

クラスター代数入門

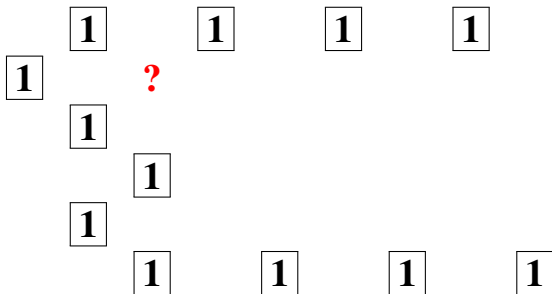
中島 啓

京大数理研

2009年6月12日

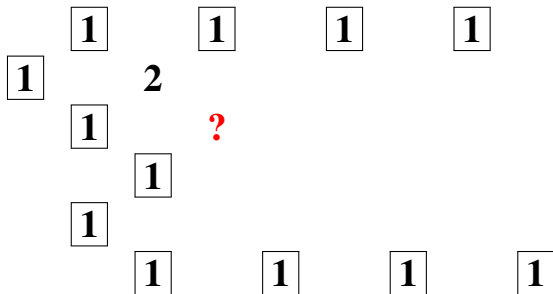
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad + 1/b$)



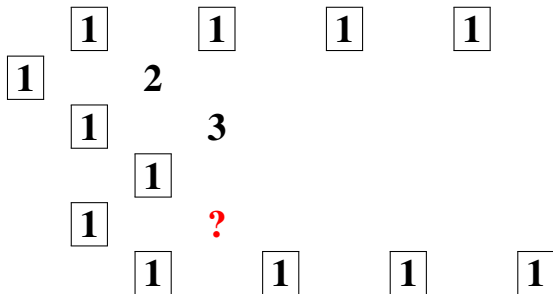
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。 $(c = ad + 1/b)$



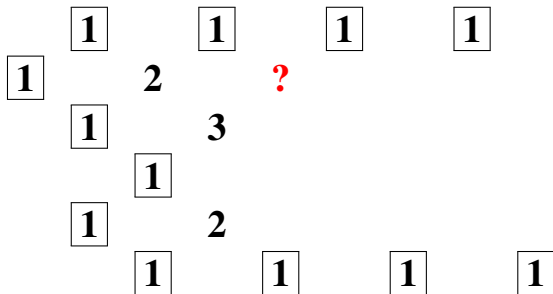
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。 $(c = ad + 1/b)$



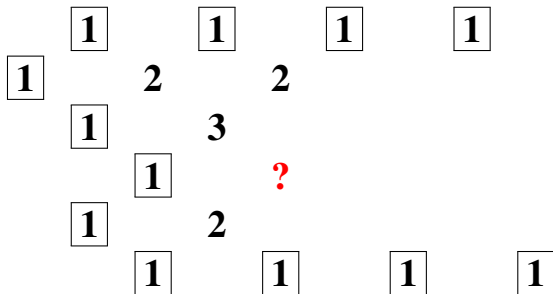
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad + 1/b$)



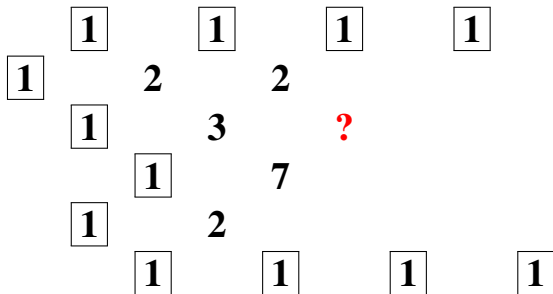
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad + 1/b$)



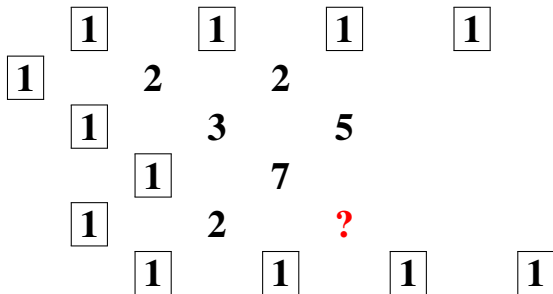
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。 $(c = ad + 1/b)$



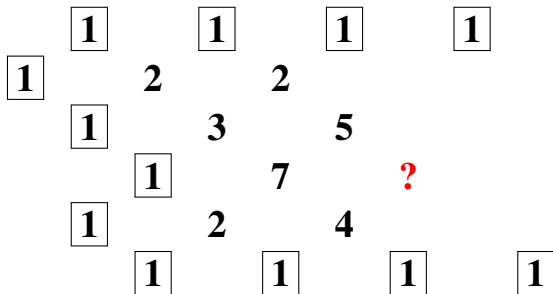
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。 $(c = ad + 1/b)$



数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)



数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)

	1		1		1		1
1		2		2		?	
	1		3		5		
		1		7		3	
	1		2		4		?
		1		1		1	
			1		1		1

数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)

	1		1		1		1
1		2		2		3	
	1		3		5		?
		1		7		3	
	1		2		4		1
		1		1		1	
			1		1		1

数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)

	1		1		1		1
1		2		2		3	?
	1		3		5		2
		1		7		3	?
	1		2		4		1
		1		1		1	1

数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)

	1		1		1		1	
1		2		2		3		1
	1		3		5		2	?
		1		7		3		1
	1		2		4		1	
		1		1		1		1

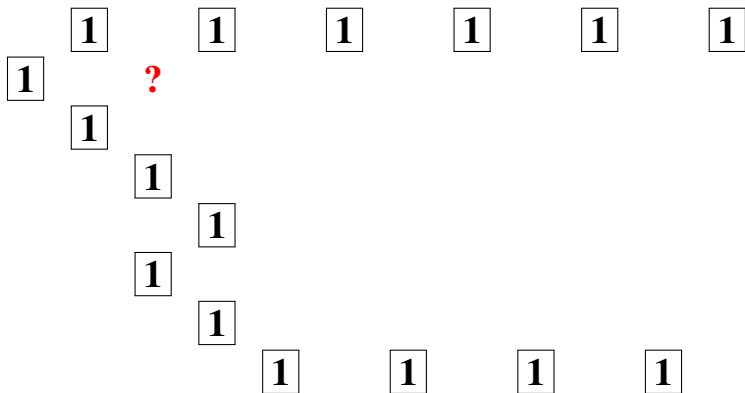
数遊び

ルール $b \begin{smallmatrix} a \\ d \end{smallmatrix} c$ が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = ad+1/b$)

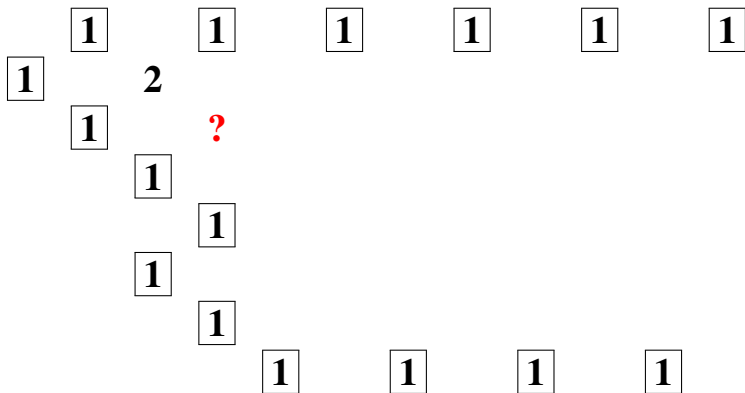
	1		1		1		1	
1		2		2		3		1
	1		3		5		2	1
		1		7		3		1
	1		2		4		1	
		1		1		1		1

Theorem

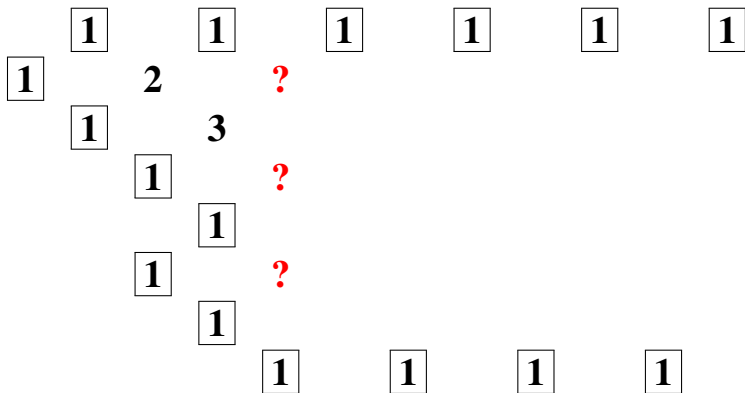
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



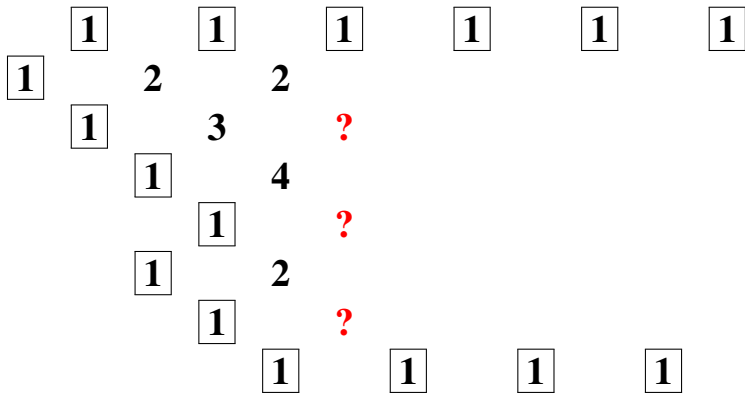
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



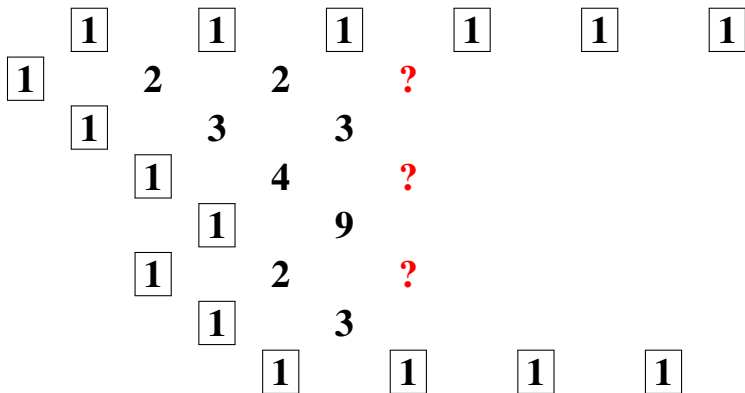
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



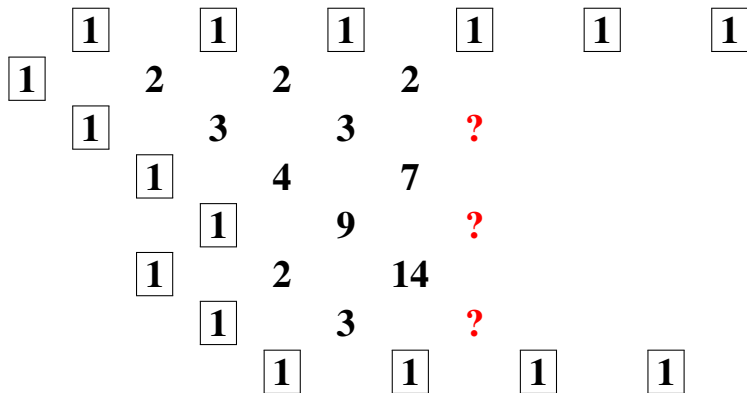
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



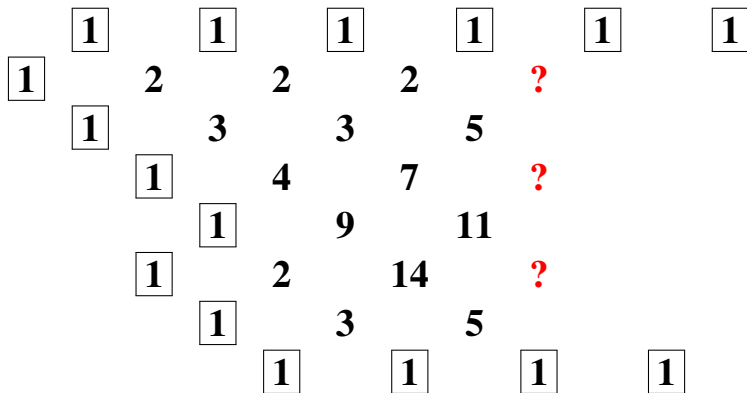
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



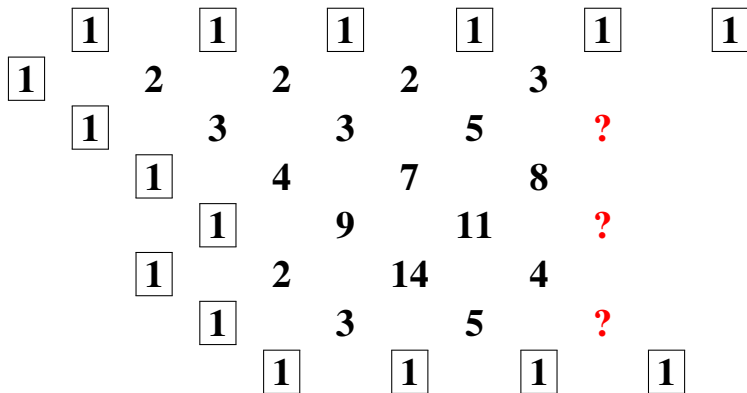
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



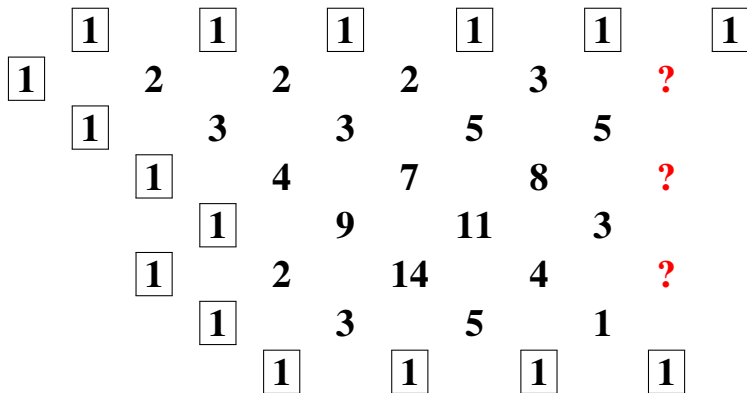
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



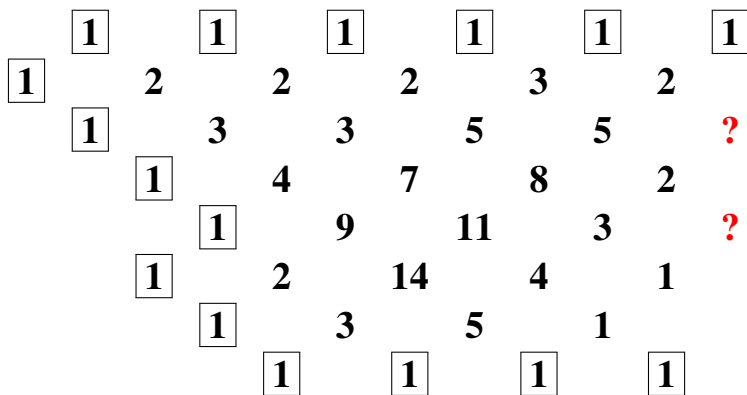
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



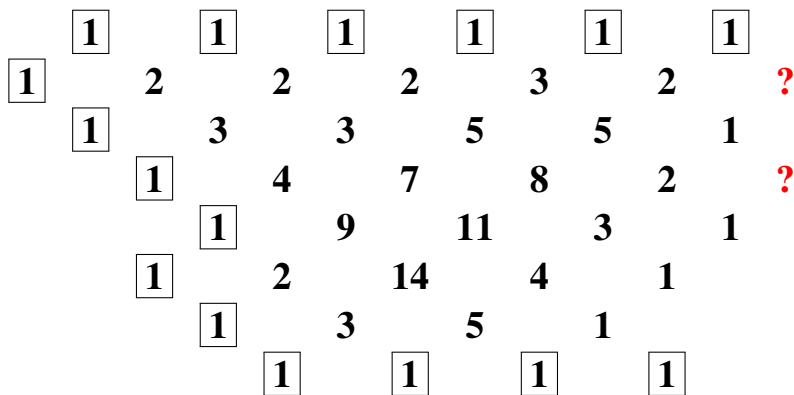
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



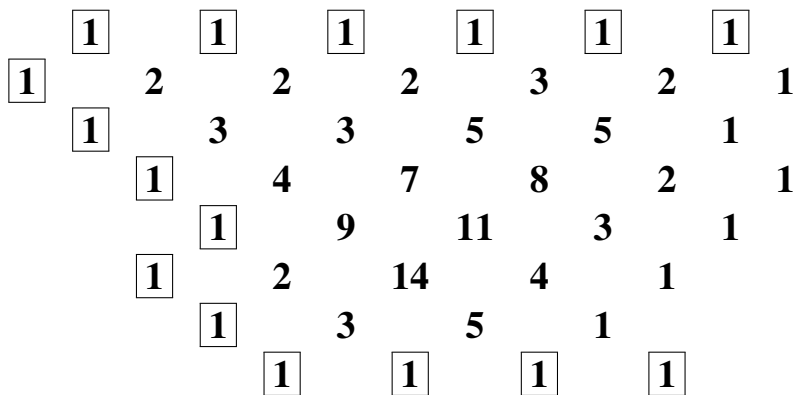
- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。

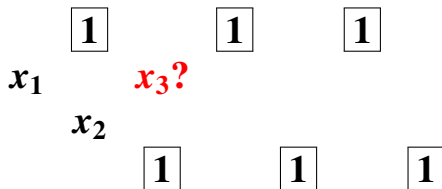


- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。



- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び1が折れ線状に並ぶ。

数式版 (A_2 型)



数式版 (A_2 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_3 & & & \\ & x_2 & & x_4? & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ & & & x_3 = x_2 + 1/x_1 & & & \end{array}$$

数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_3 & & & \\ & x_2 & & x_4 & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ & & x_3 = x_2 + 1/x_1 & & & & \\ & & x_4 = x_3 + 1/x_2 & & & & \end{array}$$

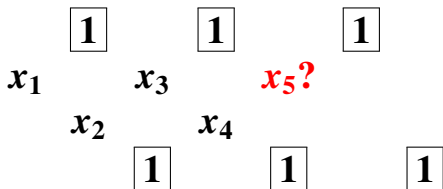
数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_3 & & & \\ & x_2 & & x_4 & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

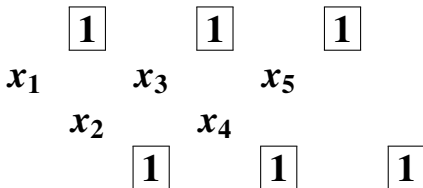
数式版 (A₂ 型)



$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

数式版 (A₂ 型)



$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3$$

数式版 (A₂ 型)

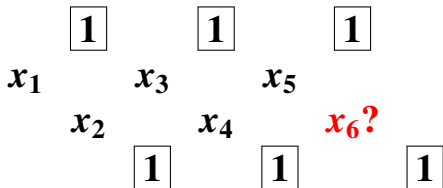
$$\begin{array}{ccccccc} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & & x_3 & & & x_5 \\ & x_2 & & & x_4 & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

数式版 (A₂ 型)



$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4$$

数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6? \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4 = \left(\frac{x_1 + 1}{x_2} + 1 \right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6? \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

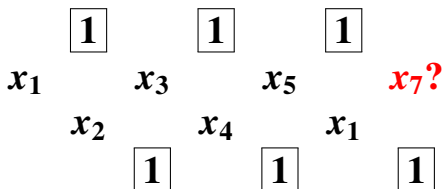
$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4 = \left(\frac{x_1 + 1}{x_2} + 1 \right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} = x_1$$

数式版 (A₂ 型)



$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4 = \left(\frac{x_1 + 1}{x_2} + 1 \right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} = x_1$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_5$$

数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & & x_3 & & x_5 & & x_7? \\
 & & x_2 & & x_4 & & x_1 & \\
 & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4 = \left(\frac{x_1 + 1}{x_2} + 1 \right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} = x_1$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_5 = (x_1 + 1) \cdot \frac{x_2}{x_1 + 1}$$

数式版 (A₂ 型)

$$\begin{array}{cccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
 x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_2 & \\
 & x_2 & & x_4 & & x_1 & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1$$

$$x_4 = x_3 + 1/x_2 = x_1 + x_2 + 1/x_1 x_2$$

$$x_5 = x_4 + 1/x_3 = \dots = x_1 + 1/x_2$$

$$x_6 = x_5 + 1/x_4 = \left(\frac{x_1 + 1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} = x_1$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_5 = (x_1 + 1) \cdot \frac{x_2}{x_1 + 1} = x_2$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ x_1 & & x_4? & & & \\ & x_2 & & & & \\ x_3 & & x_5? & & & \\ & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_4 & & & & & \\ & x_2 & & x_6? & & & & \\ x_3 & & x_5 & & & & & \\ & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_4 & = & x_2+1/x_1, & & x_5 & = & x_2+1/x_3, \\ x_6 & = & x_4x_5+1/x_2 & & & & & \end{array}$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{cccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_4 & & x_7? & & & \\ & x_2 & & x_6 & & & & \\ x_3 & & x_5 & & x_8? & & & \\ & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_4 = x_2 + 1/x_1, \quad x_5 = x_2 + 1/x_3,$$

$$x_6 = x_4 x_5 + 1/x_2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3 / x_1 x_2 x_3,$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_4$$

$$x_8 = x_6 + 1/x_5$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_4 & & x_7 & & \\ & x_2 & & x_6 & & x_9? & \\ x_3 & & x_5 & & x_8 & & \\ \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_4 = x_2 + 1/x_1, \quad x_5 = x_2 + 1/x_3,$$

$$x_6 = x_4 x_5 + 1/x_2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3 / x_1 x_2 x_3,$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_4 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_6 + 1/x_5 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_1 x_2,$$

$$x_9 = x_7 x_8 + 1/x_6$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{ccccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ x_1 & & x_4 & & x_7 & & x_{10}? & \\ & x_2 & & x_6 & & x_9 & & \\ x_3 & & x_5 & & x_8 & & x_{11}? & \\ & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

$$x_4 = x_2 + 1/x_1, \quad x_5 = x_2 + 1/x_3,$$

$$x_6 = x_4 x_5 + 1/x_2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3 / x_1 x_2 x_3,$$

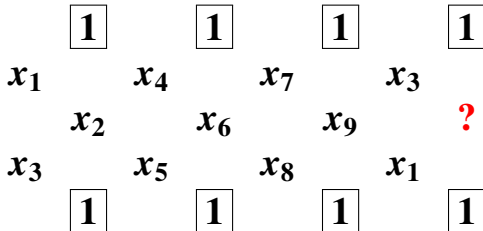
$$x_7 = x_6 + 1/x_4 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_6 + 1/x_5 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_1 x_2,$$

$$x_9 = x_7 x_8 + 1/x_6 = \dots = 1 + x_1 x_3 / x_2,$$

$$x_{10} = x_9 + 1/x_7, \quad x_{11} = x_9 + 1/x_8$$

三変数版 (A_3 型)



$$x_4 = x_2 + 1/x_1, \quad x_5 = x_2 + 1/x_3,$$

$$x_6 = x_4 x_5 + 1/x_2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3 / x_1 x_2 x_3,$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_4 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_6 + 1/x_5 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_1 x_2,$$

$$x_9 = x_7 x_8 + 1/x_6 = \dots = 1 + x_1 x_3 / x_2,$$

$$x_{10} = x_9 + 1/x_7 = \dots = x_3, \quad x_{11} = x_9 + 1/x_8 = \dots = x_1,$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_4 & & x_7 & & x_3 \\
 & x_2 & & x_6 & & x_9 & & x_2 \\
 x_3 & & x_5 & & x_8 & & x_1 & \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
 \end{array}$$

$$x_4 = x_2 + 1/x_1, \quad x_5 = x_2 + 1/x_3,$$

$$x_6 = x_4 x_5 + 1/x_2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3 / x_1 x_2 x_3,$$

$$x_7 = x_6 + 1/x_4 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_6 + 1/x_5 = \dots = 1 + x_2 + x_1 x_3 / x_1 x_2,$$

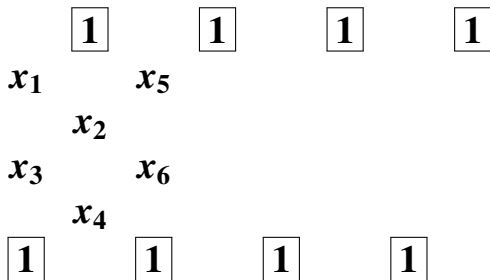
$$x_9 = x_7 x_8 + 1/x_6 = \dots = 1 + x_1 x_3 / x_2,$$

$$x_{10} = x_9 + 1/x_7 = \dots = x_3, \quad x_{11} = x_9 + 1/x_8 = \dots = x_1,$$

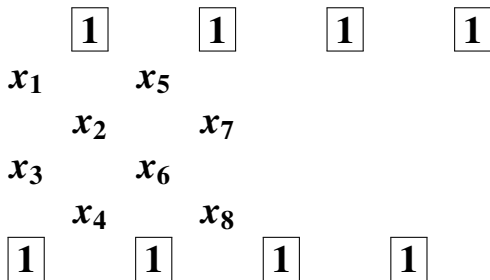
Theorem

- ① このようにして現れる x_i は、最初に与えられた変数 (上の例の x_1, x_2, x_3) で表すと、分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される。
- ② 最初に与えられた変数を除くと、必ず分数式になり、また分母に現れる単項式はすべて異なる。
- ③ しばらく並べると、上のように再び最初の変数が折れ線状に並ぶ。

$$\begin{array}{cccc}
 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\
 x_1 & & & & \\
 & x_2 & & & \\
 x_3 & & & & \\
 & x_4 & & & \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}
 \end{array}$$



$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3,$$



$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4,$$

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_5 & & x_9 & & \\
 & x_2 & & x_7 & & & \\
 x_3 & & x_6 & & x_{10} & & \\
 & x_4 & & x_8 & & & \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
 \end{array}$$

$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4, \quad x_9 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1/x_2 x_3,$$

$$x_{10} = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2 / x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_5 & & x_9 & & \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & \\
 x_3 & & x_6 & & x_{10} & & \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
 \end{array}$$

$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4, \quad x_9 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1/x_2 x_3,$$

$$x_{10} = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2 / x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{11} = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1/x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{12} = x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2,$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & & & \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & & & \\
 x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & & & \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & & & \\
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & &
 \end{array}$$

$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4, \quad x_9 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1/x_2 x_3,$$

$$x_{10} = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2 / x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{11} = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1/x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{12} = x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2, \quad x_{13} = x_3 + 1/x_4, \quad x_{14} = x_1 x_3 + 1/x_2$$

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
x_1		x_5		x_9		x_{13}	
	x_2		x_7		x_{11}		x_3
x_3		x_6		x_{10}		x_{14}	
	x_4		x_8		x_{12}		x_1
	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$

$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4, \quad x_9 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1/x_2 x_3,$$

$$x_{10} = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2 / x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{11} = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1/x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{12} = x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2, \quad x_{13} = x_3 + 1/x_4, \quad x_{14} = x_1 x_3 + 1/x_2$$

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	
x_1		x_5		x_9		x_{13}		x_4
	x_2		x_7		x_{11}		x_3	
x_3		x_6		x_{10}		x_{14}		x_2
	x_4		x_8		x_{12}		x_1	
$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		

$$x_5 = x_2 + 1/x_1, \quad x_6 = x_2 x_4 + 1/x_3, \quad x_7 = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2 x_3,$$

$$x_8 = x_2 x_4 + x_3 + 1/x_3 x_4, \quad x_9 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1/x_2 x_3,$$

$$x_{10} = x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2 / x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{11} = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1/x_2 x_3 x_4,$$

$$x_{12} = x_2 + x_1 x_3 + 1/x_1 x_2, \quad x_{13} = x_3 + 1/x_4, \quad x_{14} = x_1 x_3 + 1/x_2$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

x_1 x_3

x_2 x_4

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ & x_2 \quad x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^2/x_4$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_1 \\ & & & & & & & & \\ & & & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = \mathbf{x}_1,$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_1 & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_8 = 1 + x_7^2/x_6$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_1 \\ & & & & & & & \\ & & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_2 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_8 = 1 + x_7^2/x_6 = \mathbf{x}_2$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_2 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^2/x_2 = \dots = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2 + 1 + x_1^2/x_1 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^2/x_4 = \dots = 1 + x_1^2/x_2,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1, \quad x_8 = 1 + x_7^2/x_6 = x_2$$

となって元に戻ります。

三乗版 (G_2 型)

x_1 x_3

x_2 x_4

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & & x_3 & & x_5 & & \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 & \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^3/x_4$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \\ & & & & & & & \\ & & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x_1} & & \mathbf{x_3} & & \mathbf{x_5} & & \mathbf{x_7} \\ & & \mathbf{x_2} & & \mathbf{x_4} & & \mathbf{x_6} \end{array}$$

$$\mathbf{x_3} = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x_4} = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$\mathbf{x_5} = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x_6} = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$\mathbf{x_7} = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2,$$

三乗版 (G_2 型)

x_1 x_3 x_5 x_7

x_2 x_4 x_6 x_8

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2, \quad x_8 = 1 + x_7^3/x_6$$

三乗版 (G_2 型)

x_1 x_3 x_5 x_7

x_2 x_4 x_6 x_8

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2, \quad x_8 = 1 + x_7^3/x_6 = x_1^3 + 1/x_2,$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_7 & & \mathbf{x}_9 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 1/\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + \mathbf{x}_3^3/\mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2^3 + 3\mathbf{x}_2^2 + 3\mathbf{x}_2 + 1/\mathbf{x}_1^3 \mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + \mathbf{x}_4/\mathbf{x}_3 = \dots = \mathbf{x}_2^2 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^3 + 1/\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + \mathbf{x}_5^3/\mathbf{x}_4 = \dots = \mathbf{x}_1^6 + 2\mathbf{x}_1^3 + 3\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1^3 + 1 + \mathbf{x}_2^3 + 3\mathbf{x}_2^2 + 3\mathbf{x}_2/\mathbf{x}_2^2 \mathbf{x}_1^3,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + \mathbf{x}_6/\mathbf{x}_5 = \dots = \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2 + 1/\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_8 = 1 + \mathbf{x}_7^3/\mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_1^3 + 1/\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{x}_9 = 1 + \mathbf{x}_8/\mathbf{x}_7$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_7 & & \mathbf{x}_1 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2, \quad \mathbf{x}_8 = 1 + x_7^3/x_6 = x_1^3 + 1/x_2,$$

$$\mathbf{x}_9 = 1 + x_8/x_7 = \mathbf{x}_1,$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_7 & & \mathbf{x}_1 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 & & \mathbf{x}_{10} \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$\mathbf{x}_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2, \quad \mathbf{x}_8 = 1 + x_7^3/x_6 = x_1^3 + 1/x_2,$$

$$\mathbf{x}_9 = 1 + x_8/x_7 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_{10} = 1 + x_9^3/x_8$$

三乗版 (G_2 型)

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & & x_2 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^3/x_2 = \dots = x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3 = \dots = x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^3/x_4 = \dots = x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2/x_2^2 x_1^3,$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5 = \dots = x_1^3 + x_2 + 1/x_1 x_2, \quad x_8 = 1 + x_7^3/x_6 = x_1^3 + 1/x_2,$$

$$x_9 = 1 + x_8/x_7 = x_1, \quad x_{10} = 1 + x_9^3/x_8 = x_2$$

となって元に戻ります。

四乗版? (H_2 型)

x_1 x_3

x_2 x_4

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = 1 + x_3^4/x_2$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = 1 + x_4/x_3$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2,$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_6 = 1 + x_5^4/x_4$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} \left[x_1^{12} + 3x_1^8 + 6x_2^2 x_1^8 + 8x_2 x_1^8 + 36x_2^3 x_1^4 + 3x_1^4 + 19x_2^4 x_1^4 + 34x_2^2 x_1^4 + 4x_2^5 x_1^4 \right. \\ \left. + 16x_1^4 x_2 + 56x_2^5 + 8x_2 + 1 + 8x_2^7 + 28x_2^2 + 70x_2^4 + 56x_2^3 + 28x_2^6 + x_2^8 \right],$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} \left[x_1^{12} + 3x_1^8 + 6x_2^2 x_1^8 + 8x_2 x_1^8 + 36x_2^3 x_1^4 + 3x_1^4 + 19x_2^4 x_1^4 + 34x_2^2 x_1^4 + 4x_2^5 x_1^4 \right. \\ \left. + 16x_1^4 x_2 + 56x_2^5 + 8x_2 + 1 + 8x_2^7 + 28x_2^2 + 70x_2^4 + 56x_2^3 + 28x_2^6 + x_2^8 \right],$$

$$x_7 = 1 + x_6/x_5$$

四乗版? (H_2 型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_2^3 + 6x_2^2 + 4x_2 + 1/x_1^4 x_2,$$

$$x_5 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2,$$

$$x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} \left[x_1^{12} + 3x_1^8 + 6x_2^2 x_1^8 + 8x_2 x_1^8 + 36x_2^3 x_1^4 + 3x_1^4 + 19x_2^4 x_1^4 + 34x_2^2 x_1^4 + 4x_2^5 x_1^4 \right. \\ \left. + 16x_1^4 x_2 + 56x_2^5 + 8x_2 + 1 + 8x_2^7 + 28x_2^2 + 70x_2^4 + 56x_2^3 + 28x_2^6 + x_2^8 \right],$$

$$x_7 = \frac{1}{x_1^5 x_2} \left[x_1^8 + 3x_2^2 x_1^4 + 5x_1^4 x_2 + 2x_1^4 + 10x_2^3 + 1 + 5x_2^4 + 10x_2^2 + x_2^5 + 5x_2 \right],$$

四乗版?

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 \end{array}$$

$$x_8 = 1 + x_7^4 / x_6$$

四乗版?

 x_1 x_3 x_5 x_7 x_2 x_4 x_6 x_8

$$\begin{aligned}x_8 = & \frac{1}{x_1^{12}x_2^5} \left[1 + 19x_1^{12}x_2^4 + 64x_1^{12}x_2^3 + 44x_1^8x_2^6 + 4x_1^8x_2^7 + 6x_1^{16}x_2^2 + 12x_1^{16}x_2 + 69x_2^8x_1^4 \right. \\ & + 8x_2^9x_1^4 + 66x_2^{10} + x_1^{20} + 12x_2^{11} + x_2^{12} + 322x_1^8x_2^4 + 168x_1^8x_2^5 + 348x_1^8x_2^3 + 84x_1^{12}x_2^2 \\ & + 48x_1^{12}x_2 + 588x_2^6x_1^4 + 12x_2 + 264x_2^7x_1^4 \\ & + 48x_1^4x_2 + 5x_1^4 + 66x_2^2 + 220x_2^3 + 495x_2^4 + 798x_2^4x_1^4 \\ & + 504x_2^3x_1^4 + 204x_2^2x_1^4 + 840x_2^5x_1^4 + 924x_2^6 \\ & + 792x_2^5 + 10x_1^8 + 792x_2^7 + 495x_2^8 + 5x_1^{16} + 220x_2^9 + 10x_1^{12} \\ & \left. + 216x_2^2x_1^8 + 72x_2x_1^8 \right],\end{aligned}$$

四乗版?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_7 & & \mathbf{x}_9 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_8 = \frac{1}{x_1^{12} x_2^5} [**],$$

$$\mathbf{x}_9 = 1 + x_8/x_7$$

四乗版?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 & & \mathbf{x}_7 & & \mathbf{x}_9 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 & & \mathbf{x}_8 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_8 = \frac{1}{x_1^{12} x_2^5} [**],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_9 = & \frac{1}{x_1^7 x_2^3} \left[x_1^{12+7 x_2 x_1^8+3 x_1^8+3 x_2^2 x_1^8+18 x_2^3 x_1^4} \right. \\ & +5 x_2^4 x_1^4+24 x_2^2 x_1^4+3 x_1^4+14 x_1^4 x_2 \\ & \left. +x_2^7+7 x_2+7 x_2^6+21 x_2^2+35 x_2^4+35 x_2^3+21 x_2^5+1 \right] \end{aligned}$$

分母のみ

$$x_3 = \frac{1}{x_1} [**], \quad x_4 = \frac{1}{x_1^4 x_2} [**],$$

$$x_5 = \frac{1}{x_1^3 x_2} [**], \quad x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} [**],$$

$$x_7 = \frac{1}{x_1^5 x_2^2} [**], \quad x_8 = \frac{1}{x_1^{12} x_2^5} [**],$$

$$x_9 = \frac{1}{x_1^7 x_2^3} [**], \quad x_{10} = \frac{1}{x_1^{16} x_2^7} [**],$$

$$x_{11} = \frac{1}{x_1^9 x_2^4} [**], \quad x_{12} = \frac{1}{x_1^{20} x_2^9} [**],$$

分母のみ

$$x_3 = \frac{1}{x_1} [**], \quad x_4 = \frac{1}{x_1^4 x_2} [**],$$

$$x_5 = \frac{1}{x_1^3 x_2} [**], \quad x_6 = \frac{1}{x_1^8 x_2^3} [**],$$

$$x_7 = \frac{1}{x_1^5 x_2^2} [**], \quad x_8 = \frac{1}{x_1^{12} x_2^5} [**],$$

$$x_9 = \frac{1}{x_1^7 x_2^3} [**], \quad x_{10} = \frac{1}{x_1^{16} x_2^7} [**],$$

$$x_{11} = \frac{1}{x_1^9 x_2^4} [**], \quad x_{12} = \frac{1}{x_1^{20} x_2^9} [**],$$

決して元に戻らない！

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_3^2 + 1/x_2$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ & x_2 \quad x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = x_4^2 + 1/x_3$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \\ & x_2 & x_4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2^2 + 1/x_1, & x_4 &= x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2, \\ x_5 &= x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2^2, \end{aligned}$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2^2,$$

$$x_6 = x_5^2 + 1/x_4$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}_1 & & \mathbf{x}_3 & & \mathbf{x}_5 \\ & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_4 & & \mathbf{x}_6 \end{array}$$

$$\mathbf{x}_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad \mathbf{x}_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$\mathbf{x}_5 = x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2^2,$$

$$\mathbf{x}_6 = \frac{1}{x_2^3 x_1^4} [x_1^6 + 2x_1^4 x_2^2 + 3x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 3x_1^2 + 4x_2^2, \\ + 4x_2^6 + x_2^8 + 1 + 6x_2^4]$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2^2,$$

$$x_6 = \frac{1}{x_2^3 x_1^4} [x_1^6 + 2x_1^4 x_2^2 + 3x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 3x_1^2 + 4x_2^2, \\ + 4x_2^6 + x_2^8 + 1 + 6x_2^4]$$

$$x_7 = x_6^2 + 1/x_5$$

上も下も二乗にしてみる。(A₁⁽¹⁾型)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = x_2^2 + 1/x_1, \quad x_4 = x_1^2 + x_2^4 + 2x_2^2 + 1/x_1^2 x_2,$$

$$x_5 = x_2^6 + 3x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 3x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^4 + 1/x_1^3 x_2^2,$$

$$x_6 = \frac{1}{x_2^3 x_1^4} [x_1^6 + 2x_1^4 x_2^2 + 3x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + 3x_1^2 + 4x_2^2, \\ + 4x_2^6 + x_2^8 + 1 + 6x_2^4]$$

$$x_7 = \frac{1}{x_2^4 x_1^5} [x_1^8 + 2x_1^6 x_2^2 + 4x_1^6 + 6x_1^4 + 9x_1^4 x_2^2 + 3x_2^4 x_1^4 + 12x_1^2 x_2^2 \\ + 4x_2^6 x_1^2 + 4x_1^2 + 12x_1^2 x_2^4 + 5x_2^8 + 1 + 10x_2^6 + x_2^{10} + 10x_2^4 + 5x_2^2]$$

やはり元に戻らない!

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & \mathbf{x_8} & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$\mathbf{x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2}$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2 = 1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3x_4,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2 = 1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3x_4,$$

以下繰り返し

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_8 & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array}$$

$$x_9 = 1+x_8/x_5, \quad x_{10} = 1+x_8/x_6$$

$$x_{11} = 1+x_8/x_7,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2 = 1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3x_4,$$

以下繰り返し

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_8 & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array}$$

$$x_9 = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_2x_3x_4, \quad x_{10} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_4,$$

$$x_{11} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2 = 1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3x_4,$$

以下繰り返し

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_8 & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array}$$

$$x_9 = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_2x_3x_4, \quad x_{10} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_4,$$

$$x_{11} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3,$$

$$x_{12} = 1+x_9x_{10}x_{11}/x_8$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ & x_4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_6 \\ & x_7 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_5 & x_8 & x_6 \\ & x_7 & \end{array}$$

$$x_5 = 1+x_2/x_1, \quad x_6 = 1+x_2/x_3, \quad x_7 = 1+x_2/x_4,$$

$$x_8 = 1+x_5x_6x_7/x_2 = 1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3x_4,$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_8 & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array}$$

$$x_9 = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_2x_3x_4, \quad x_{10} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_4,$$

$$x_{11} = (1+x_2)^2+x_1x_3x_4/x_1x_2x_3,$$

$$x_{12} = \frac{1}{x_1x_2^2x_3x_4} \left[(1+x_2)^3 + (3x_2+2)x_1x_3x_4 + x_1^2x_3^2x_4^2 \right],$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{13} & x_{12} & x_{14} \\ & x_{15} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{13} &= 1+x_{12}/x_9, & x_{14} &= 1+x_{12}/x_{10}, \\ x_{15} &= 1+x_{12}/x_{11}, \end{aligned}$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc} x_9 & x_{12} & x_{10} \\ & x_{11} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x_{13} & x_{12} & x_{14} \\ & x_{15} & \end{array}$$

$$x_{13} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_1x_2, \quad x_{14} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_3,$$
$$x_{15} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_4,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{13} &= 1+x_2+x_1x_3x_4/x_1x_2, & x_{14} &= 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_3, \\ x_{15} &= 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_4, & x_{16} &= 1+x_{13}x_{14}x_{15}/x_{12}, \end{aligned}$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & & \end{array}$$

$$x_{13} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_1 x_2, \quad x_{14} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_2 x_3,$$

$$x_{15} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_2 x_4, \quad x_{16} = 1 + x_1 x_3 x_4 / x_2,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & x_{17} & x_{16} & x_{18} \\ & & x_{19} & \end{array}$$

$$x_{13} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_1 x_2, \quad x_{14} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_2 x_3,$$

$$x_{15} = 1 + x_2 + x_1 x_3 x_4 / x_2 x_4, \quad x_{16} = 1 + x_1 x_3 x_4 / x_2,$$

$$x_{17} = 1 + x_{16} / x_{13}, \quad x_{18} = 1 + x_{16} / x_{14}, \quad x_{19} = 1 + x_{16} / x_{15},$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & x_{17} & x_{16} & x_{18} \\ & & x_{19} & \end{array}$$

$$x_{13} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_1x_2, \quad x_{14} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_3,$$

$$x_{15} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_4, \quad x_{16} = 1+x_1x_3x_4/x_2,$$

$$x_{17} = x_1, \quad x_{18} = x_3, \quad x_{19} = x_4,$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\ & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & x_{17} & x_{16} & x_{18} & \longrightarrow & x_{17} & x_{20} & x_{18} \\ & & x_{19} & & & & x_{19} & \end{array}$$

$$x_{13} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_1x_2, \quad x_{14} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_3,$$

$$x_{15} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_4, \quad x_{16} = 1+x_1x_3x_4/x_2,$$

$$x_{17} = x_1, \quad x_{18} = x_3, \quad x_{19} = x_4,$$

$$x_{20} = 1+x_{17}x_{18}x_{19}/x_{16}$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & x_9 & x_{12} & x_{10} & \longrightarrow & x_{13} & x_{12} & x_{14} & \longrightarrow & x_{13} & x_{16} & x_{14} \\
 & & x_{11} & & & & x_{15} & & & & x_{15} & \\
 \longrightarrow & x_{17} & x_{16} & x_{18} & \longrightarrow & x_{17} & x_{20} & x_{18} & = & x_1 & x_2 & x_3 \\
 & & x_{19} & & & & x_{19} & & & & x_4 &
 \end{array}$$

$$x_{13} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_1x_2, \quad x_{14} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_3,$$

$$x_{15} = 1+x_2+x_1x_3x_4/x_2x_4, \quad x_{16} = 1+x_1x_3x_4/x_2,$$

$$x_{17} = x_1, \quad x_{18} = x_3, \quad x_{19} = x_4,$$

$$x_{20} = x_2$$

分子は難しいので、とりあえず分母だけ見て
みよう。

$$A_2 : \begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_2 & x_2 \\ & x_2 & */x_1x_2 & x_1 \end{array}$$

$$B_2 : \begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1x_2 & x_1 \\ & x_2 & */x_1^2x_2 & */x_2 & x_2 \end{array}$$

$$G_2 : \begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^2x_2 & */x_1x_2 & x_1 \\ & x_2 & */x_1^3x_2 & */x_1^3x_2^2 & */x_2 & x_2 \end{array}$$

$$H_2 : \begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^3x_2 & */x_1^5x_2^2 & */x_1^7x_2^3 \dots \\ & x_2 & */x_1^4x_2 & */x_1^8x_2^3 & */x_1^{12}x_2^5 \end{array}$$

$$A_1^{(1)} : \begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_1^3x_2^2 & */x_1^5x_2^4 \dots \\ & x_2 & */x_1^2x_2 & */x_1^4x_2^3 \end{array}$$

D_4 型

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & x_2 & x_3 & \longrightarrow & */x_1 & x_2 & */x_3 & \longrightarrow & */x_1 & */x_2 & */x_3 \\
 & & x_4 & & & */x_4 & & & & */x_4 & \\
 \longrightarrow & */x_2x_3x_4 & */x_2 & */x_1x_2x_4 & \longrightarrow & */x_2x_3x_4 & */x_1x_2^2x_3x_4 & */x_1x_2x_4 & & & \\
 & & */x_1x_2x_3 & & & & */x_1x_2x_3 & & & & \\
 \longrightarrow & */x_1x_2 & */x_1x_2^2x_3x_4 & */x_2x_3 & \longrightarrow & */x_1x_2 & */x_2 & */x_2x_3 & & & \\
 & & */x_2x_4 & & & & */x_2x_4 & & & & \\
 \longrightarrow & x_1 & */x_2 & x_3 & \longrightarrow & x_1 & x_2 & x_3 & & & \\
 & & x_4 & & & & x_4 & & & &
 \end{array}$$