微分方程式と自然現象の数理

京大・数理研 大木谷 耕司

June 29, 2005

序: 個人的経験から

教養部での微積分の授業 松本 誠 先生
「Goursat(グルサ)を読め」

常微分方程式の解の一意存在
必要十分条件 Okamura function
常微分方程式の問題を偏微分方程式の問題に帰着
「これは元の問題より難しい！」

目次

関連する話題

常微分方程式 Ordinary Differential Equations

偏微分方程式 Partial Differential Equations
(その弱解)
確率微分方程式 Stochastic Differential Equations

教科書：今でも売っている

解析概論、 高木貞治 (1983) 岩波書店

微分方程式入門、 高橋陽一郎 (1988) 東大出版会

現代物理学の基礎 2 古典物理学 II (1978) 岩波書店

数学概論、寺沢 寛一 (1983) 岩波書店

大学演習 応用数学 I 加藤敏夫、吉田耕作 (2002) 裳華房

専門書：

微分方程式序説、 岡村 博 (2003) 共立書店

'Ordinary Differential Equations' P. Hartman (1982) Birkhauser

フランスの解析学教程: 通読には不向きだが味がある
'Cours d'Analyse mathématique', Goursat
'Traté d'Analyse', Picard

論文：
'Stochastic Hydrodynamics', W. E

http://www.math.princeton.edu/~weinan/

'Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid',
V.I. Yudovich, Math. Research Letters, **2**, 27-38(1995)

常微分方程式の解の一意存在の条件
十分条件 Lipschitz 条件

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x) \tag{1}$$

$$|u(t, x)| < M \text{ in } B$$

$$|u(t, x_1) - u(t, x_2)| < K|x_1 - x_2|$$

B の中にある長方形 $|t - t_0| < a,\ |x - x_0| < b,\ (aM < b)$

$$\Longrightarrow\ x = \exists\phi(t),\ |t - t_0| < a$$

が (1) を満たし、かつ

$$\phi(t_0) = x_0$$

(証明のスケッチ)

Picard の逐次近似（反復法）

第０近似 $x = x_0$ 解ではない

第１近似

$$\frac{dx_1}{dt} = u(t, x_0), \quad x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, x_0) d\tau \text{ 解ではない}$$

第２近似

$$\frac{dx_2}{dt} = u(t, x_1), \; x_2 = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, x_1) d\tau \text{ 解ではない}$$

同様に、第ｎ近似

$$\frac{dx_n}{dt} = u(t, x_{n-1}), \; x_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, x_{n-1}) d\tau$$

$$|x_1 - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau, x_0) d\tau \right| \leq M|t - t_0| < Ma < b$$

$$|x_2 - x_1| = \left| \int_{t_0}^{t} \left(u(\tau, x_1) - u(\tau, x_0) \right) d\tau \right| \leq K \int_{t_0}^{t} |x_1 - x_0| dt$$

$$\leq MK \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0) d\tau \leq \frac{MK}{2} (t - t_0)^2$$

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} (t - t_0)^n \leq \frac{M}{K} \frac{(Ka)^n}{n!}$$

$$|x_n - x_0| \leq M|t - t_0| < Ma < b \rightarrow \forall n, x_n \in \text{長方形}$$

$$|x_n| = |x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})|$$

$$\leq |x_0| + \frac{M}{K} \sum_{m=1}^{n} \frac{(Ka)^m}{m!} \longrightarrow |x_0| + \frac{M}{K}(\exp(Ka) - 1),\ n \to \infty$$

絶対一様収束(優級数)

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} x_n,\ \phi:\ \text{連続}$$

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, \phi) d\tau$$

$$\phi'(t) = u(t, \phi)$$

一意性

別の解 $\psi(t)$

$$\psi(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^{t} (u(\tau, \psi) - u(\tau, x_{n-1}))d\tau$$

$$|\psi(t) - x_n(t)| \leq b\frac{K^n}{n!}(t - t_0)^n \to 0$$

不動点定理(縮小写像）の典型例

その後、Peano によって,

解の存在だけなら$u(t, x)$が連続かつ有界で十分

なことが示された。(存在と一意性の区別)

必要十分条件 (1) Osgood 条件

$$\frac{dx}{dt} = u(x), \quad x(t_0) = x_0$$

$$u(x) : x \geq x_0 \text{ で連続}, \; u(x_0) = 0, \; u(x) > 0 (x > x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{dx}{u(x)} = \infty, \forall \epsilon > 0 \iff \text{解は一意的に存在}$$

レポート問題 これを証明せよ。

[例] ($x_0 = 0$とする)

$$u(x) = x,\ \text{(Lipschitz)}\quad \int \frac{dx}{x} = \int d(\log x) = \infty,$$

$$u(x) = x\log x,\quad \int \frac{dx}{x\log x} = \int d(\log\log x) = \infty,$$

$$u(x) = x\log x\log\log x,\quad \int \frac{dx}{x\log x\log\log x} = \int d(\log\log\log x) = \infty,$$

微分が対数発散しても一意性 OK. 以上を 準-Lipschitz という。

$$u(x) = x^{\alpha},\ (0 < \alpha < 1),\ \int x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^{\epsilon} < \infty$$

僅かでも指数が１を下回ると一般に一意性は失われる。Hölder連続

必要十分条件 (2) 岡村 博

微分方程式の解を図形的にその積分曲線族 Ω でとらえる

曲線 $C \in \Omega$ は t の区間 I で定義される $x_i'(t)$ で表せる

$$E = \{(x,t) | C \text{上の点}\}$$

2点 $P(x^P, t^P)$, $Q(x^Q, t^Q)$ $t^P \leq t^Q$ を分割

$$t^P \equiv t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \equiv t^Q$$

カニ歩きの見積もり

$$S = \overline{Q_0 P_1} + \overline{Q_1 P_2} + \overline{Q_2 P_3} + \ldots + \overline{Q_n P_{n+1}},\ Q_0 \equiv P, P_{n+1} \equiv Q$$

$$D(P,Q) = \inf_{\text{分割}} S$$

で規定されるような曲線を与えるものと見なすことがで

ここで彼は次のような関数を導入する．E の任意の 2

$t^{\mathrm{P}} \leqq t^{\mathrm{Q}}$ とし，時間 $t^{\mathrm{P}}t^{\mathrm{Q}}$ を

$$t^{\mathrm{P}} = t_0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_\nu = t^{\mathrm{Q}}$$

のように細分する．Ω に属する曲線で P, Q をそれぞれ

その間に ν 個の曲線 C_k $(k=1, \cdots, \nu)$ を勝手にえらぶ．

する弧を $\widehat{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}$，左端を P_k，右端を Q_k とし，次の和を

$$S = \overline{\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2} + \cdots + \overline{\mathrm{Q}_{\nu-1}\mathrm{P}_\nu} + \overline{\mathrm{Q}_\nu}$$

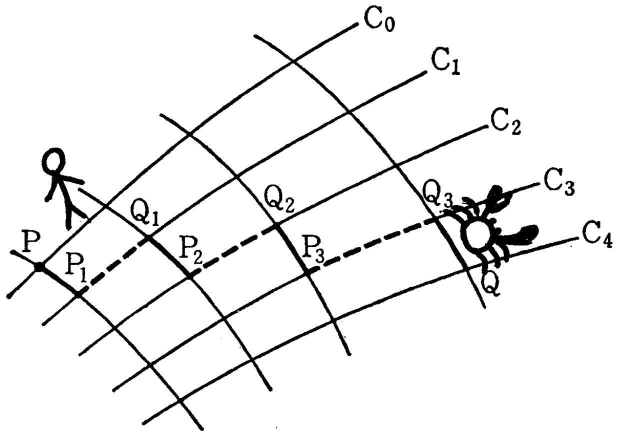

図 17.
の和
関数

現代物理学の基礎　古典物理学Ⅱ　より

1. $D(P,Q) \geq 0$

2. P, Q が同一解曲線上 $\Rightarrow$ $D(P,Q) = 0$

3. P, Q が同一解曲線上 $\Leftarrow$ $D(P,Q) = 0$

4. P, Q がそれぞれ解曲線上を動くとき $D(P,Q)$ は増えない

岡村の定理

u_iが $(n+1)$次元領域 $\mathcal{D}$で連続とする。

$\mathcal{D}$ の点から右へ出る解がただ1つ存在

$$\Longleftrightarrow \text{次のような}\,\Phi(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\text{があること}$$

(a) $(t,\boldsymbol{y}) \in \mathcal{D},\ (t,\boldsymbol{z}) \in \mathcal{D}$で C^1

(b) $\Phi(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z},$

(c) $\Phi(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) > 0,\ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$

(d) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + u_i(\boldsymbol{y},t)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i} + u_i(\boldsymbol{z},t)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_i} \leq 0,\ t \equiv t^Q - t^P$

条件(d) $\Longleftrightarrow$ 4.

本来、増えるはずがない量に対して

増える可能性を考えることによって多意性を特徴づけた。

左へ出る解 ：(d）の符号を逆にする

2．ナビエストークス方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$\nu \to 0$ のときの $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ の挙動

http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

経験法則 (Kolmogorov)

$$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \propto |\boldsymbol{r}|^{1/3}$$

1/3 回しか微分できない
証明はないが、非常に真実に近い.

3. 浮遊粒子の運動

$$\frac{\partial \theta^\kappa}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\theta^\kappa = \kappa \triangle \theta^\kappa$$

$\kappa \to 0$ のときの $\theta^\kappa(\boldsymbol{x}, t)$ の挙動

$\boldsymbol{u}$ が Lipschitz なら $\theta^\kappa \to \theta$, $\kappa \to 0$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\theta = 0 \tag{2}$$

特性曲線法 (図 板書)

粒子の位置を表すマーカー $\phi_{s,t}(\boldsymbol{x})$, $(t > s)$

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}_{s,t}(\boldsymbol{x})}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}_{s,t}(\boldsymbol{x}), t), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{s,s}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$\theta(\boldsymbol{x}, 0) = \theta_0(\boldsymbol{x})$ から始まる (2) の解は

$$\theta(\boldsymbol{x}, t) = \theta_0(\boldsymbol{\phi}_{0,t}^{-1}(\boldsymbol{x})) = \theta_0(\boldsymbol{\phi}_{t,0}(\boldsymbol{x}))$$

1階偏微分方程式 $\longrightarrow$ 常微分方程式

乱流の速度 $\boldsymbol{u} \in C^{1/3}$

簡単のためのモデル化：$\boldsymbol{u}$ Gaussian ランダム変数

(2) を解くため、 (3) の解の集合の確率分布を考える

$\boldsymbol{u}$ non-Lipschitz のとき, 正則化してから極限をとる

拡散を加え、 $\kappa \to 0$

$$d\boldsymbol{\phi}^{\kappa}_{s,t}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}^{\kappa}_{s,t}(\boldsymbol{x}), t)dt + \sqrt{2\kappa}dW(t)$$

SDE : ブラウン運動

推移確率分布 (図 板書)

1

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(\boldsymbol{y}, \tau) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, \tau) \cdot \nabla_{\boldsymbol{y}} \phi(\boldsymbol{y}, \tau) \right) g(\boldsymbol{x}, s | d\boldsymbol{y}, \tau) d\tau$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\boldsymbol{y}, t) g(\boldsymbol{x}, s | d\boldsymbol{y}, t) + \phi(\boldsymbol{x}, t) = 0, \ \forall \text{テスト関数} \phi \in C^\infty$$

2

$$g(\boldsymbol{x}, s | d\boldsymbol{y}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\boldsymbol{x}, s | d\boldsymbol{z}, \tau) g(\boldsymbol{z}, \tau | d\boldsymbol{y}, t), \ \forall \tau \in [s, t]$$

Chapman-Kolmogorov の関係式

注意 $t = s$ のとき $g(\boldsymbol{x}, s | d\boldsymbol{z}, s) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z}$

1. の方程式の導出

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}(\boldsymbol{y},\tau)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\tau)\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\theta(\boldsymbol{y},\tau)=0$$

$$\int_s^t\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}(\boldsymbol{y},\tau)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\tau)\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}}\theta(\boldsymbol{y},\tau)\right)\phi(\boldsymbol{y},\tau)d\tau d\boldsymbol{y}=0$$

時刻 s で $\boldsymbol{x}$ に集中

$$\theta(\boldsymbol{y},\tau)d\boldsymbol{y}\rightarrow g(\boldsymbol{x},s|d\boldsymbol{y},\tau)$$

とおきかえる．部分積分

$\kappa \neq 0$ のときの移流方程式 (図 板書)

逆推移確率

$$g^\kappa(\boldsymbol{x}, t | d\boldsymbol{y}, s) = E\left[\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\psi}^\kappa_{t,s}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{y}\right],\ s < t$$

$$\theta^\kappa(\boldsymbol{x}, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \theta_s(\boldsymbol{y}) g^\kappa(\boldsymbol{x}, t | d\boldsymbol{y}, s) \text{ は}$$

$$\frac{\partial \theta^\kappa}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\theta^\kappa = \kappa \triangle \theta^\kappa$$

$$\theta^\kappa(\boldsymbol{x}, s) = \theta_s(\boldsymbol{x}) \text{ の解}$$

特性曲線法の一般化

4．オイラー方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

解の正則性の判定条件

$$\int_0^T \sup_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{\omega}| dt < \infty$$

$$\int_0^T \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathrm{BMO}} dt < \infty$$

$$\omega \in \mathrm{BMO} \approx \omega \propto \log r, \quad u \propto r \log r$$

粒子の軌道方程式の解の一意性

$\updownarrow$

オイラー方程式 (PDE) の解の正則性の条件

正則性の条件が実際に満たされるかどうかは未知、大問題

まとめ

- Lipschitz 十分条件, Osgood 必要十分条件, Okamura 必要十分条件

- Navier-Stokes 方程式の速度 $C^{1/3}$

- 浮遊粒子の軌道 $\longrightarrow$ 多意 $\longrightarrow$ SDE

- Euler 方程式の正則性 $\leftrightarrow$ 粒子の軌道の方程式 Osgood

おわりに

図書館で借りるための書籍リスト

Dover
http://www.doverpublications.com 定評ある教科書・専門書、安価

Jacque Gabay
http://www.gabay.com 古典的な文献、安くはない