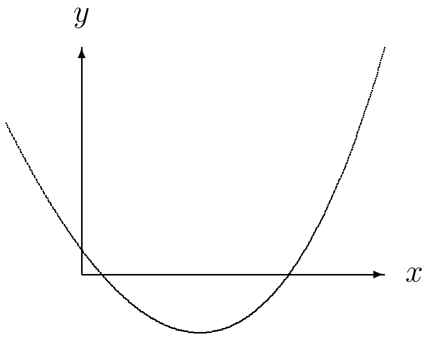
現代の数学と数理解析―基礎概念とその諸科学への広がり

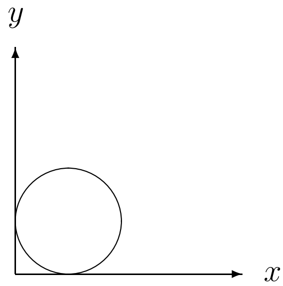
授業のテーマと目的： 数学が発展してきた過程では、自然科学、社会科学などの種々の学問分野で提起される問題を解決するために、既存の数学の枠組みにとらわれない、新しい数理科学的な方法や理論が導入されてきた。また、逆に、そのような新しい流れが、数学の核心的な理論へと発展した例も数知れず存在する。このような数学と数理解析の展開の諸相について、第一線の研究者が、自身の研究を踏まえた入門的・解説的な講義を行う。

数学・数理解析の研究の面白さ・深さを、感性豊かな学生諸君に味わってもらうことを意図して講義し、原則として予備知識は仮定しない。

第７回「代数曲線への誘い」2005 年 6 月 3 日（金）　向井 茂

多項式 $f(x)$ のグラフ $y = f(x)$ や２次曲線，例えば $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$，などは非常に基本的な曲線です.





より一般に，２変数の多項式でもって $f(x, y) = 0$ と定義されるものを平面代数曲線といいます．また，これを一般化したものとして代数曲線と呼ばれる代数幾何学での研究対象があります．代数曲線は昔からいろんなことが研究されてきましたが，その理論の要になる概念として種数 (genus) や因子 (divisor) があり，その頂点に君臨する大定理として Riemann-Roch の定理

$$\dim |D| - \dim |K - D| = \deg D + 1 - g$$

があります．グラフや２次曲線の種数は０で，楕円曲線とよばれるもの（多くの場合 $y^2 = x^3 + ax + b$ と表される）は種数１です.

歴史的には代数曲線の実数点や複素数点の全体から研究が出発しましたが,「体」と呼ばれる数体系があればいつもその上で代数曲線論が展開できることが解ってきました．[1]有理数全体のなす体を通常 $\mathbf{Q}$ で表しますが，$\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線は Fermat 予想

[1]「環」という数体系，例えば整数の全体 $\mathbf{Z}$，の上で考えることも重要です（数論的曲面）.

「$x^n + y^n = 1$ は $n \geq 3$ のとき有理数解をもたない」

の解決を導いたことは有名です．また，近年は有限体 $\mathbf{F}_p$ 上の代数曲線が符号理論に応用されています.（ちなみに上の平面代数曲線 $x^n + y^n = 1$ の種数は $g = (n-1)(n-2)/2$ で与えられます.）

私自身は代数曲線の「標準的」な定義式を研究してきました．種数 9 までは上手くいって，preprint

Curves and symmetric spaces II, RIMS preprint # 1395, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/home_page/preprint/.

を 2 年前に仕上げましたが，この方向はここで行き詰まっています．しかし，代数曲線は汲めども尽きない泉のようでいろんな研究テーマがそこから生まれ続けてきました．また，代数幾何学のよい入り口でもあります．講義では複素数体 $\mathbf{C}$ 上の平面代数曲線の簡単な性質を紹介して，皆さんを代数曲線論の入り口に招待したいと思います. 興味を抱いた方は次の成書やそこに引用されている文献にあたってみて下さい.

参考文献

[1] 硲　文夫，代数幾何学，森北出版，1999 年.（演習問題が豊富）

[2] 岩澤健吉，代数函数論，岩波書店，1952 年.（緒言は特に有名）

[3] 梶原　健，代数曲線入門，日本評論社，2004 年.（まだ読んでいません）

[4] 河田敬義，代数曲線論入門，至文堂，1968 年.（私自身ながくお世話になっている）

[5] 難波　誠，代数曲線の幾何学，現代数学社，1991 年.（タイトルに違わない豊富な図と話題）

[6] Walker, R.J.: *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, 1950. （学部セミナーでの定番）