

現代の数学と数理解析

—— 基礎概念とその諸科学への広がり

第6回

2006年5月26日(金) 16:30-18:00

講師：小林 俊行

題目：対称性の数学

要約：野山に咲く花や、京都に古くからある建物など、我々が美しいと感じるものの背後には「対称性」が潜んでいたり、あるいは逆に、「対称性がくずれている」ことによってほっとするような落ち着きを感じることもあるでしょう。

そもそも対称性とはなんでしょうか？

「球面が丸い」とか「直線はまっすぐである」など、漠然と認識していることをどうしたら数学的にきちんと説明できるでしょうか？

こういった対称性を理解する一つの方法は「動かしてみる」ことです。「球を回転させる」とか「直線を平行移動する」ことによって、球面や直線の対称性を理解するわけです。

動かしているのに不動である、あるいは、動いているつもりでもお釈迦様の手のひらを駆け回る孫悟空のように外に飛び出ない、といった性質に着目することによって

 タイル張りなどに見られる離散的な対称性（不連続群）、

 曲がった空間における連続な対称性（リー群）、

 無限次元の空間における対称性（表現論・調和解析）

などさまざまな対称性を数学的にとらえることができます。

この考え方を抽象すると「群による作用」という概念になります。これは、「動かす 対称性」を理解する鍵であり、現代数学や数理物理において欠かすことのできない基礎概念になっています。

この講義では、数学における抽象的な対称性の雰囲気伝え、時間があればこの分野の未解決問題にも触れたいと思います。

以下の問は易しいものと難しいものがまざっています。すべて解くことは要求していませんが、ざっと眺めて、講義でお話した「対称性のふしぎ」を思い出すきっかけにしていただければと思います。

問 1 平面の 2 直線 α, β に関する鏡映をそれぞれ T_α, T_β とするとき、合成写像 $T_\alpha \circ T_\beta$ は回転または平行移動になることを示せ。

問 2 正三角形を保つ運動群の群演算表を完成させよ。

問 3 正方形を保つ運動群の元の個数はいくつか？

問 4 球面 S^2 の変換で、角度は保つが距離は保たないような変換を一つ見つけよ (ヒント: 下の問で述べる一次分数変換をまず考え、次に立体射影を考える)。

問 5 3次元のユークリッド空間の中で原点を通る (向きのついた) 直線 l を軸として角度 θ だけ回転させることによって得られる変換を $T_{l,\theta}$ と表す。

1) $T_{l,\theta}$ は 2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を保つ変換であることを示せ。

2) このような変換 $T_{l,\theta}$ を行った後、またべつの直線 l' を軸として角度 θ' 回転させる変換 $T_{l',\theta'}$ を合成して得られる変換を T とする。 T によって動かない S^2 上の点が少くとも 2 つはあることを示せ。さらに、 T は、ある軸を中心に回転させて得られる変換に他ならないことを示せ。

問 6 実数を成分とし、行列式が 0 でない 2 行 2 列の行列の全体を $GL(2, \mathbb{R})$, 行列式が 1 となる 2 行 2 列の行列の全体を $SL(2, \mathbb{R})$ と記す。このとき、 $GL(2, \mathbb{R})$ も $SL(2, \mathbb{R})$ も群であることを確かめよ。

問 7 整数を成分とし、行列式が 0 でない 2 行 2 列の行列全体は群となるか？ また、行列式が 1 となるもの全体を $SL(2, \mathbb{Z})$ と記すとき、 $SL(2, \mathbb{Z})$ は群になるか？

以下では、リー群を (講義中で述べた) 「連続群」に置き換えて議論してもよい。

問 8 1次元の球面 $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ はリー群の構造をもつことを示せ。

問 9 (京大数理解析研究所大学院入試 2002 年) 2次元の球面 $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ はリー群の構造をもたないことを示せ。

問 10 ハミルトンの四元数を用いて 3次元の球面 $S^3 = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ はリー群の構造をもつことを示せ。

問 11 (京大数理解析研究所大学院入試 2004 年) 写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2, \mathbb{C})$ を

$$f(x, y, z) = \exp \begin{pmatrix} iz & x + iy \\ -x + iy & -iz \end{pmatrix}$$

によって定める。 f の像は 3 次元球面 S^3 同一視できることをたしかめ、これを用いて、3 次元の球面はリー群の構造をもつことを示せ。

問 12 複素数を成分とする行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、一次分数変換を $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ と定義する。

1) 一次分数変換は $cz + d \neq 0$ なる点 $z = x + iy$ において、角度を保つことを示せ。

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ のとき、上半平面 $\{x + iy : y > 0\}$ は単位円板 $\{x + iy : x^2 + y^2 < 1\}$ に 1 対 1 に写されることを示せ。

以下では、直線は円の特珠な場合 (半径無限の円) と解釈する。

問 13 一次分数変換によって円は円にうつることを示せ。

問 14 2 つの円が直交しているならば、一次分数変換による像も 2 つの直交する円になることを示せ。

問 15 $(a, b), (c, d)$ は 2 次元格子の 2 点とする (すなわち、 a, b, c, d はすべて整数とする)。このとき、次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ。

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$

(ii) ベクトル $(a, b), (c, d)$ が張る平行四辺形の面積が 1 であり、かつ $\operatorname{Im} \frac{ai + b}{ci + d} > 0$

問 16 1) 複素平面の集合 F を

$$F = \{x + iy : x^2 + y^2 \geq 1, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, y > 0\}$$

と定めるとき、 F を図示せよ。

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ をいろいろとりかえて変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ による F の像を図示せよ (たとえば、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のときに、 F の像を図示せよ)。

3) 上半平面 $\{x + iy : y > 0\}$ の任意の元は、 $\frac{az+b}{cz+d}$ ($z \in F, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$) という形の表示をもつことを示せ。

問 17 上記の答と、ポアンカレ円板のタイル張り (5 頁の右上図) とを比較して論ぜよ (ヒント: 一次分数変換 $w = \frac{z-i}{z+i}$ を考えよ)

問 18 麻の葉、籠目、七宝つなぎ、青海波 (講義のプリント図 1) の対称性を保つ群は互いに同型でないことを示せ。

問 19 日常で見かける文様で、その対称性を保つ群が互いに同型でないものをできるだけたくさん見つけよ。講義のプリント図 2 のように 17 種類の対称性があるが、5 種類以上発見することを目標とするとよい。

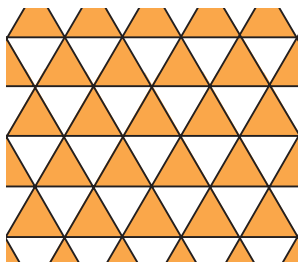
問 20 軌道空間として、トーラス、メビウスの帯、クラインの壺が現れるような、平面の運動からなる不連続群を記述せよ。

問 21 一葉双曲面 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ に $SL(2, \mathbb{R})$ の対称性を見出せ (ヒント: 一様双曲面を行列の空間 $\{B = \begin{pmatrix} y & x+z \\ x-z & -y \end{pmatrix} : \det B = -1\}$ に実現し、 $B \mapsto gB^t g$ という変換を考える)。

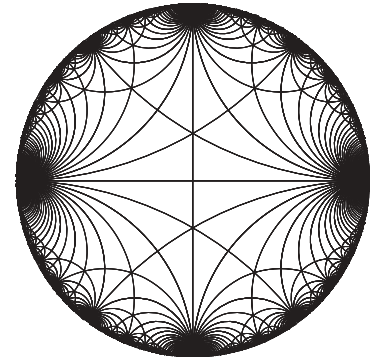
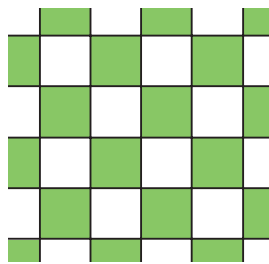
問 22 局所的な形を与えて大域的な形がどのように決まるかについて考えたことを書いてみてください。例えば空間形予想 (文献 [10] の予想 2.6.2) (等方的な閉じた宇宙がどんな次元・符号で存在するか?) など。

問 23 この講義に関する感想を書いて下さい。

まずこの論説のキーワードを直感的に述べてみることにする。「同じ形」の「タイル」で「敷き詰め」られた空間を思い浮かべてみよう。



ユークリッド平面におけるタイル張り



ポアンカレ平面における
タイル張り

そこでは、

「敷き詰め方」を表す(非可換)対称性の代数構造が不連続群,
1個1個の「タイル」がクリフォード・クライン形,
空間における「同じ形」という概念を規定するのが幾何構造
にあたる。従来のリーマン幾何での枠組みを超えた世界で、空間の局所的な
幾何構造と大域的な構造(不連続群)が織りなす新しい物語の序章を形にし、
いくつかの未解決問題を提起して、物語のさらなる展開を読者に委ねたい。

[10] 小林俊行「非リーマン等質空間と
不連続群」p.19より

参考文献

この講義に関連する入門書・啓蒙書

- [1] 難波誠 「群と幾何学」 現代数学社 1997年
- [2] ドージン他 「幾何学と群」(邦訳) シュプリンガー・フェアラーク 2000年
- [3] シャファレヴィッチ他 「変換群入門」 (邦訳)シュプリンガー・フェアラーク 2004年(新装版)
- [4] H. Weyl, "Symmetry", Princeton Paperbacks 1952

リー群・表現論の教科書

- [5] 熊原啓作 「行列・群・等質空間」 日本評論社 1999年
- [6] 小林俊行・大島利雄 「リー群と表現論」 岩波書店 2005年

より進んだ内容でこの講義に関連しているもの

- [7] M. A. Armstrong, Groups and Symmetry, Springer, 1988
- [8] 河野俊丈 「曲面の幾何構造とモジュライ」 日本評論社 1997年
- [9] サーストン 「3次元幾何学とトポロジー」(邦訳) 培風館 1999年
- [10] B. Engquist – W. Schmid 編 「数学の最先端 21世紀への挑戦」(邦訳) 第1巻 2002年, シュプリンガー・フェアラーク, pages 18–73

小林俊行著 「非リーマン等質空間と不連続群」にこの分野のたくさん
の未解決問題が掲載されています