」という性質を用いることです。

この方法を一般化し、「群による作用(変換群)」という代数構造を用いて、
タイル張りなどに見られる離散的な対称性(不連続群)、
曲がった空間における連続な対称性(リー群)、
無限次元の空間における対称性(表現論・調和解析)

などさまざまな対称性を数学的にとらえることができ、現代数学や数理解析において欠かすことのできない基礎概念を得ることができます。

この講義では、数学における抽象的な対称性の概念の雰囲気伝え、時間があればこの分野の未解決問題にも触れたいと思います。

以下の問は易しいものと難しいものがまざっています。すべて解くことは要求していませんが、ざっと眺めて、講義でお話した「対称性のふしぎ」を思い出すきっかけにしていただければと思います。

問1 正三角形を保つ運動群の群演算表を完成させよ。

問2 正 n 角形を保つ運動群の元の個数はいくつ？

問 3 平面の運動 (距離を変えない変換) は、回転、平行移動以外にどのようなものがあるか?

問 4 球面 S^2 の変換で、角度は保つが距離は保たないような変換を一つ見つけよ。

問 5 3次元のユークリッド空間の中で原点を通る (向きのついた) 直線 l を軸として角度 θ だけ回転させることによって得られる変換を $T_{l,\theta}$ と表す。

1) $T_{l,\theta}$ は 2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を保つ変換であることを示せ。

2) このような変換 $T_{l,\theta}$ を行った後、またべつの直線 l' を軸として角度 θ' 回転させる変換 $T_{l',\theta'}$ を合成して得られる変換は、ある軸を中心に回転させて得られる変換に他ならないことを示せ。

問 6 実数を成分とし、行列式が 0 でない 2行2列の行列の全体を $GL(2, \mathbb{R})$, 行列式が 1 となる 2行2列の行列の全体を $SL(2, \mathbb{R})$ と記す。このとき、 $GL(2, \mathbb{R})$ も $SL(2, \mathbb{R})$ も群であることを確かめよ。

問 7 上記の問において、実数を整数に変えるとどうなるか?

以下では、リー群を (講義中で述べた) 「連続群」に置き換えて議論してもよい。

問 8 1次元の球面 $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ はリー群の構造をもつことを示せ。

問 9 (数理研大学院入試 2002 年) 2次元の球面 $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ はリー群の構造をもたないことを示せ。

問 10 3次元の球面 $S^3 = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ はリー群の構造をもつことを示せ。(ヒント: 四元数を用いる)

以下では、直線は円の特珠な場合 (半径無限の円) と解釈する。

問 11 一次分数変換によって円は円にうつることを示せ。

問 12 2つの円が直交しているならば、一次分数変換による像も2つの直交する円になることを示せ。

問 13 $(a, b), (c, d)$ は 2 次元格子の 2 点とする (すなわち、 a, b, c, d はすべて整数とする)。このとき、次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ。

$$(i) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

(ii) ベクトル $(a, b), (c, d)$ が張る平行四辺形の面積が 1 であり、
かつ $\operatorname{Im} \frac{ai + b}{ci + a} > 0$

問 14 複素平面の集合 A を

$$A = \{x + iy : x^2 + y^2 \geq 1, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y > 0\}$$

と定めるとき、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ をいろいろとりかえて変換 $z \mapsto$

$\frac{az + b}{cz + d}$ による A の像を図示せよ。

問 15 上記の答と、ポアンカレ円板のタイル張り (4 頁の右上図) とを比較して論ぜよ (ヒント: 一次分数変換 $w = \frac{z - i}{z + i}$ を考えよ)

問 16 講義中に配布した図 1 の 6 つの文様 (麻の葉、籠目、七宝つなぎ、...) の対称性を保つ群はそれぞれ図 2 のどの文様に対応しているか? (6 つの文様の中で好きなものを 2 つほど選んで実験せよ)

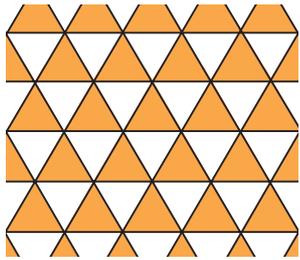
問 17 図 1 の 6 つの文様の対称性を保つ群は互いに同型でないことを示せ。

問 18 一葉双曲面 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ に $SL(2, \mathbb{R})$ の対称性を見出せ。

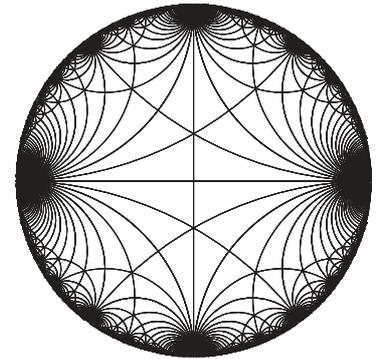
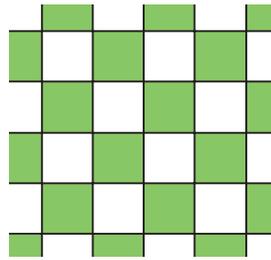
問 19 局所的な形を与えて大域的な形がどのように決まるかについて考えたことを書いてみてください。例えば空間形予想 (文献 [8] の予想 2.6.2) (等方的な閉じた宇宙がどんな次元・符号で存在するか?) など。

問 20 この講義に関する感想を書いて下さい。

まずこの論説のキーワードを直感的に述べてみることにする。「同じ形」の「タイル」で「敷き詰め」られた空間を思い浮かべてみよう。



ユークリッド平面におけるタイル張り



ポアンカレ平面における
タイル張り

そこでは、

「敷き詰め方」を表す(非可換)対称性の代数構造が不連続群、
1個1個の「タイル」がクリフォード・クライン形、
空間における「同じ形」という概念を規定するのが幾何構造
にあたる。従来のリーマン幾何での枠組みを超えた世界で、空間の局所的な
幾何構造と大域的な構造(不連続群)が織りなす新しい物語の序章を形にし、
いくつかの未解決問題を提起して、物語のさらなる展開を読者に委ねたい。

[8] 小林俊行「非リーマン等質空間と
不連続群」p.19より

参考文献

この講義に関連する入門書・啓蒙書

- [1] 難波誠 「群と幾何学」 現代数学社 1997年
- [2] ドゥージン他 「幾何学と群」(邦訳) シュプリンガー・フェアラーク 2000年
- [3] シャファレヴィッチ他 「変換群入門」 (邦訳)シュプリンガー・フェアラーク 2004年(新装版)
- [4] H. Weyl, "Symmetry", Princeton Paperbacks 1952

リー群・表現論の教科書

- [5] 熊原啓作 「行列・群・等質空間」 日本評論社 1999年
- [6] 小林俊行・大島利雄 「Lie 群と Lie 環 I,II」 岩波講座 現代数学の基礎 7 岩波書店 2001年

より進んだ内容でこの講義に関連しているもの

- [7] サーストン 「3次元幾何学とトポロジー」 培風館 1999年
- [8] 「数学の最先端 21世紀への挑戦」(邦訳)第1巻 2002年, シュプリンガー・フェアラーク, pages 18–73 の拙著「非リーマン等質空間と不連続群」にこの分野のたくさんの未解決問題が掲載されています