全学共通科目（１回生～４回生対象）

現代の数学と数理解析
―　基礎概念とその諸科学への広がり

授業のテーマと目的：

数学が発展してきた過程では、自然科学、社会科学などの種々の学問分野で提起される問題を解決するために、既存の数学の枠組みにとらわれない、新しい数理科学的な方法や理論が導入されてきた。また、逆に、そのような新しい流れが、数学の核心的な理論へと発展した例も数知れず存在する。このような数学と数理解析の展開の諸相について、第一線の研究者が、自身の研究を踏まえた入門的・解説的な講義を行う。

数学・数理解析の研究の面白さ・深さを、感性豊かな学生諸君に味わってもらうことを意図して講義し、原則として予備知識は仮定しない。

第３回

日時：　２００４年5月7日（金）１６：３０－１８：００

場所：　数理解析研究所　４２０号室

講師：　斎藤 恭司 教授

題目：　エータ積のフーリエ係数について

要約：

変数 q に関する次の無限積で定まる関数をデデキントのエータ関数と言い（**注**。参照）今から 100 年余り前に導入されました。

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

デデキントを遡ること更に 100 年余り前オイラーは次の無限和へ展開出来ることを示しています。

$$\eta(q) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{\frac{3}{2}(j+\frac{1}{6})^2}.$$

今読み返しても実に巧妙な面白い証明です。 この様に無限積を無限和に展開し直すと思いもよらぬ面白いことが起きるようです。

次に、ひとつのエータ関数ではなく τ 変数（**注**。参照）を $n\tau$ に相似変換（n は正整数、それは変換 $q \mapsto q^n$ と言っても同じ）したエータ関数 $\eta(n\tau)$ の有限個の積や商を考えエータ積と呼びます。それ等エータ積のいくつかについて、q 巾展開の例を挙げてみましょう。

$$\begin{aligned}
\eta(2\tau)/\eta(\tau) &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{8}(4i+1)^2} \\
\eta(\tau)^2/\eta(2\tau) &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^{i^2} \\
\eta(\tau)\eta(6\tau)^2/\eta(2\tau)\eta(3\tau) &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{1}{3}(3i+1)^2} \\
\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)/\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau) &= \textstyle\sum_{i\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{3}(3i+1)^2}
\end{aligned}$$

これ等は ”たまたま？”うまく見つかった明快な例です。他にも、幾つか 著しい例が知られているにも関わらず、エータ積の全体像は 未だ解明されていないようです。自分で実験して頂けると面白いと思いますが左辺の τ の係数や巾指数を一寸変えるだけで右辺の無限和に展開した係数（フーリエ係数と呼ばれている）の 挙動はドラスチックに変り それらをうまくコントロールする一般理論がありうるのか想像できません。

無限積を標示するのに必要なデータは有限であり、無限和を標示するのに必要なデータも有限なのですが、その間に、<u>積を和に展開しなおす無限の操作が間に入っている</u> 事が関係しているのでしょう。

この講義では 無限和の係数がみな 正になるようなエータ積 に興味をもち 幾つかの例に即して何が起きているのかを調べてみます。ひとつ例を挙げます。

$$\eta(8\tau)^4/\eta(4\tau)^2 = q + 2q^5 + q^9 + 2q^{13} + 2q^{17} + 3q^{25} + 2q^{29} + 2q^{37} + 2q^{41} + \cdot$$

ここで一つ注目するのは、係数がみな 非負 (≥ 0) となっていることです。コンピュータが得意な方は自分でやって頂けると良いのですが、実験しますと面白いぐらいに非負の小さな係数が何処までも続きます。しかし それでは全ての係数が本当に非負なのかは証明した事にはならないし、またこの先係数達はどの様な増え方をするのか (しないのか）分かりません。講義では それらの問題を理論的に扱える方法を 2-3 説明します。それは この様に何気ない問題からでも 思いもよらない数学の他の分野と 深いところでつながって行く楽しみを味会わせてくれると思います。

注。 この無限積は $|q| < 1$ となる 複素数に対しては絶対収束するので q の単位円盤上の関数とみなしてもよいのですが、 むしろ変数変換を $q = exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)$ と置いて、τ を複素上半平面 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) > 0\}$ を動く変数の関数であると 見なすことが多いのです （そのときは、論理的にはおかしいのですが $\eta(\tau)$ と書くことにします)。というのは、そうすると変数 τ に関して、保型性と呼ばれる 次の著しい性質を示すからです。

$$\eta(\tau+1) = \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/\sqrt{-1}}\,\eta(\tau).$$