離散凸関数と劣モジュラ性

藤重 悟

(京都大学数理解析研究所)

要旨：整数格子点上の「凸関数」をどのように定義するのが自然だろうか？　マトロイドや劣モジュラ関数は，グラフやネットワークの最適化において極めて基本的であり有用で美しい離散構造である．本講義では，そのような離散構造を一般化する道の先に見えてくる離散凸関数についてその概要を紹介する．これは，多くの離散最適化研究者がその発展に関わり室田一雄氏(東大)によって体系化され完成された「離散凸解析」の‘はやわかり入門’のお話である．

全学共通科目「現代の数学と数理解析」，2011 年 6 月 24 日 (数理解析研究所にて)

整数格子点上の整数値関数について、

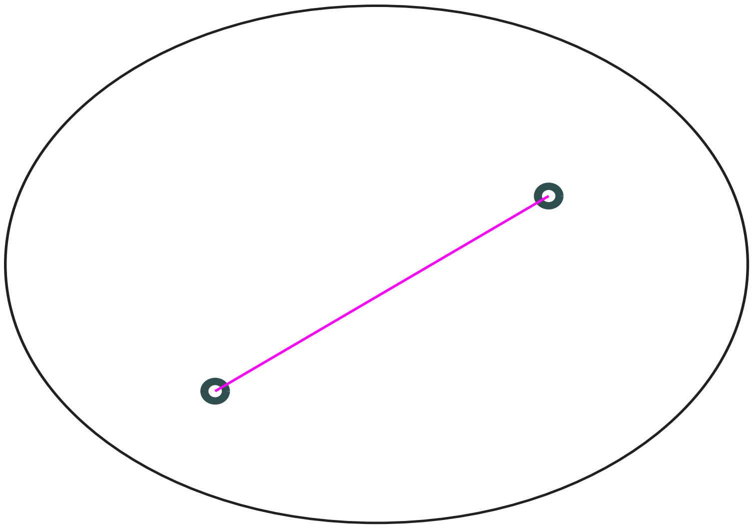
$\mathrm{L}^{\natural}$ 凸関数 = Freudenthal 単体分割に関する凸拡張可能な関数

$\Updownarrow$　(**凸共役**)　(Legendre-Fenchel 変換)

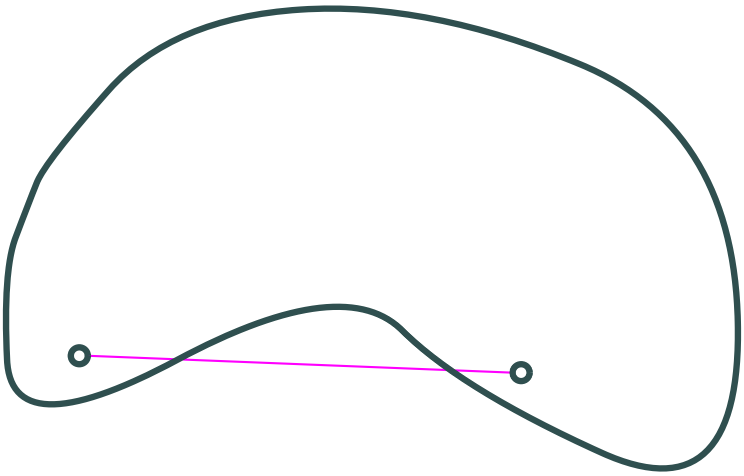
$\mathrm{M}^{\natural}$ 凸関数 = 整数一般化ポリマトロイド上でアフィンな多面体的凸関数

[準備]

凸集合

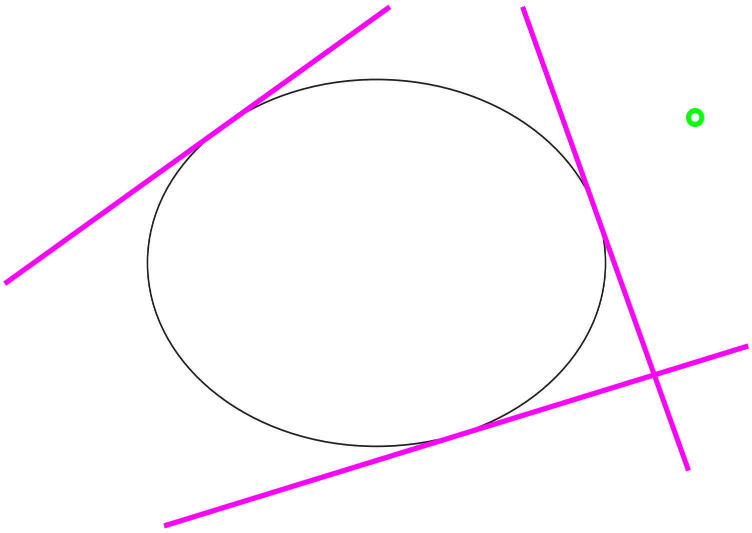


凸でない集合

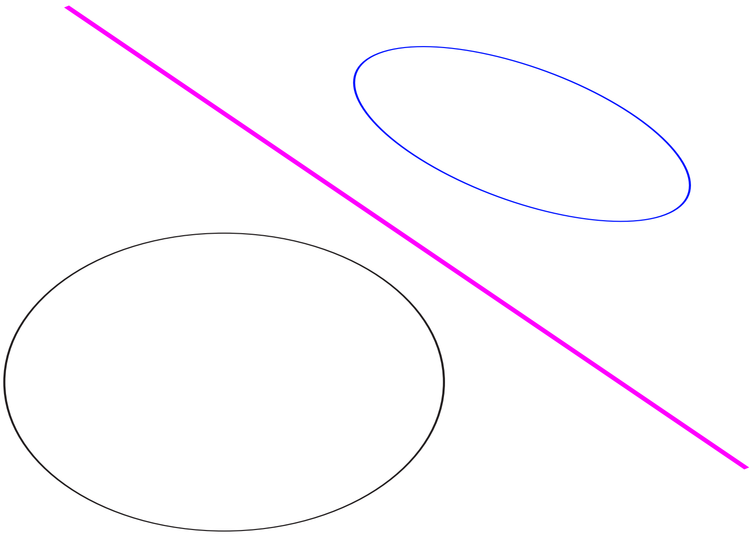


→

凸集合と支持超平面

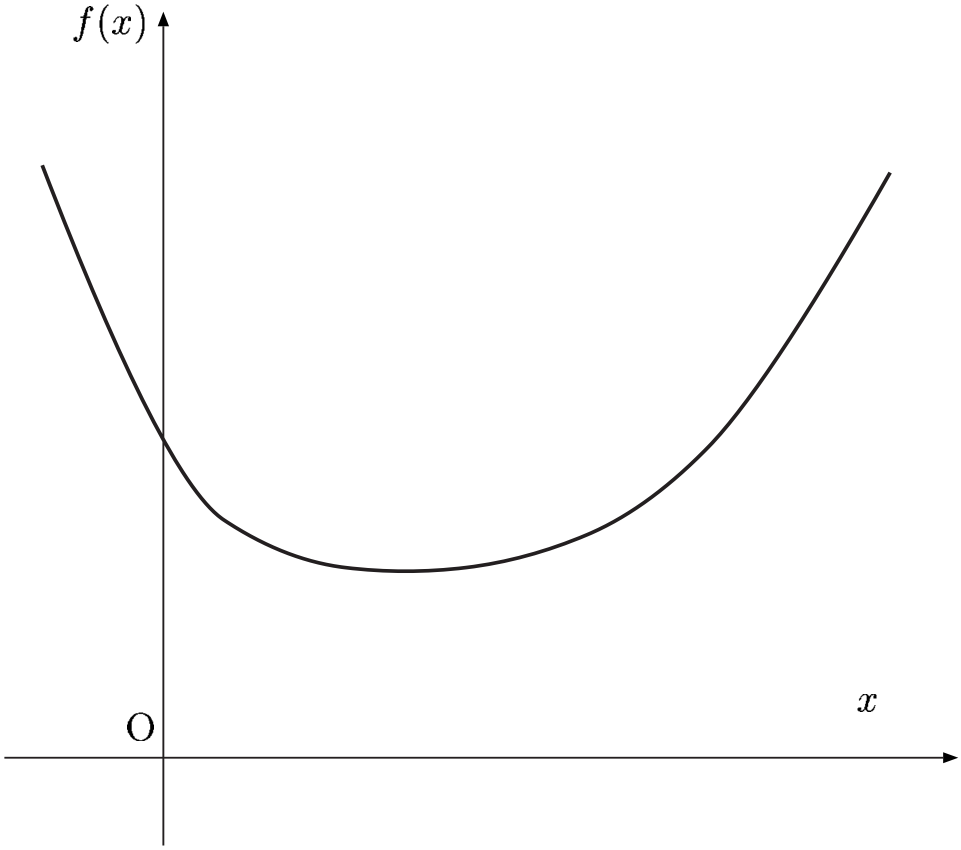


分離超平面



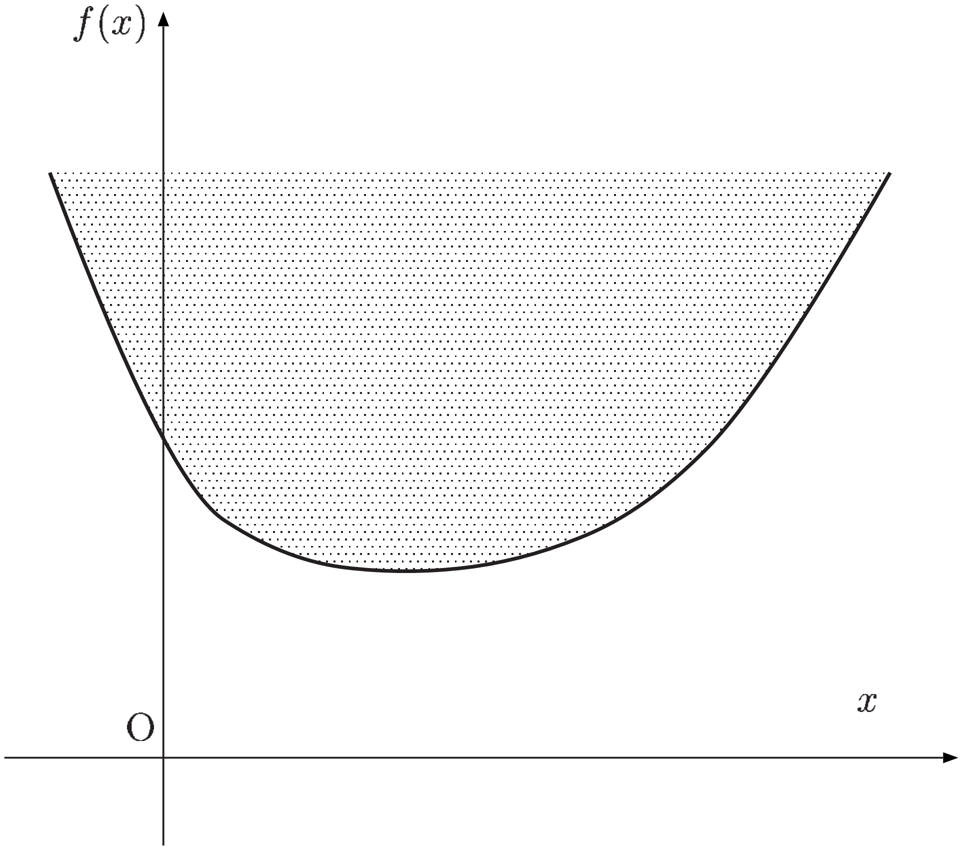
→

凸関数



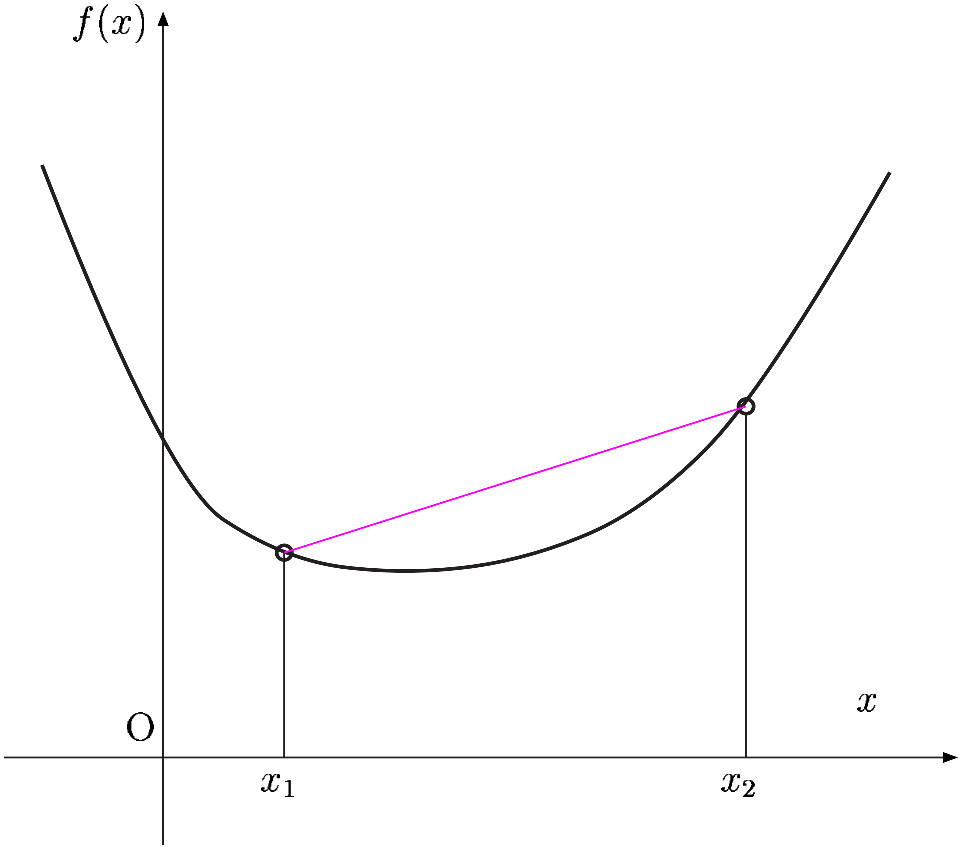
$\longrightarrow$

関数のエピグラフ



$\longrightarrow$

関数の凸性=そのエピグラフの凸性



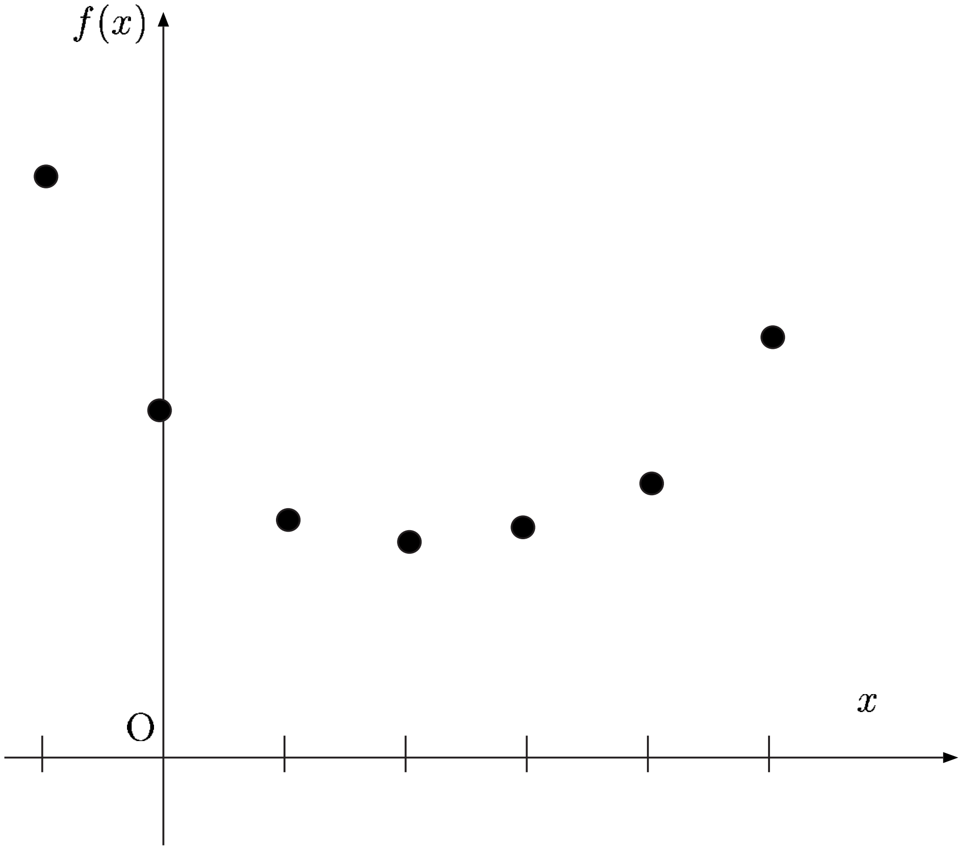
$-f$ が凸関数のとき，f を**凹関数**という.

[準備終わり]

$\longrightarrow$

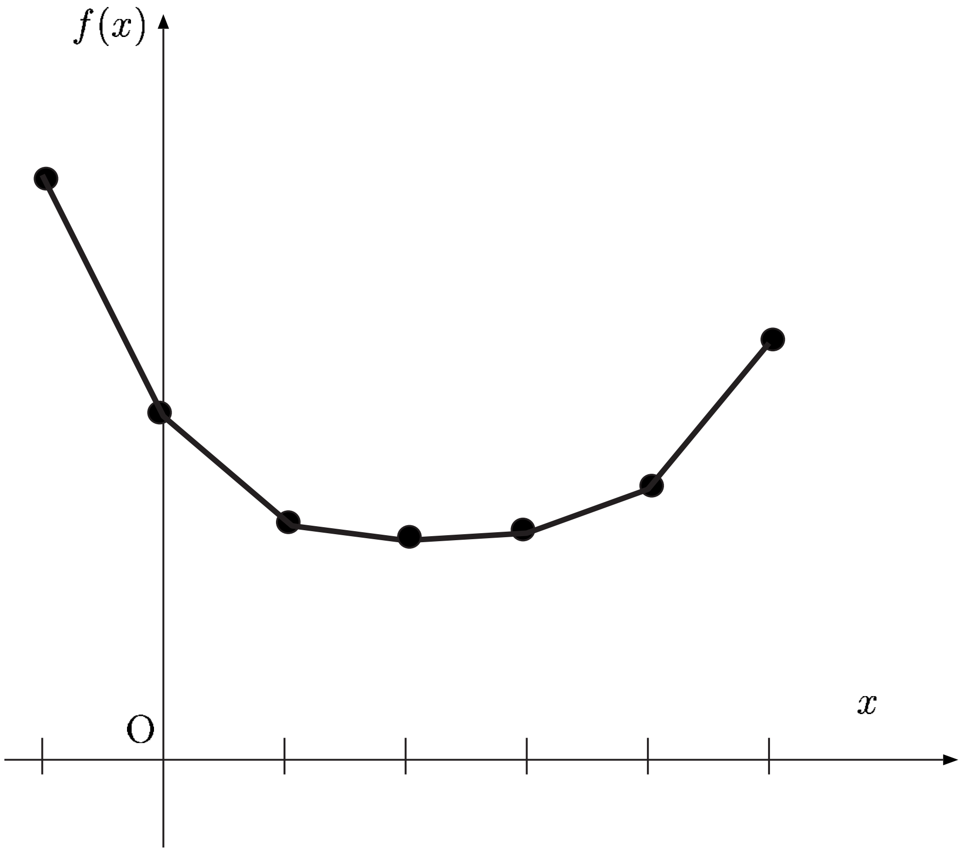
離散凸関数をどう定義するべきか？

１次元の離散的な関数 $f(x)$



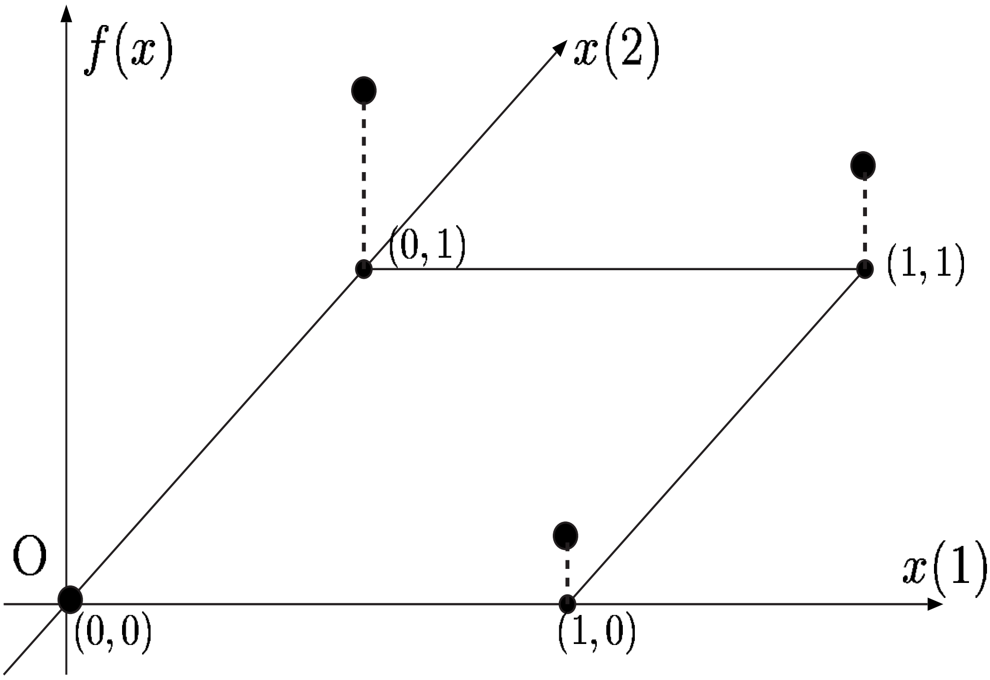
$\longrightarrow$

区分線形化で考えればよい（？）　（凸関数（？））



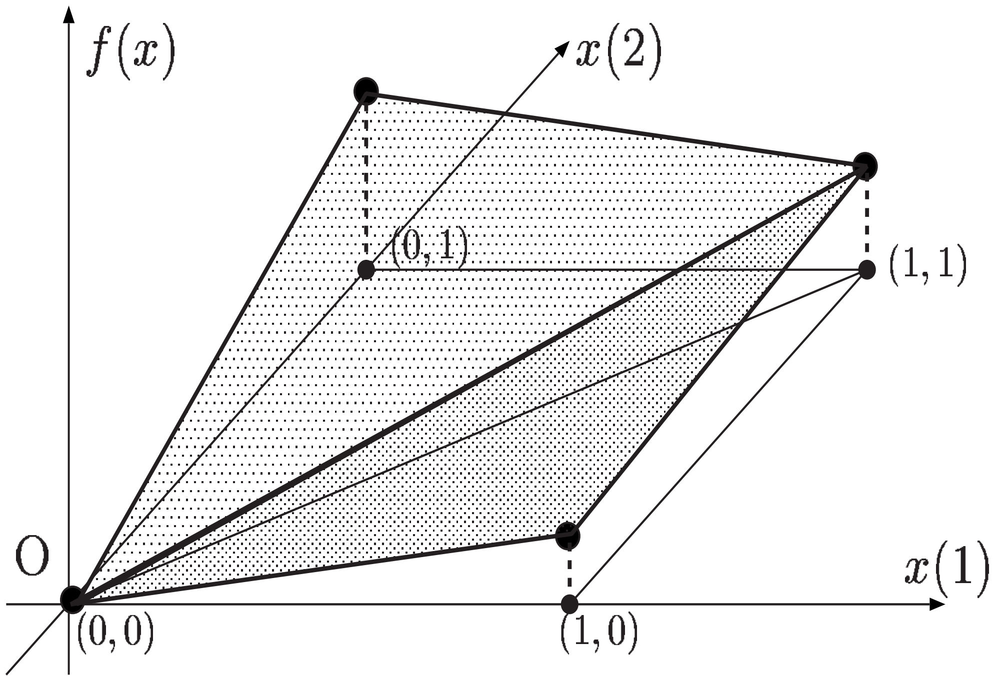
$\longrightarrow$

２次元の離散的な関数ではどうすればよいか？



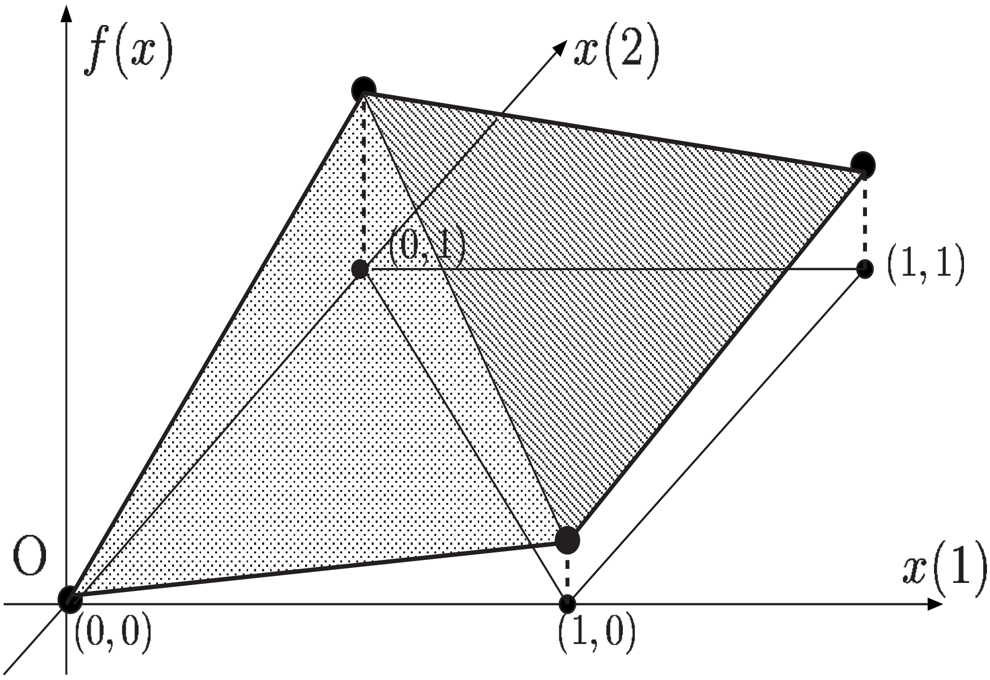
$\longrightarrow$

これで，凸関数？



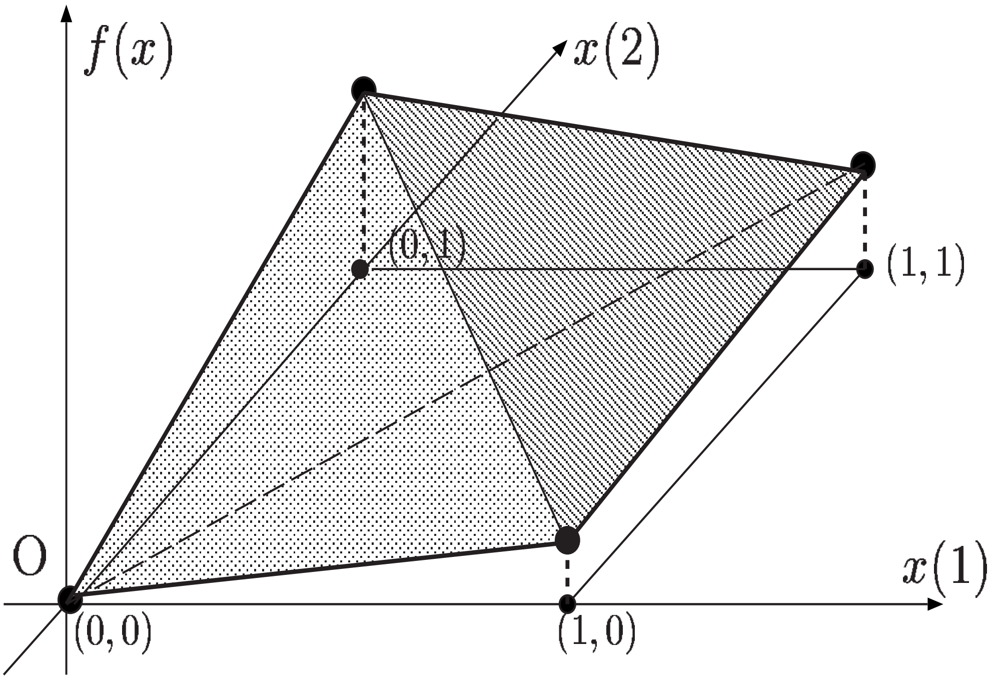
$\longrightarrow$

これだと，凹関数？



$\rightarrow$

凸包： 上側で凹関数，下側で凸関数



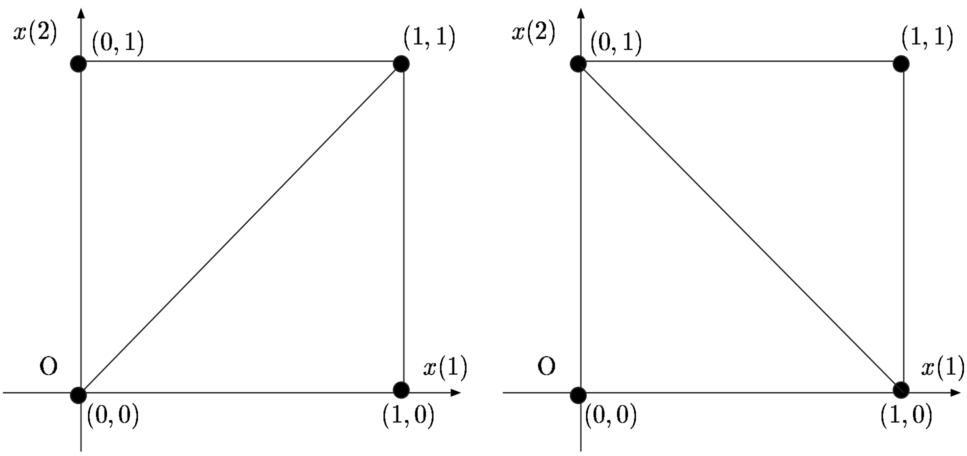
このような凸包の下側で決まる凸関数 $\bar{f}$ を関数 f の**凸化**という．元の定義域の各点 x において $\bar{f}(x) = f(x)$ であるとき、$\bar{f}$ を f の**凸拡張**という．(凸包の上側を考えて**凹化**，**凹拡張**を同様に定義する．)

単位格子点上の任意の関数 (=集合関数) は，凸拡張も凹拡張も可能である!

では，...... どうしたらよいのか？

→

離散的な凸関数の概念は（拡張される）定義域の**単体分割**に依存する！



定められた**単体分割に関する離散凸関数**

$\longrightarrow$

2 次元整数格子点に関する**平面の単体分割（三角形分割）**

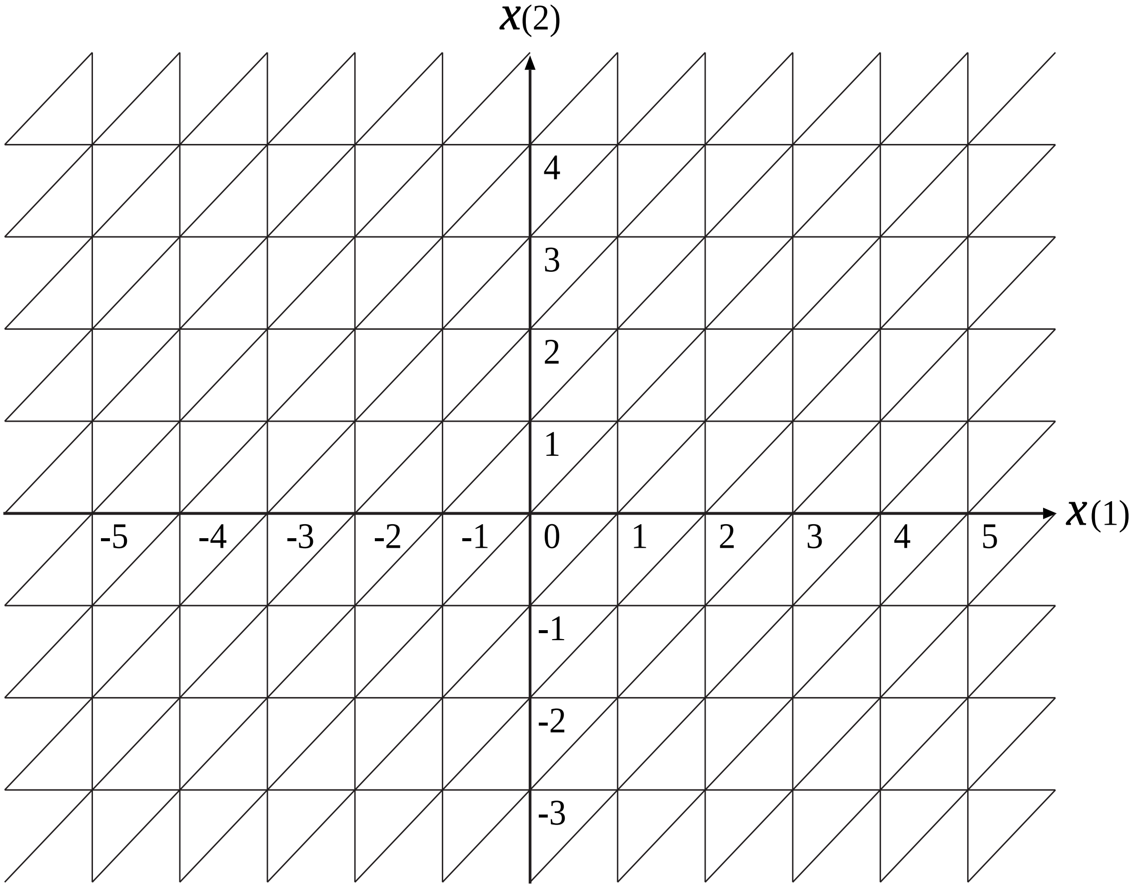


図 1: **Freudenthal 単体分割** (Coxeter-Freudenthal 単体分割)

→

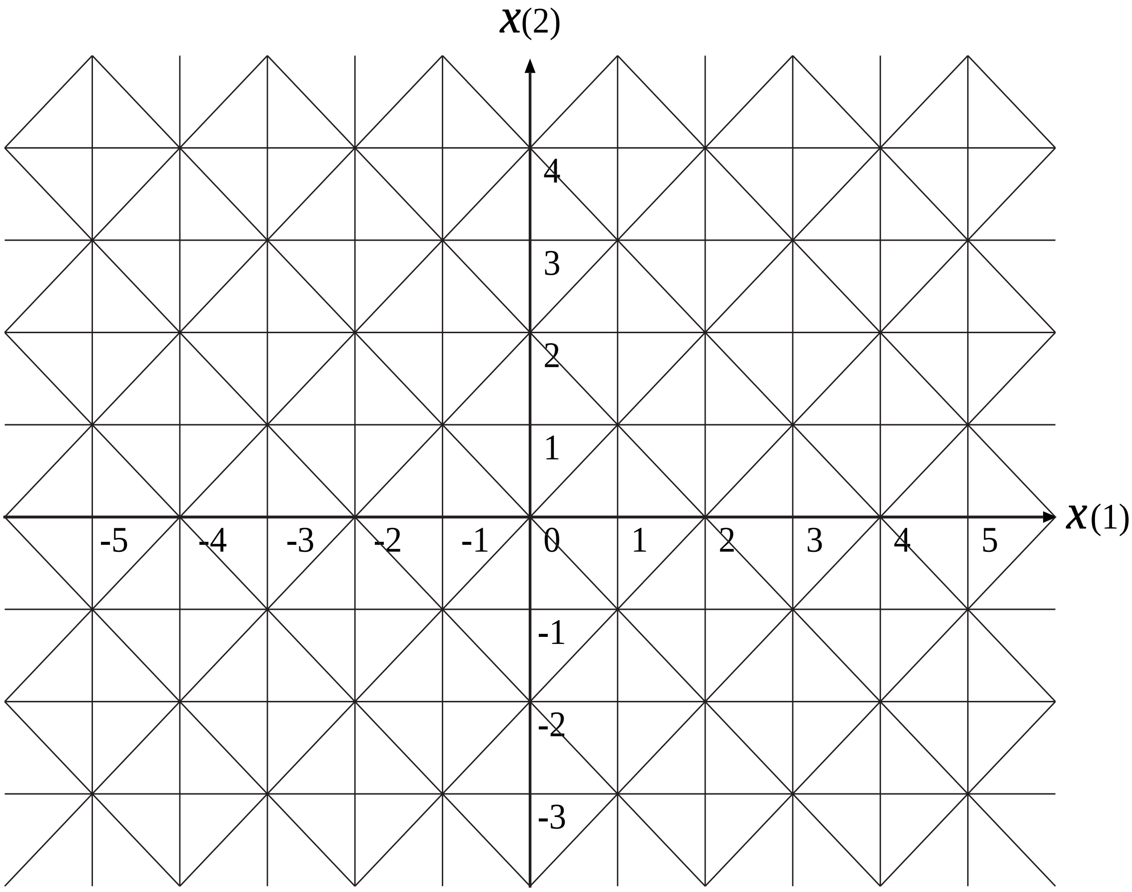


図 2: **ユニオンジャック単体分割**

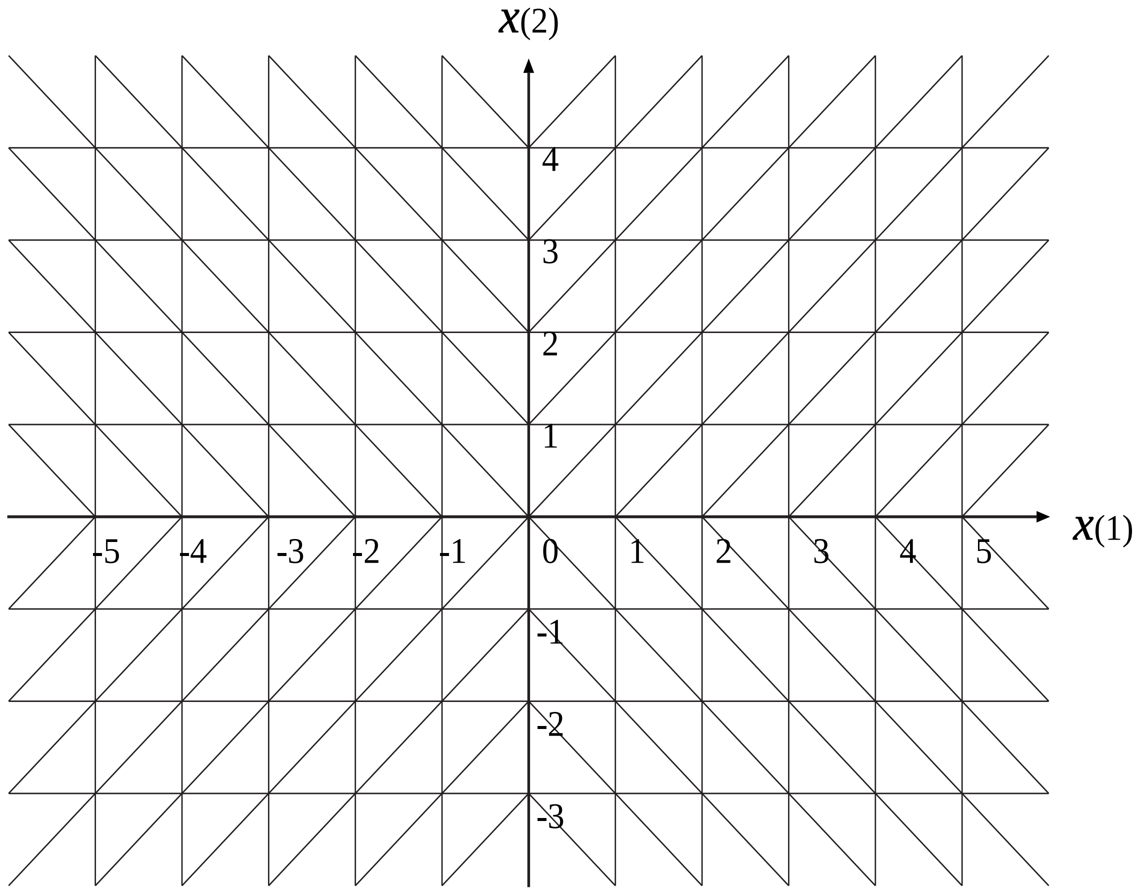


図 3: K_1' (M. Todd)

Freudenthal 単体分割に関する離散凸関数＝$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数

これは，Favati and Tardella (1990) による

Submodular integrally convex function

と同値である．

($\mathrm{L}^\natural$ **凹関数**を同様に定義する．)

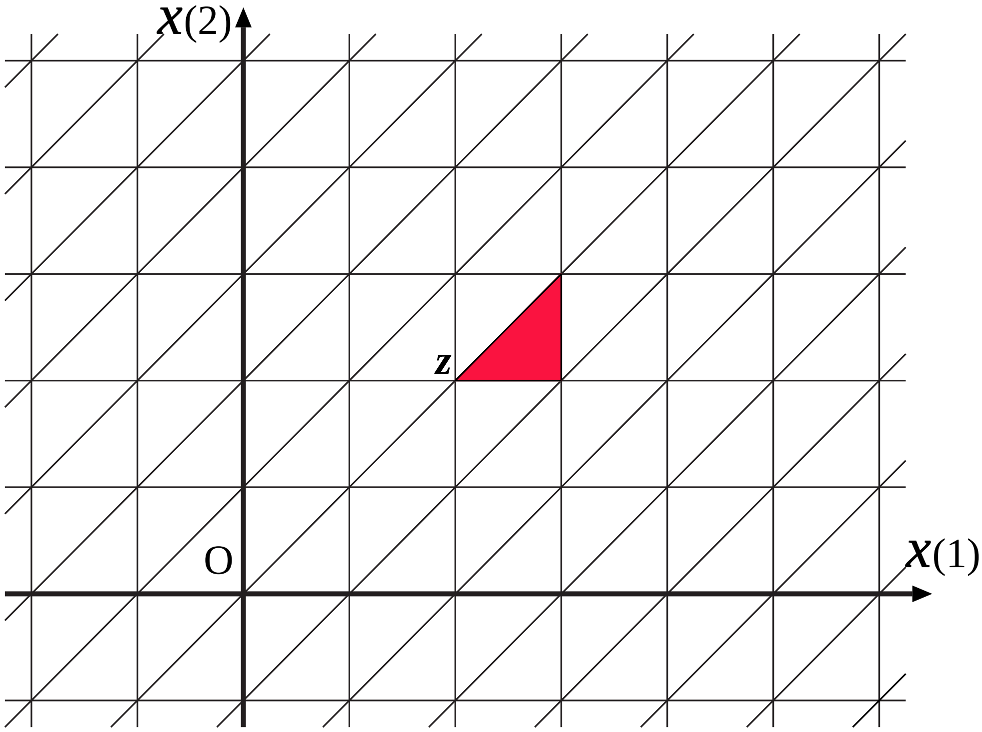
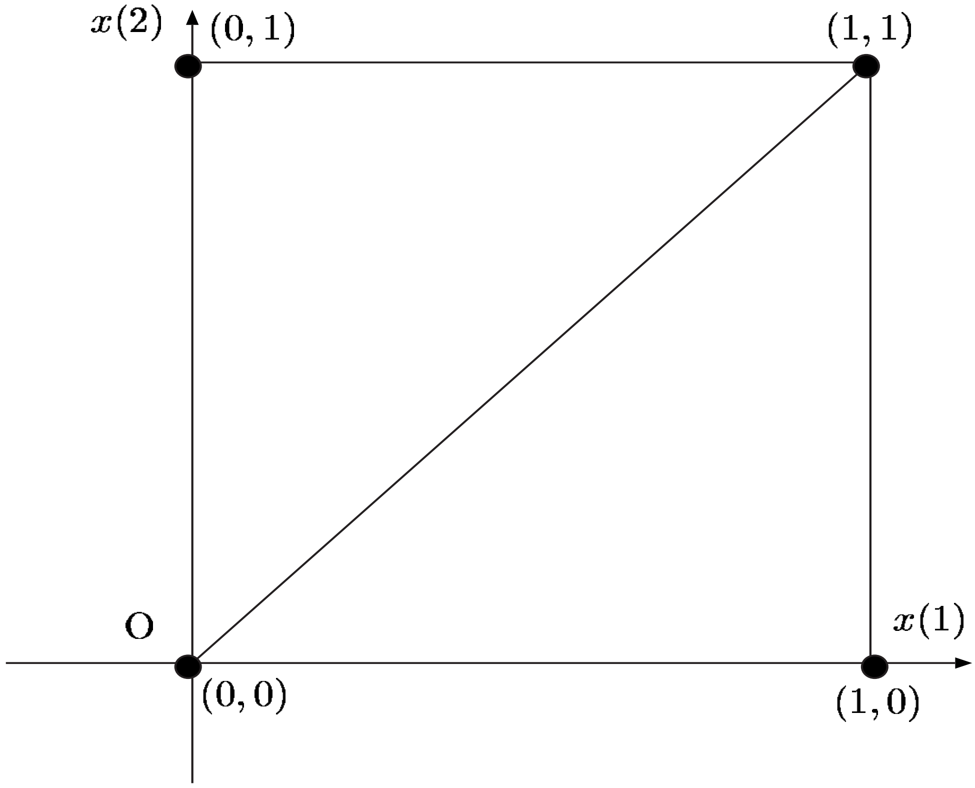


図 4: $\mathbf{R}^2$ の Freudenthal 単体分割．

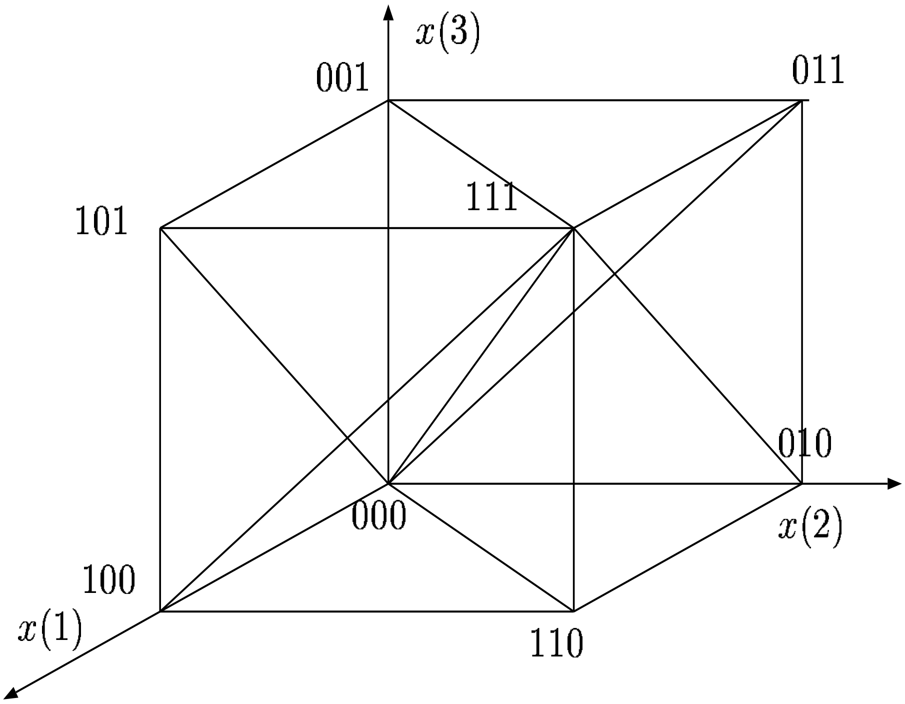
→

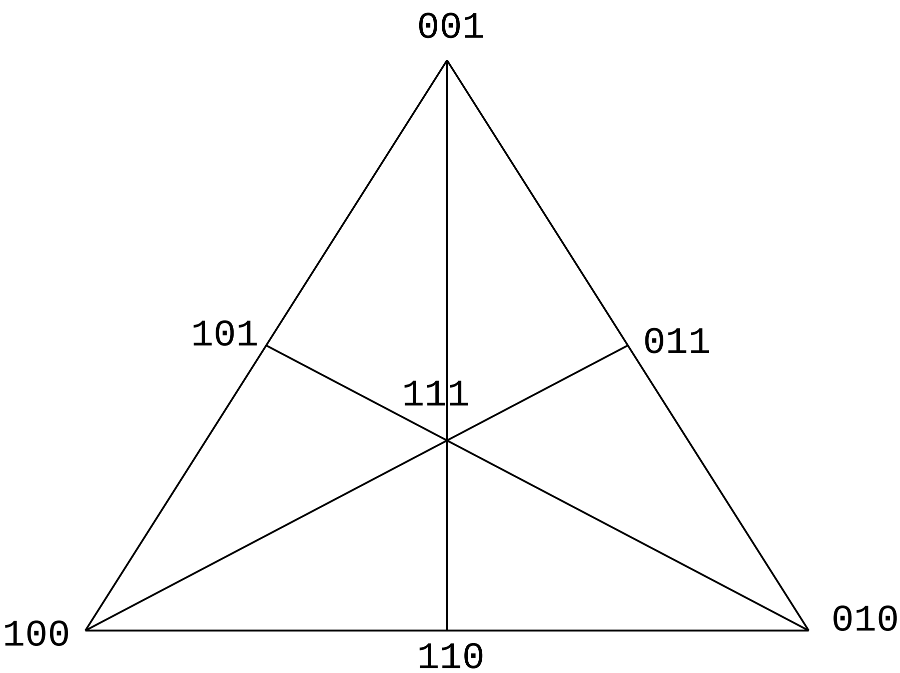
$[0,1]^2$ の Freudenthal 単体分割



$\longrightarrow$

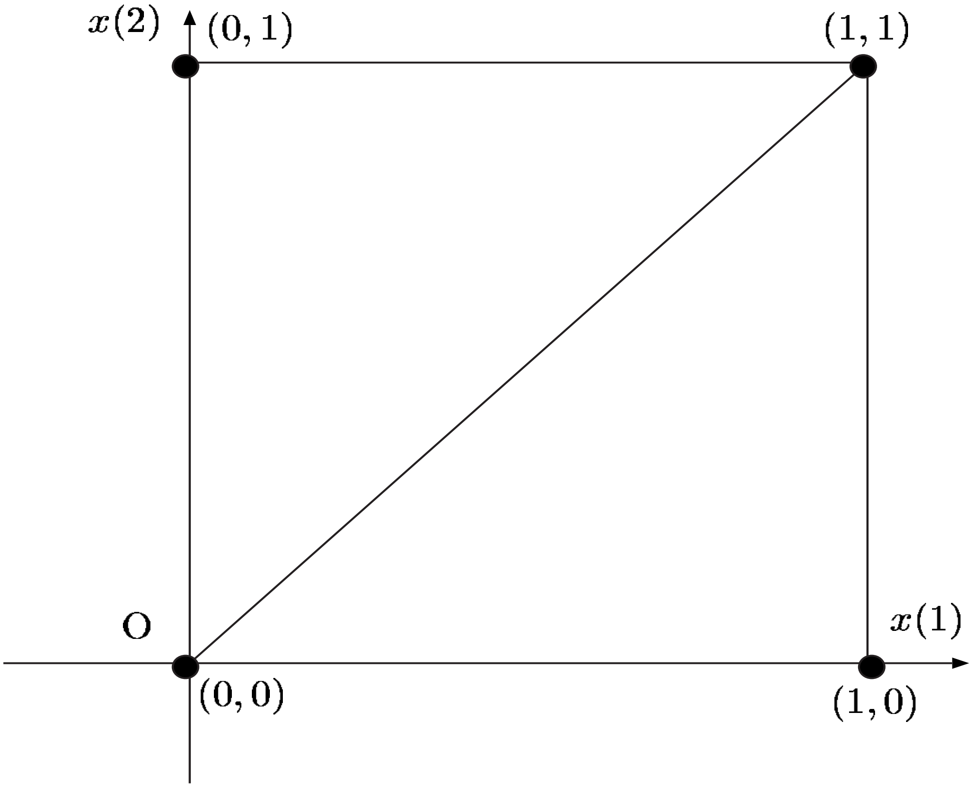
$[0,1]^3$ の Freudenthal 単体分割





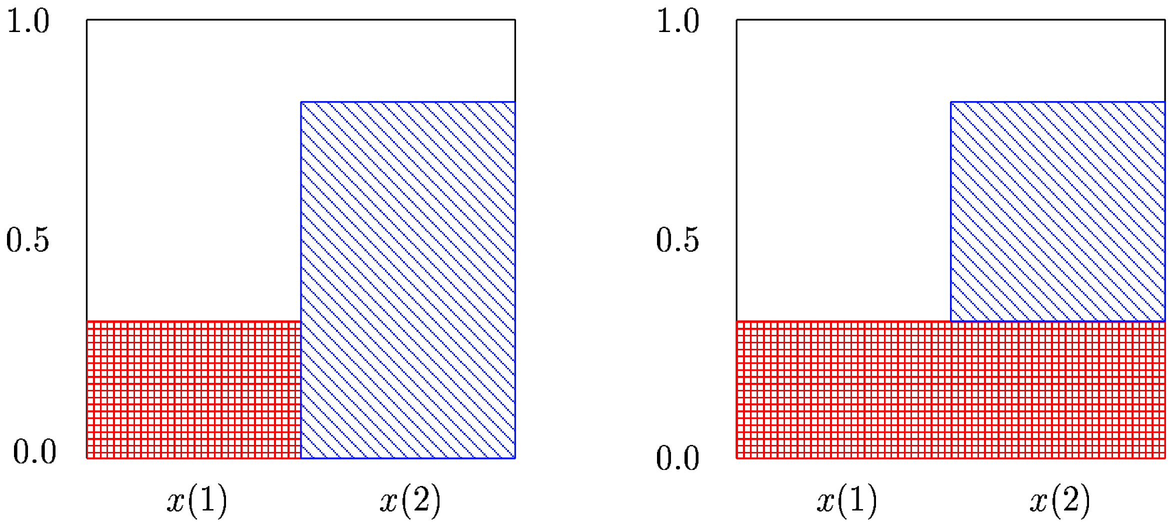
→

$\{0,1\}^2$ 上の離散的関数 f の**区分線形拡張** $\hat{f}$ はどのように決まるのか？



$\longrightarrow$

例： 点 $x=(0.3,0.8)$ における $\hat{f}$ の値の決定



$$\begin{aligned} x &= (0.3, 0.8) \\ &= (1.0-0.8)\times(0,0)+(0.8-0.3)\times(0,1)+0.3\times(1,1) \\ &= 0.2\times(0,0)+0.5\times(0,1)+0.3\times(1,1) \end{aligned}$$

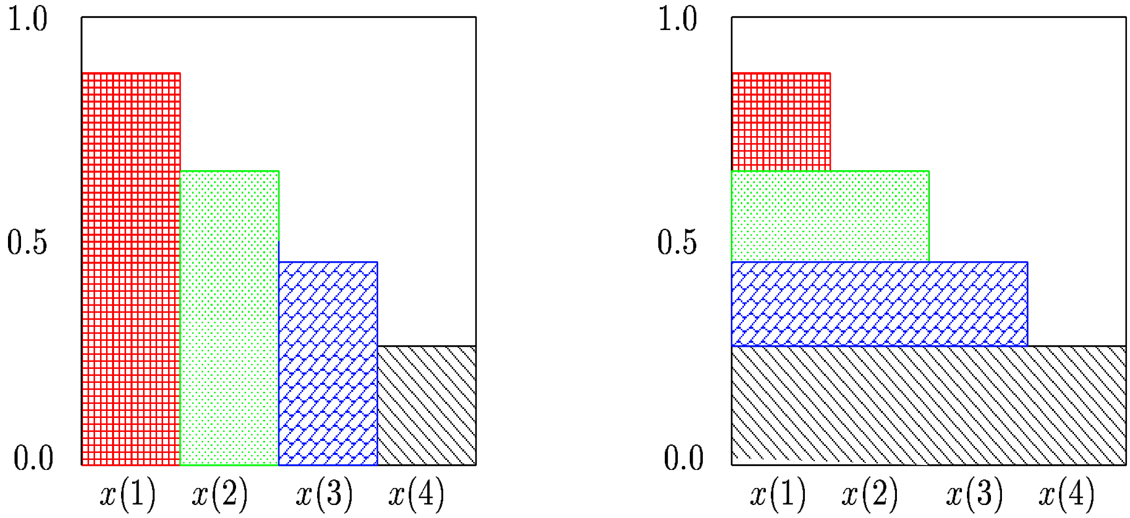
(単体（セル）の端点 $(0,0),(0,1),(1,1)$ の凸結合による点 x の表現)

したがって，$x=(0.3,0.8)$ のとき，

$$\hat{f}(x)=0.2\times f(0,0)+0.5\times f(0,1)+0.3\times f(1,1)$$

$\longrightarrow$

一般の n 次元 $[0,1]^n$ の場合: 集合関数 f の Lovász 拡張 $\hat{f}$



部分集合の鎖 $\emptyset \subseteq X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_k \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{X_i} \qquad (\lambda_i > 0,\ \forall i = 1, \cdots, n;\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1)$$

($X \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して, χ_X は X の特性ベクトル) のとき,

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(X_i).$$

(これは，Choquet 積分と呼ばれるものの特殊形.)

$\longrightarrow$

$x \in [0,1]^n$ に対して，その成分の**非増加順**

$$x(i_1) \geq x(i_2) \geq \cdots \geq x(i_n)$$

によって $\{1,2,\cdots,n\}$ の**順列** $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ が定まり，x の属する**単体（セル）** (端点：$\chi_{\emptyset}, \chi_{\{i_1,\cdots,i_\ell\}}$ $(\ell=1,\cdots,n)$) が求められる．

$\{1,2,\cdots,n\}$ の順列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ に対応する単体（セル）は，

$$1 \geq x(i_1) \geq x(i_2) \geq \cdots \geq x(i_n) \geq 0$$

を満たす点 x の全体に一致する．

(注意)： x の成分を単調非増加順に並べたとき，$x(i_1) > x(i_2) > \cdots > x(i_n)$ であるとき，かつ，そのときに限り，x の属するセルは一意的に定まる．

(注意)： 順列

$(i_1,\cdots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)$,

$(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},i_k,i_{k+2},\cdots,i_n)$

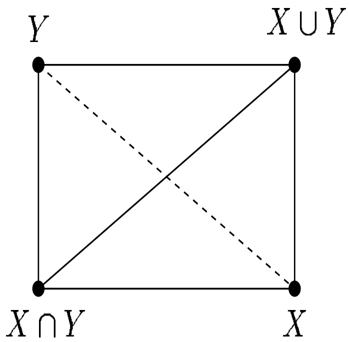
に対応するセルは**隣接**する．（逆も真．）接する共通の面（ファセット）は 超平面 $x(i_k) - x(i_{k+1}) = 0$ で決まる．

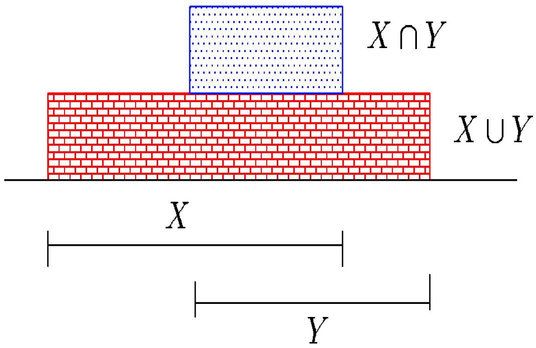
$\longrightarrow$

定理 (Lovász): 集合関数 $f : 2^{\{1,\cdots,n\}} \to \mathbf{R}$ は，その Lovász 拡張 $\hat{f}$ が凸関数であるとき，かつ，そのときに限り，劣モジュラ関数である．すなわち，すべての $X, Y \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y).$$

(証明) **[$\hat{f}$: 凸関数 $\Longrightarrow$ f: 劣モジュラ関数]**





$$\tfrac{1}{2}(\chi_X + \chi_Y) = \tfrac{1}{2}(\chi_{X \cup Y} + \chi_{X \cap Y})$$

に注意して，

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(f(X) + f(Y)) &= \tfrac{1}{2}(\hat{f}(\chi_X) + \hat{f}(\chi_Y)) \\
&\geq \hat{f}(\tfrac{1}{2}(\chi_{X \cup Y} + \chi_{X \cap Y}))\ \ (\hat{f}\text{ の凸性}) \\
&= \tfrac{1}{2}(f(X \cup Y) + f(X \cap Y))\ \ (\hat{f}\text{ の定義})
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

[f: 劣モジュラ関数 $\Longrightarrow \hat{f}$: 凸関数]

相異なる任意な 2 点 x, $y \in [0,1]^n$ を考え，$\forall \alpha \in [0,1]$ に対して，

$$z_\alpha = (1-\alpha)x + \alpha y$$

とおく. $\hat{f}(z_\alpha)$ を α の関数と考えて凸関数であることを示せばよい. そのためには，特に，２点 x, y が隣接するセルの内部にあるとき，これが凸関数であることを示せば十分である (なぜか？). そこで，隣接するセルが，順列

$$(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_n),$$
$$(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, i_k, i_{k+2}, \cdots, i_n)$$

に対応すると仮定する. すなわち，

$$\begin{aligned} X_0 = \emptyset, \quad & X_p = \{i_1, \cdots, i_p\} \quad (p = 1, \cdots, n), \\ Y_0 = \emptyset, \quad & Y_p = \{i_1, \cdots, i_p\} (= X_p) \quad (p \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}), \\ & Y_k = X_{k-1} \cup \{i_{k+1}\} \end{aligned}$$

によって，

$$\begin{aligned} & x = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p \chi_{X_p} \quad (\lambda_p > 0), \qquad y = \sum_{p=0}^{n} \mu_p \chi_{Y_p} \quad (\mu_p > 0), \\ & z_\alpha = (1-\alpha)x + \alpha y. \end{aligned}$$

$\alpha^* = \lambda_k/(\lambda_k + \mu_k)$ とおいて，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して，

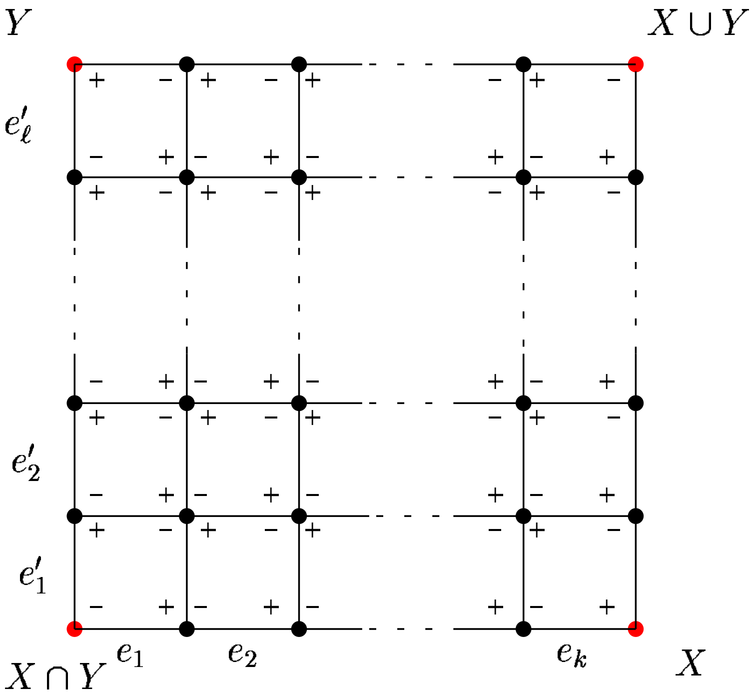
$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\{\hat{f}(z_{\alpha^*-\epsilon}) + \hat{f}(z_{\alpha^*+\epsilon})\} - \hat{f}(\tfrac{1}{2}(z_{\alpha^*-\epsilon} + z_{\alpha^*+\epsilon})) \\ & = \tfrac{1}{2}\epsilon(\lambda_k + \mu_k)\{f(X_k) + f(Y_k) - f(X_{k-1}) - f(X_{k+1})\} \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

($\frac{1}{2}(z_{\alpha^*-\epsilon} + z_{\alpha^*+\epsilon}) = z_{\alpha^*}$，$X_{k-1} = X_k \cap Y_k$，$X_{k+1} = X_k \cup Y_k$ に注意.) □

$\longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& f(X \cup \{e\}) + f(X \cup \{e'\}) - f(X \cup \{e, e'\}) - f(X) \geq 0 \\
& \qquad\qquad\qquad (\forall X \subset E,\ \ e,\ e' \in E \setminus X,\ \ e \neq e') \\
\Longleftrightarrow\ & f(X) + f(Y) - f(X \cup Y) - f(X \cap Y) \geq 0 \quad (\forall X,\ Y \subseteq E).
\end{aligned}
$$

(証明) $X \setminus X \cap Y = \{e_1, \cdots, e_k\}$, $Y \setminus X \cap Y = \{e'_1, \cdots, e'_\ell\}$ のとき,



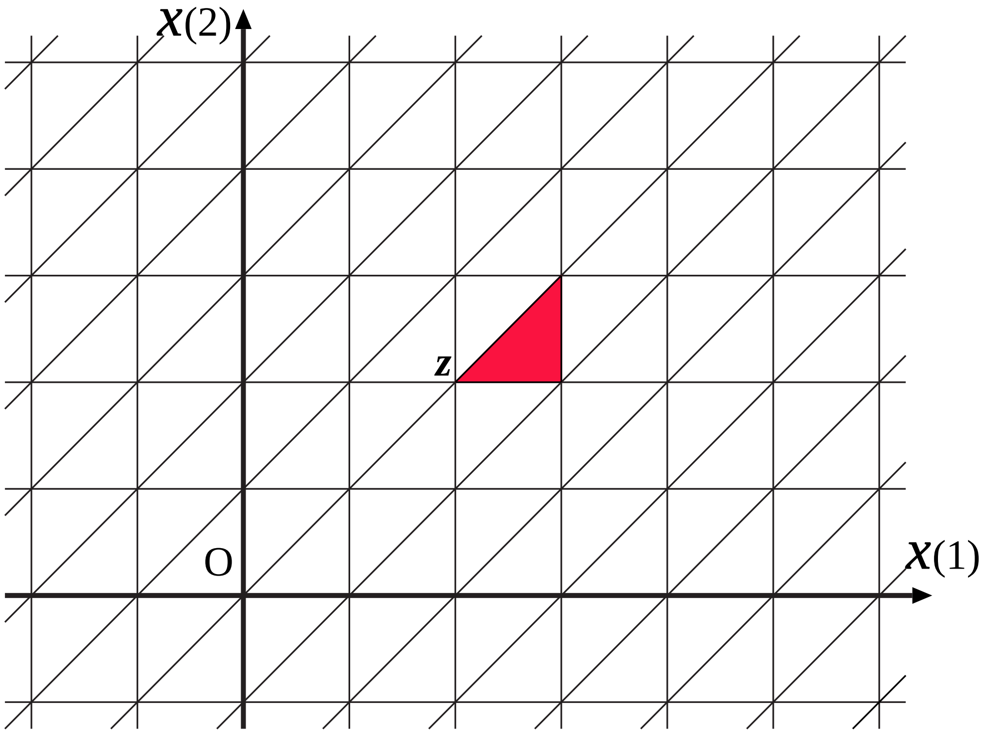
□

→

$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数

f：整数格子点 $\mathbf{Z}^n$ 上の関数

$\hat{f}$：f から Freudenthal 単体分割によって区分線形に拡張された $\mathbf{R}^n$ 上の関数



$\hat{f}$ は整数格子点上の劣モジュラ関数

$$\hat{f}(x) + \hat{f}(y) \geq \hat{f}(x \vee y) + \hat{f}(x \wedge y) \quad (x,\ y \in \mathbf{Z}^n)$$

ただし,

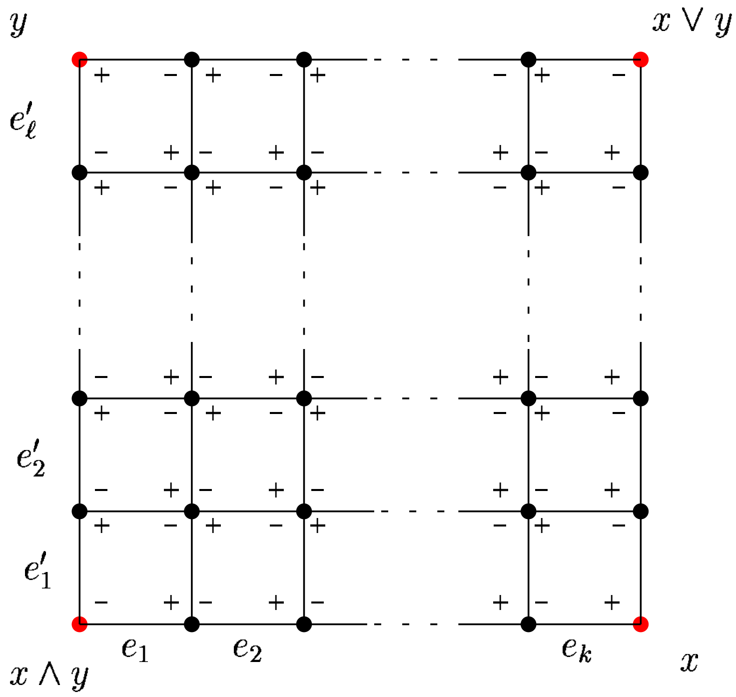
$$(x \vee y)(e) = \max\{x(e), y(e)\}, (x \wedge y)(e) = \min\{x(e), y(e)\} \ \ (e \in E).$$

$\longrightarrow$

$\hat{f}$ は整数格子点上の劣モジュラ関数

$$\hat{f}(x) + \hat{f}(y) \geq \hat{f}(x \vee y) + \hat{f}(x \wedge y) \quad (x,\ y \in \mathbf{Z}^n)$$

(証明)

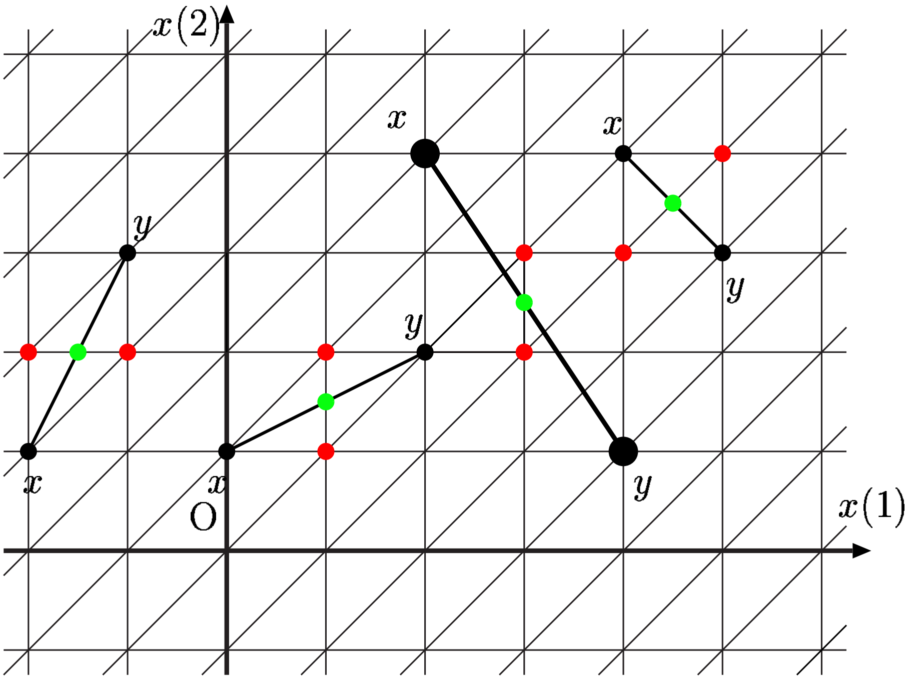


$(x(e_i) - y(e_i) = k > 0$ のとき e_i が k 回重複して現れる． e'_i も同様.) □

$\longrightarrow$

Favati-Tardella による**中点凸性**による特徴づけ

$$f(x)+f(y) \geq f(\lceil \tfrac{1}{2}(x+y) \rceil) + f(\lfloor \tfrac{1}{2}(x+y) \rfloor) \qquad (\forall x,\ y \in \mathbf{Z}^n).$$



(注意) $x+y = \lceil \frac{1}{2}(x+y) \rceil + \lfloor \frac{1}{2}(x+y) \rfloor$ および
$\hat{f}(\frac{1}{2}(x+y)) = \frac{1}{2}\{f(\lceil \frac{1}{2}(x+y) \rceil) + f(\lfloor \frac{1}{2}(x+y) \rfloor)\}$ より,

$$\tfrac{1}{2}\{\hat{f}(x)+\hat{f}(y)\} \geq \hat{f}(\tfrac{1}{2}(x+y)) \qquad (\forall x,\ y \in \mathbf{Z}^n).$$

これから，$\hat{f}$ の**隣接するセル間での凸な曲がり**が帰結される.

$\longrightarrow$

整数格子点 $\mathbf{Z}^n$ 上に定義された L$^\natural$ 凸関数 f

$\longleftrightarrow$ 　Freudenthal 単体分割に基づく $\mathbf{R}^n$ 上への凸拡張 $\hat{f}$

$\hat{f}$ (あるいは f) の**共役凸関数 $\hat{f}^\bullet$ (Legendre-Fenchel 変換)**

$$
\begin{aligned}
\hat{f}^\bullet(p) &= \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\
&= \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\} \qquad (p \in (\mathbf{R}^n)^*)
\end{aligned}
$$

(ただし，$\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^n p(i)x(i)$.)

ここで，f が整数値関数であるときには，共役凸関数 $\hat{f}^\bullet$ を $(\mathrm{Z}^n)^*$ に制限して得られる関数を $f^\bullet$ と書くと，$\hat{f}^\bullet$ は $f^\bullet$ の凸拡張である.

$\hat{f}^\bullet$ および（f が整数値関数であるときの）$f^\bullet$ を **M$^\natural$ 凸関数**という.
(室田・塩浦によって別途定義された (多面体的な)M$^\natural$ 凸関数と同値.)

(注意): **M$^\natural$ 凸関数 $\hat{f}^\bullet$ から L$^\natural$ 凸関数 (の凸化)$\hat{f}$ へ**の共役変換

$$
\hat{f}(x) = \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}^\bullet(p) \mid p \in (\mathbf{R}^n)^*\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n).
$$

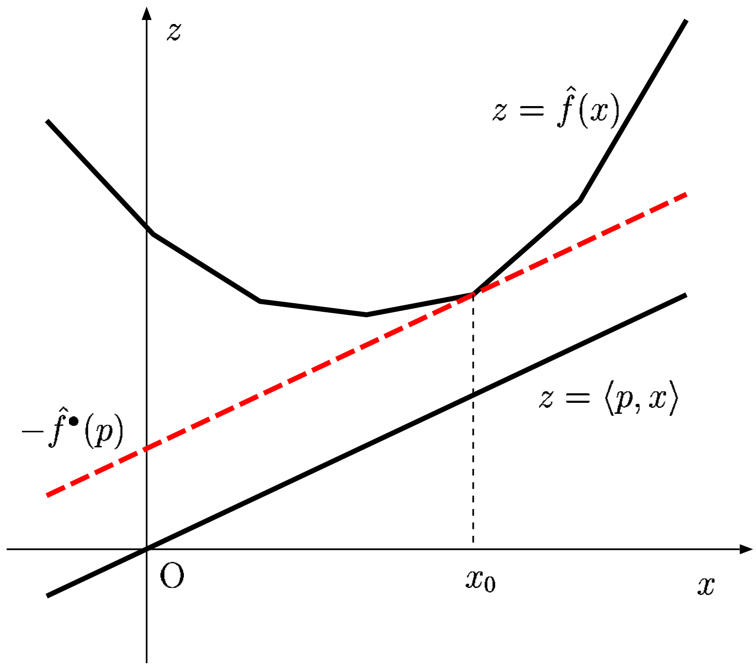
M$^\natural$ 凹関数

L$^\natural$ 凹関数 $g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}$ の共役凹関数 $\hat{g}^\circ$

$$
g^\circ(p) = \inf\{\langle p, x\rangle - \hat{g}(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\} \qquad (p \in (\mathbf{R}^n)^*).
$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned}\hat{f}^{\bullet}(p) &= \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\} \qquad (p \in (\mathbf{R}^n)^*)\end{aligned}$$



同一の点 x_0 で最大値を達成するすべての p に対して，$\hat{f}^{\bullet}(p)$ は

$$\hat{f}^{\bullet}(p) = \langle p, x_0\rangle - f(x_0)$$

という，**勾配 x_0 の線形 (アフィン) 関数**である. そのような p の全体を $\partial f(x_0)$ と書き，点 x_0 における f の**劣微分**という.

$\longrightarrow$

劣微分の定義から

$$
\begin{aligned}
p \in \partial f(x_0) \iff & \langle p, x\rangle - f(x) \le \langle p, x_0\rangle - f(x_0) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^n) \\
\iff & \langle p, x - x_0\rangle \le f(x) - f(x_0) \quad (\forall x \in \mathbf{Z}^n)
\end{aligned}
$$

例: f が劣モジュラ関数 $f : 2^{\{1,\cdots,n\}} \to \mathrm{R}$ のとき

$x_0 = \chi_\emptyset$ において (X と χ_X を同一視して)

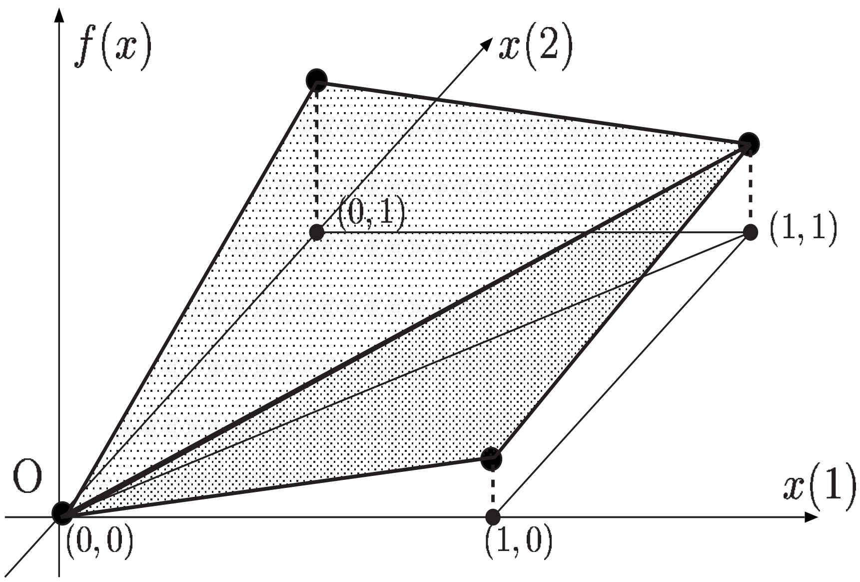
$$
p \in \partial f(\emptyset) \iff \langle p, \chi_X\rangle \le f(X) - f(\emptyset) \quad (\forall X \subseteq \{1, \cdots, n\}).
$$

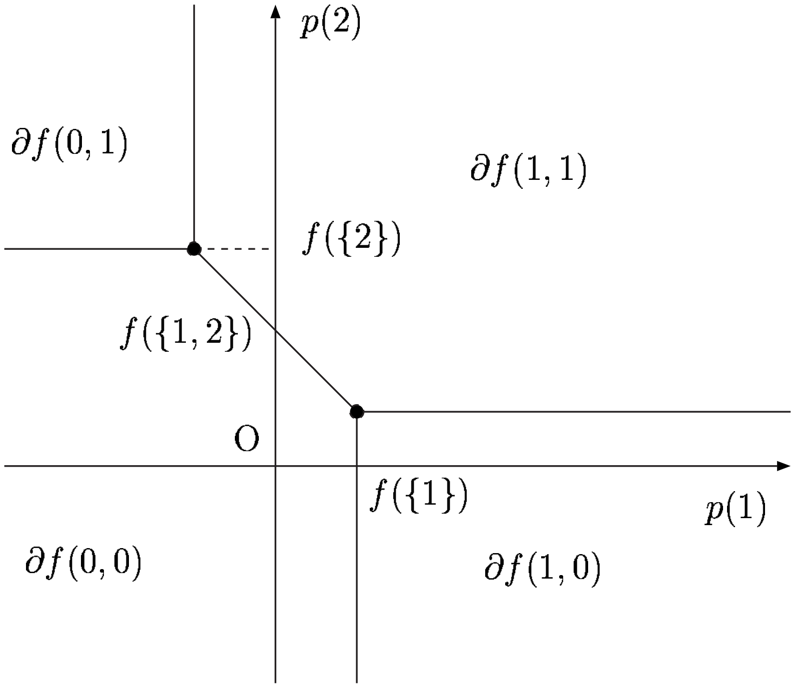
$f(\emptyset) = 0$ のとき，$\langle p, \chi_X\rangle (= \sum_{e\in X} p(e)) = p(X)$ と書くと，上式は

$$
p(X) \le f(X) \quad (\forall X \subseteq \{1, \cdots, n\}).
$$

劣微分 $\partial f(\emptyset)$ は，劣モジュラ関数 f に関連する**劣モジュラ多面体**と呼ばれ，$\mathrm{P}(f)$ と書かれる.

→





劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)(=\partial f(\emptyset))$ の**端点**は，$[0,1]^n$ の Freudenthal 単体分割の**各単体 (セル) の内部**における $\hat{f}$ の (一意に決まる) **勾配** p である．

例: 順列 $\sigma = (1, 2, \cdots, n)$ に対応するセル S^σ

$S_i = \{1, 2, \cdots, i\} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n), \qquad [S_0 \equiv \emptyset]$

χ_{S_i} $(i = 0, 1, \cdots, n)$: セル S^σ の端点全体

セル S^σ 上で線形な関数 $y = \langle p, x \rangle + \beta$ となっているから,

$$f(S_i) = \langle p, \chi_{S_i} \rangle + \beta \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

より,

$$\beta = f(S_0)(= f(\emptyset)),$$
$$p(i) = f(S_i) - f(S_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

注意: 勾配 p を決める**連立１次方程式**は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \\ \vdots \\ p(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(S_1) - f(\emptyset) \\ f(S_2) - f(\emptyset) \\ f(S_3) - f(\emptyset) \\ \vdots \\ f(S_n) - f(\emptyset) \end{pmatrix}$$

係数行列：**ユニモジュラ**（単模）

（三角行列 $\longrightarrow$ 貪欲アルゴリズム）

f: **整数値** $\Longrightarrow$ p: **整数ベクトル**

$\longrightarrow$

劣モジュラ関数に関連する多面体

$f : 2^E \to \mathbf{R}$: 劣モジュラ関数　　$(E = \{1, 2, \cdots, n\})$

$f(\emptyset) = 0$ と仮定する.

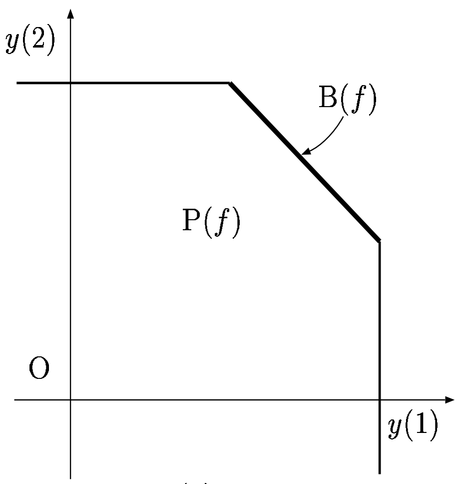
劣モジュラ多面体

$$y(X) = \sum_{e \in X} y(e)$$

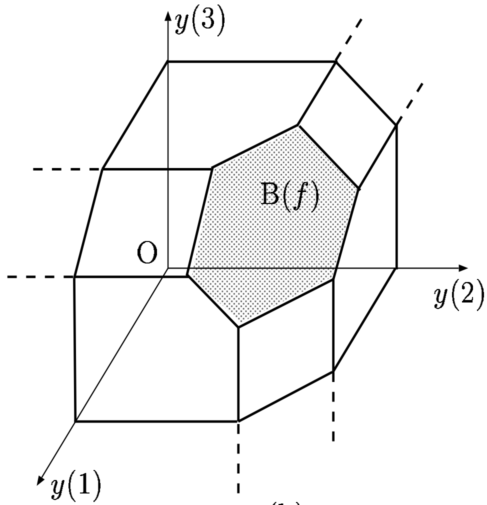
$$\mathrm{P}(f) = \{y \mid y \in \mathbf{R}^E,\ \forall X \subseteq E : y(X) \leq f(X)\}$$

基多面体

$$\mathrm{B}(f) = \{y \mid y \in \mathrm{P}(f),\ y(E) = f(E)\}$$



(a)



(b)

$\rightarrow$

定理（Edmonds, Shapley): 任意の順列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ に対して，

$$S_k = \{i_1, \cdots, i_k\} \ \ (k = 1, \cdots, n), \quad S_0 = \emptyset,$$

$$y(i_k) = f(S_k) - f(S_{k-1}) \quad (k = 1, \cdots, n)$$

によって定まる y は，基多面体 $\mathrm{B}(f)$ の端点であり，かつ，すべての端点はこのようにして定まる.

注意 (再掲)：この y は，順列 $\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_n)$ で決まるセル S^σ 上の $\hat{f}$ の勾配に等しい.

$\longrightarrow$

$w : \{1, \cdots, n\} \to \mathbf{R}$

(最大基問題) Maximize $\sum_{i=1}^{n} w(i)y(i)$

subject to $y \in \mathrm{B}(f)$.

(貪欲アルゴリズム) (Edmonds)

1. $w(i_1) \geq w(i_2) \geq \cdots \geq w(i_n)$ とする.
2. $S_k = \{i_1, \cdots, i_k\}$ $(k = 0, \cdots, n)$ とおいて,

   $y(i_k) = f(S_k) - f(S_{k-1})$ $(k = 1, \cdots, n)$.

(y が最適解である.)

各 w に対する最大基問題の目的関数の最大値を $\tilde{f}(w)$ として，重みベクトル w の関数と考えたとき，$\tilde{f}$ は $\mathrm{B}(f)$ の**支持関数** (support function) と呼ばれる凸関数である.

$\rightarrow$

(注意)：$w \in [0,1]^n$ であるとき，**目的関数の最大値** $\tilde{f}(w)$ は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} w(k)y(k) &= \sum_{k=1}^{n} w(i_k)(f(S_k) - f(S_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(w(i_k) - w(i_{k+1}))f(S_k) + w(i_n)f(S_n) \qquad (*)\end{aligned}$$

と表される．ここで，

$$w = (1 - w(i_1))\chi_{\emptyset} + \sum_{k=1}^{n-1}(w(i_k) - w(i_{k+1}))\chi_{S_k} + w(i_n)\chi_{S_n}$$

であるから，$(*)$ は **f の Lovász 拡張 $\hat{f}$ の w における値 $\hat{f}(w)$ に等しい．**

Lovász 拡張 $\hat{f}$ は基多面体 $\mathrm{B}(f)$ (あるいは劣モジュラ多面体 $\mathrm{P}(f)$) の**支持関数**を $[0,1]^n$ 上に制限したものである． □

劣モジュラ (集合) 関数 $\longleftrightarrow$ 基多面体
$\longleftrightarrow$ 基多面体の支持関数 $\longleftrightarrow$ $[0,1]^n$ 上の $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数

$\longrightarrow$

共役変換の基本的な性質 I

関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}_0(x) = \hat{f}(x - z) + \langle q, x\rangle + \beta \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と変換したとき，

$$\begin{aligned} \hat{f}_0^\bullet(p) &= \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}_0(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{\langle p, x\rangle - (\hat{f}(x - z) + \langle q, x\rangle + \beta) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{\langle p - q, x\rangle - \hat{f}(x - z) - \beta \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{\langle p - q, x + z\rangle - \hat{f}(x) - \beta \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \hat{f}^\bullet(p - q) + \langle p - q, z\rangle - \beta \qquad (p \in (\mathbf{R}^n)^*) \end{aligned}$$

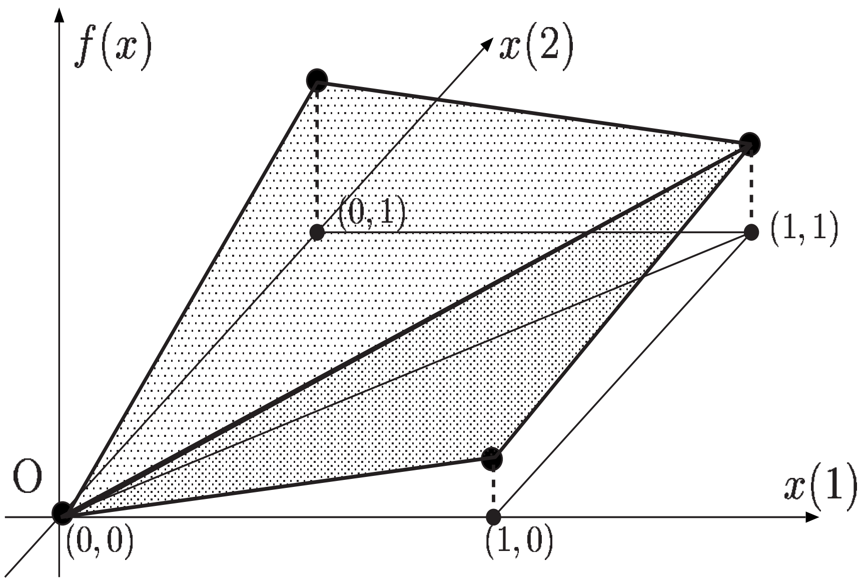
共役変換の基本的な性質 II

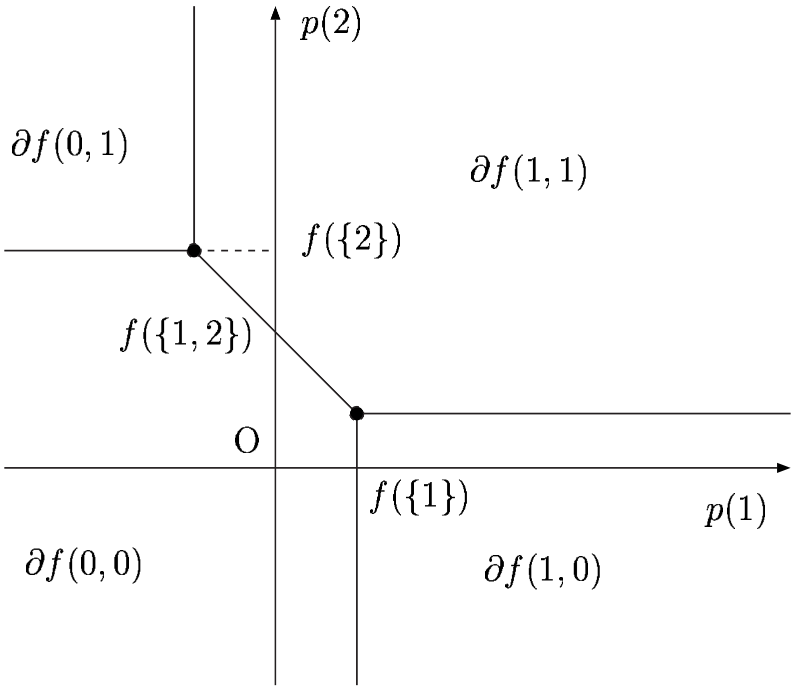
整数格子点 $z \in \mathbf{Z}^n$ に対して，関数 $\hat{f}$ を単位超立方体 $[z, z + \mathbf{1}]$ 上に制限して得られる関数を $\hat{f}_{[z,z+\mathbf{1}]}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} \hat{f}^\bullet(p) &= \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{\langle p, x\rangle - \hat{f}(x) \mid x \in [z, z + \mathbf{1}],\ z \in \mathbf{Z}^n\} \\ &= \sup\{(\hat{f}_{[z,z+\mathbf{1}]})^\bullet(p) \mid z \in \mathbf{Z}^n\} \end{aligned}$$

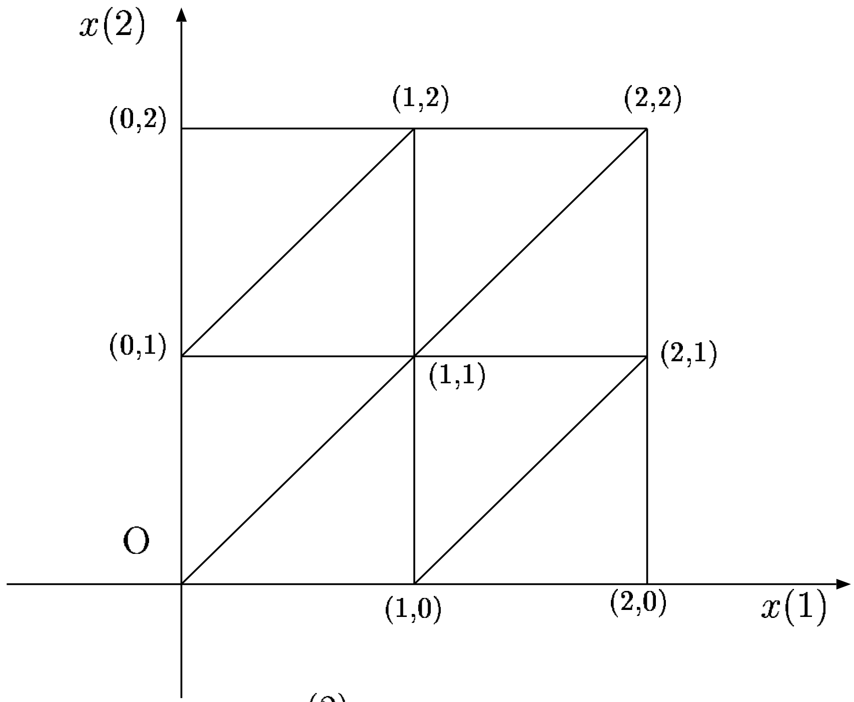
$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数 $\hat{f}^\bullet$ を理解するには，$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数 $(\hat{f}_{[0,1]^n})^\bullet$ を理解すればよい．

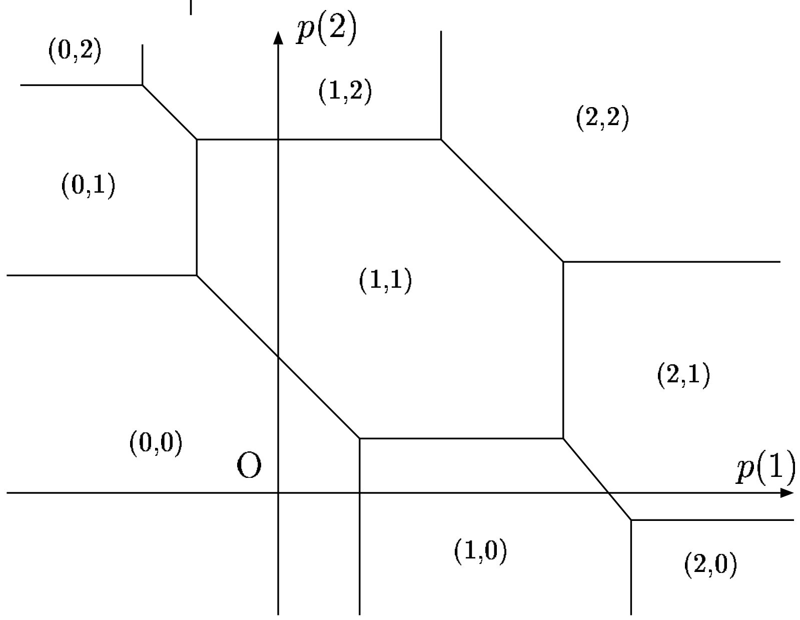
→


$f(x)$
$x(2)$
$(0,1)$
$(1,1)$
O
$x(1)$
$(0,0)$
$(1,0)$

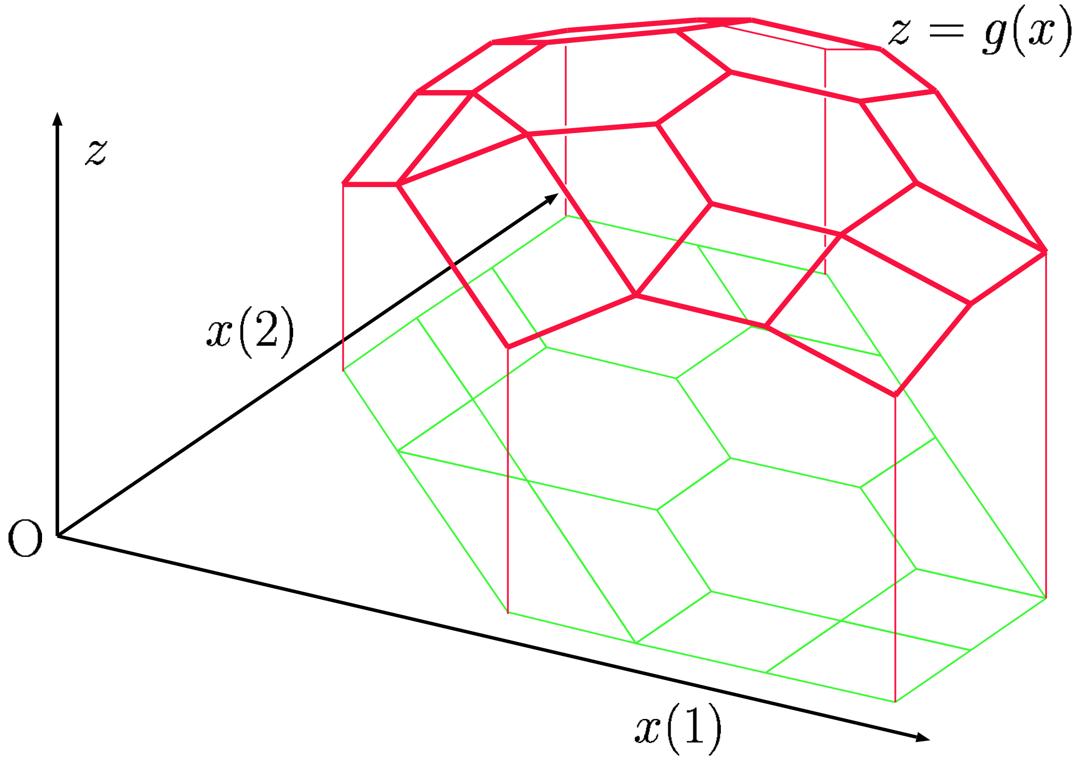

$p(2)$
$\partial f(0,1)$
$\partial f(1,1)$
$f(\{2\})$
$f(\{1,2\})$
O
$f(\{1\})$
$p(1)$
$\partial f(0,0)$
$\partial f(1,0)$

$\rightarrow$

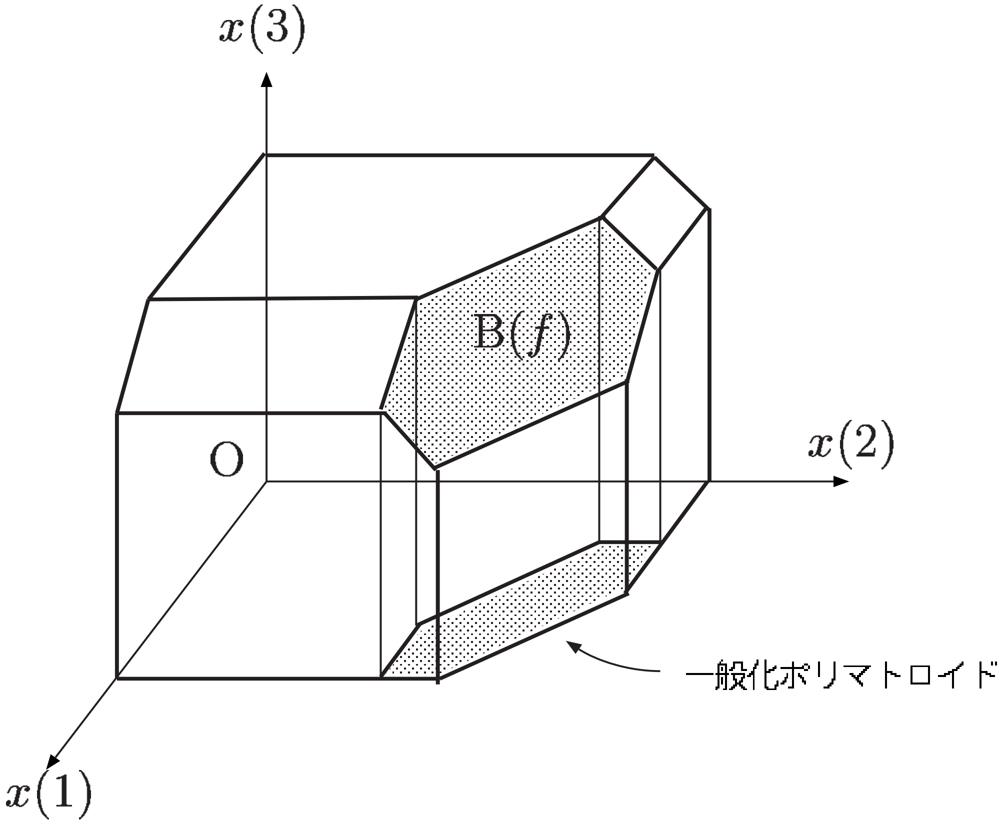

x(2)
(0,2)
(1,2)
(2,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
O
(1,0)
(2,0)
x(1)


p(2)
(0,2)
(1,2)
(2,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
(0,0)
O
p(1)
(1,0)
(2,0)

$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数 g



$\rightarrow$


$x(3)$
B(f)
$x(2)$
O
一般化ポリマトロイド
$x(1)$

→

(端点をもつ多面体を考える.)

定理（冨澤）：多面体 P が**基多面体**であるための必要十分条件は，P のすべての辺ベクトルが

$$(0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0, \mp 1, 0, \cdots, 0)$$

の形のスカラ倍であることである.

系：多面体 P が**一般化ポリマトロイド**であるための必要十分条件は，P のすべての辺ベクトルが

$$(0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0, \mp 1, 0, \cdots, 0), \quad (0, \cdots, 0, \pm 1, 0, \cdots, 0)$$

の形のスカラ倍であることである.

$\rightarrow$

(注意)(再掲)： 順列

$(i_1,\cdots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_n)$,

$(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},i_k,i_{k+2},\cdots,i_n)$

に対応するセルは隣接する.（同一単位超立方体内で逆も真.）隣接関係を決める共通の面（ファセット）は 超平面 $x(i_k)-x(i_{k+1})=0$ で決まる. その超平面

$x(i_k)-x(i_{k+1})=0$

の法線ベクトルは,

$(0,\cdots,0,\pm1,0,\cdots,0,\mp1,0\cdots,0)$

である. また, 隣接する単位超立方体の共通ファセットの法線ベクトルは,

$(0,\cdots,0,\pm1,0,\cdots,0)$

である.

したがって, 各格子点 z において $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数 f の劣微分

$\partial f(z)$ **は一般化ポリマトロイド**,

その上で

$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数 $\hat{f}^\bullet$ は線形関数＋定数の形 $\square$

(注意)：f が**整数値**関数のとき, $\partial f(z)$ は**整数**一般化ポリマトロイドである. $\square$

$\longrightarrow$

(以下しばらくは，$(\mathbf{Z}^n)^*$, $(\mathbf{R}^n)^*$ と $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{R}^n$ を同一視する．)

$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に関する同時交換公理 (室田・塩浦)

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \mid f(x) < +\infty\}$$

$$\mathrm{supp}^+(x) = \{i \mid x(i) > 0\}, \qquad \mathrm{supp}^-(x) = \{i \mid x(i) < 0\}$$

($\mathrm{M}^\natural$-EXC) For $x, y \in \mathrm{dom}\, f$ and $i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$,

$$f(x) + f(y) \;\geq\; \min\Big[f(x-\chi_i) + f(y+\chi_i), \min_{j \in \mathrm{supp}^-(x-y)} \{ f(x-\chi_i+\chi_j) + f(y+\chi_i-\chi_j) \} \Big].$$

($\longrightarrow$ 「整数一般化ポリマトロイド」に関する同時交換公理)

この公理 ($\mathrm{M}^\natural$-EXC) の本質は以下の事実にある． 簡単のため，$\mathrm{dom}\, f$ が有界であると仮定する．

$\rightarrow$

公理 (M$^\natural$-EXC) を満たす関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を $\mathbf{R}^n$ 上で**凸化**した関数を $\bar{f}$ と書くことにする．この $\bar{f}$ のエピグラフ (多面体) の**隣接する 2 端点**を $(p, \bar{f}(p))$，$(q, \bar{f}(q))$ とすると，$f(p) = \bar{f}(p)$，$f(q) = \bar{f}(q)$ が成り立ち，丁度**この 2 端点を結ぶ辺において $\bar{f}$ を支持する超平面**を

$$z = \langle h, x \rangle + \alpha$$

とする．そうすると，**凸関数 $\bar{f}(x) - \langle h, x \rangle$** は丁度，**2 点 p，q を結ぶ線分上で最小化される．**

一般性を失わず $\mathrm{supp}^+(p-q) \neq \emptyset$ とすると，公理 (M$^\natural$-EXC) から，$i \in \mathrm{supp}^+(p-q)$ に対して ($\bar{f}(p) = f(p)$，$\bar{f}(q) = f(q)$ にも注意して)

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(p) - \langle h, p \rangle + \bar{f}(q) - \langle h, q \rangle \\
&\geq \min \Big[f(p - \chi_i) - \langle h, p - \chi_i \rangle + f(q + \chi_i) - \langle h, q + \chi_i \rangle, \\
&\qquad\qquad \min_{j \in \mathrm{supp}^-(p-q)} \{ f(p - \chi_i + \chi_j) - \langle h, p - \chi_i + \chi_j \rangle \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + f(q + \chi_i - \chi_j) - \langle h, q + \chi_i - \chi_j \rangle \} \Big].
\end{aligned}$$

(ここで，以下にも注意する．

$$\begin{aligned}
\langle h, p \rangle + \langle h, q \rangle &= \langle h, p - \chi_i \rangle + \langle h, q + \chi_i \rangle \\
&= \langle h, p - \chi_i + \chi_j \rangle + \langle h, q + \chi_i - \chi_j \rangle.
\end{aligned}$$

すなわち，上記の不等式から **h が消去**されて，公理 (M$^\natural$-EXC) が使えた．)

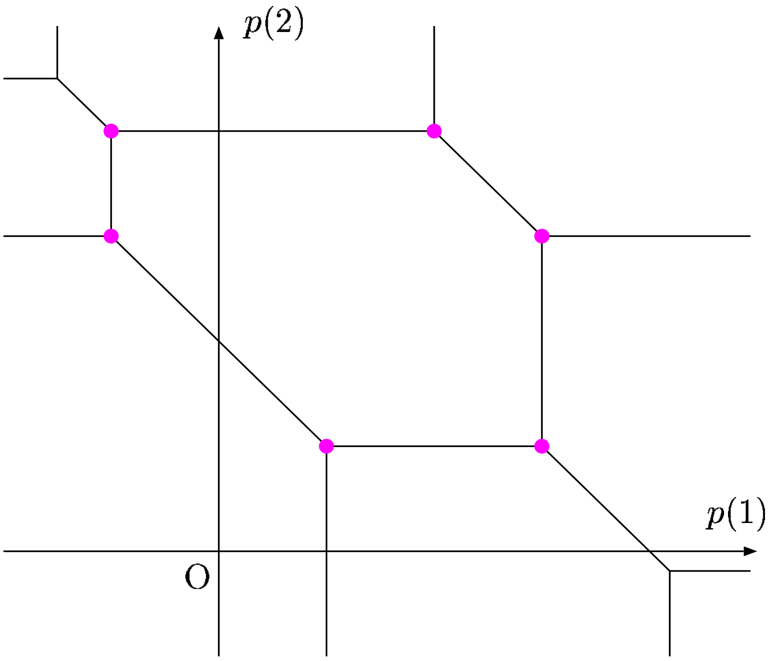
$\longrightarrow$

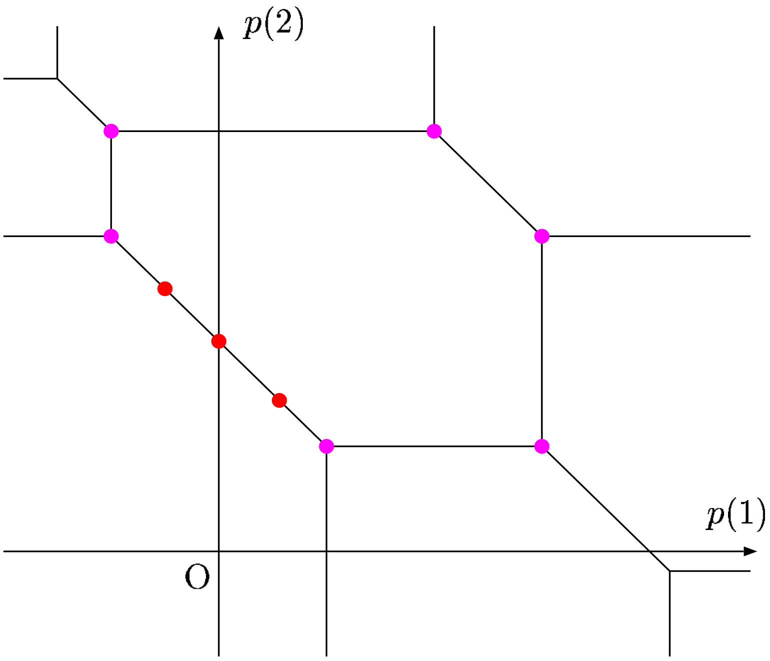
$$
\begin{aligned}
&\bar{f}(p) - \langle h, p\rangle + \bar{f}(q) - \langle h, q\rangle \\
&\geq \min\Big[f(p-\chi_i) - \langle h, p-\chi_i\rangle + f(q+\chi_i) - \langle h, q+\chi_i\rangle, \\
&\qquad\qquad \min_{j\in\mathrm{supp}^-(p-q)} \{ f(p-\chi_i+\chi_j) - \langle h, p-\chi_i+\chi_j\rangle \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + f(q+\chi_i-\chi_j) - \langle h, q+\chi_i-\chi_j\rangle \} \Big].
\end{aligned}
$$

これと $f(x) \geq \bar{f}(x) \ \ (\forall x \in \mathbf{Z}^n)$ より，**点 $p-\chi_i$，$q+\chi_i$** あるいは，ある $j \in \mathrm{supp}^-(p-q)$ に対する**点 $p-\chi_i+\chi_j$，$q+\chi_i-\chi_j$** が **p，q を結ぶ線分上にあり，それらの整数格子点において f と $\bar{f}$ の値は一致する.**
したがって，(必要なら新たな 2 点に対して今の議論を繰り返して)
(1) **辺に対応するベクトル $p-q$ が χ_i あるいは $\chi_i-\chi_j$ の整数倍である**.
(2) **各辺に対応する定義域の整数格子点で f と $\bar{f}$ の値が一致する**.
この事実と公理 (M$^\natural$-EXC) によって，さらに (エピグラフの 2 次元以上の面で $\bar{f}$ を支持する超平面を考えて上記と同様の議論により)，$\bar{f}$ のエピグラフの各**面に対応する f の定義域内の整数格子点集合が，整数一般化ポリマトロイドであり，その上で f と $\bar{f}$ の値が一致する**ことが示される. (以下の図を参照.)

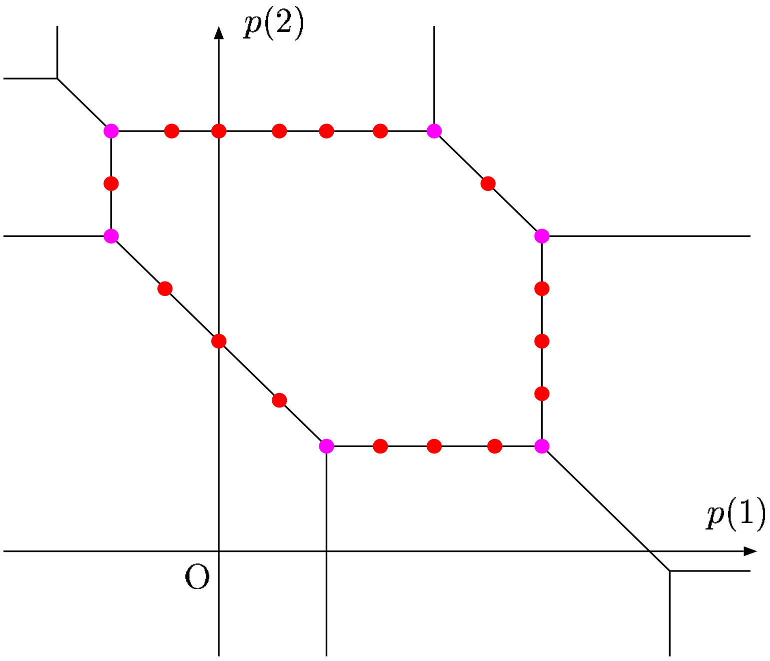
以上によって，**M$^\natural$ 凸関数は，(整数) 一般化ポリマトロイド上で線形な (アフィンな) 多面体的凸関数である**ことが示された.

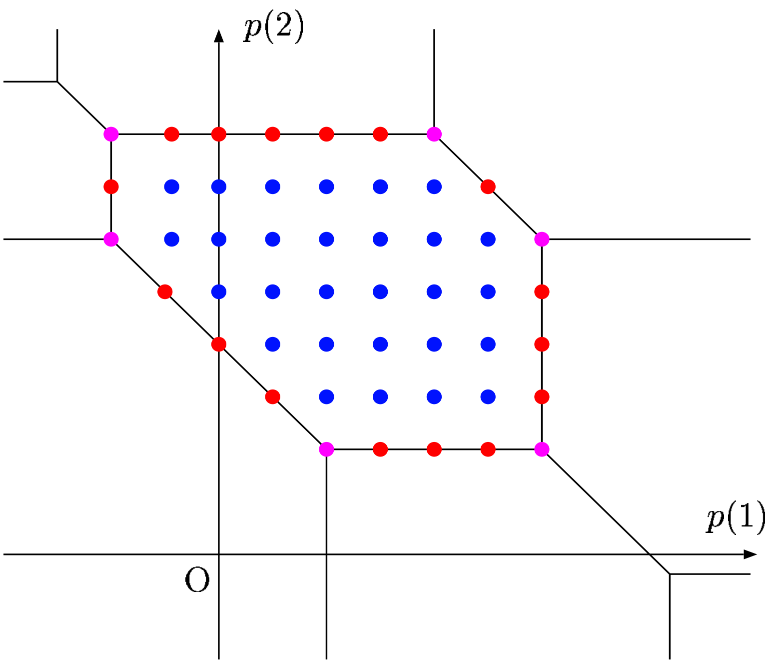
$\longrightarrow$





$\longrightarrow$





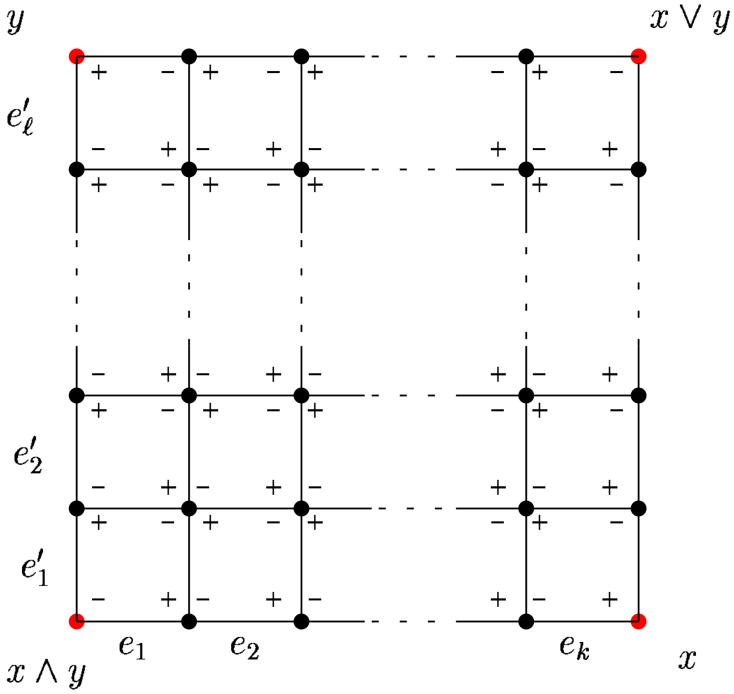
$\longrightarrow$

(注意)： 上述の議論から分かるように，同時交換公理の同時性は必然的ではなくて，(整数) 一般化ポリマトロイドの (同時的でない) **他の交換公理に対応する $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数の公理**を考えることができる. ただし，上述のように h を消去できなくて，**双対変数 h を導入した形で**公理が与えられる. □

(注意)： **$\mathrm{M}^\natural$ 凹関数** f は整数格子点上の**劣モジュラ関数**である.

$$f(x) + f(y) \geq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \quad (x,\ y \in \mathbf{Z}^n)$$

(本講義の導入部の最初の２次元の例がこの事実に関わっている！)



($x(e_i) - y(e_i) = k > 0$ のとき e_i が k 回重複して現れる. e'_i も同様.) □

→

離散分離定理 (L$^\natural$)

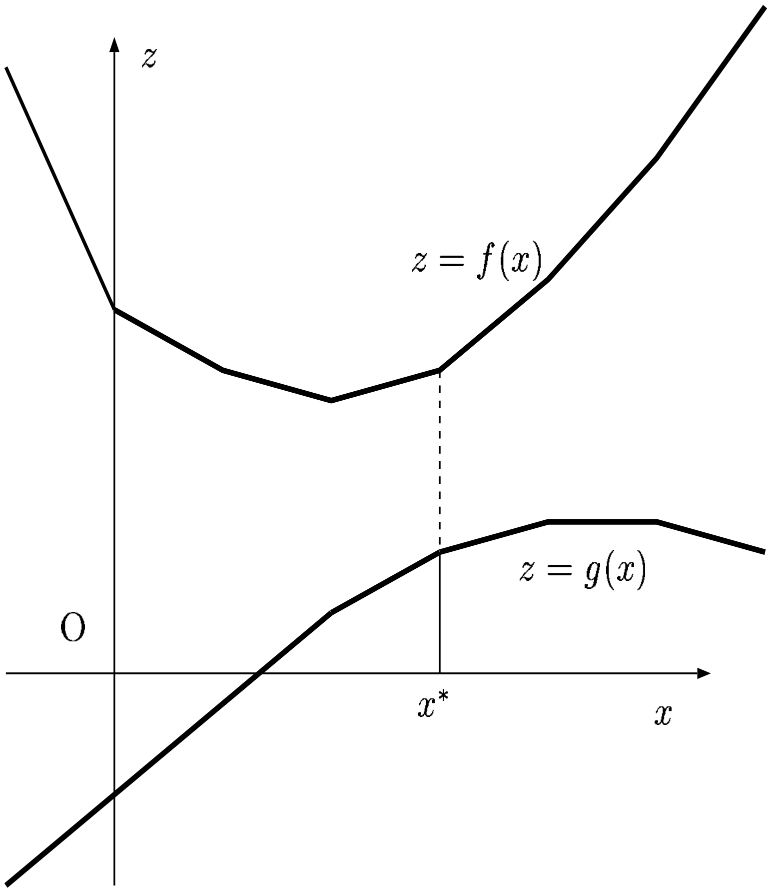
f: $\mathbf{Z}^n$ 上の整数値 L$^\natural$ 凸関数
g: $\mathbf{Z}^n$ 上の整数値 L$^\natural$ 凹関数

離散分離定理 (室田)：
$\forall z \in \mathbf{Z}^n : f(z) \geq g(z)$
$$\Longrightarrow \quad \exists p \in (\mathbf{Z}^n)^*,\ \beta \in \mathbf{Z} : f(z) \geq \langle p, z \rangle + \beta \geq g(z)$$

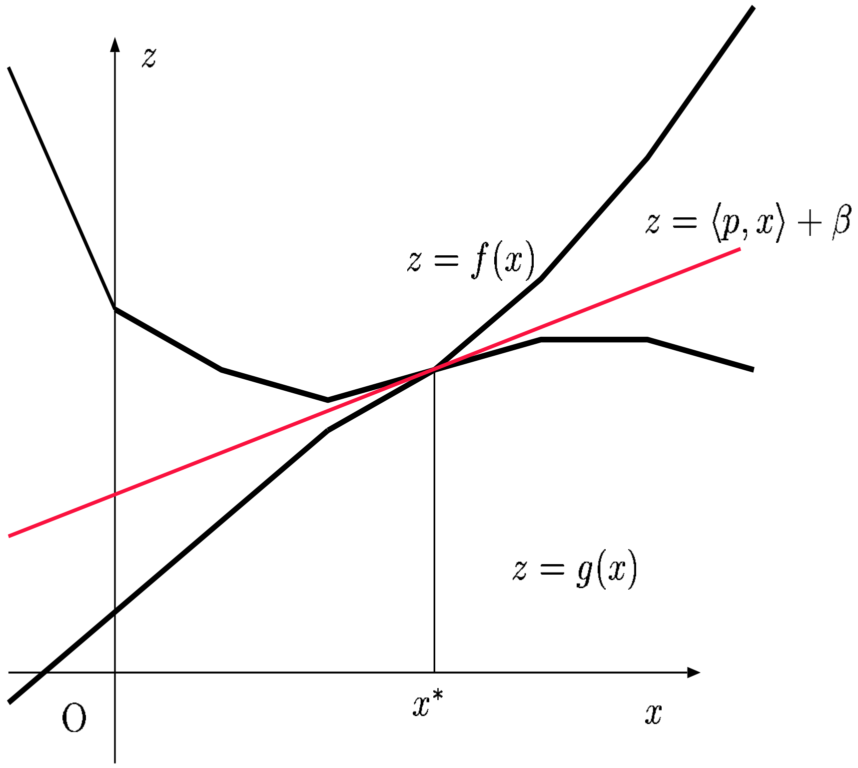
一般化ポリマトロイドの交わり定理 (Edmonds, Frank)：

二つの**整数一般化ポリマトロイド** P_1, P_2 に対して，その交わり $P_1 \cap P_2$ が非空であるとき，$P_1 \cap P_2$ **は整数多面体**である．

$\longrightarrow$



$\longrightarrow$



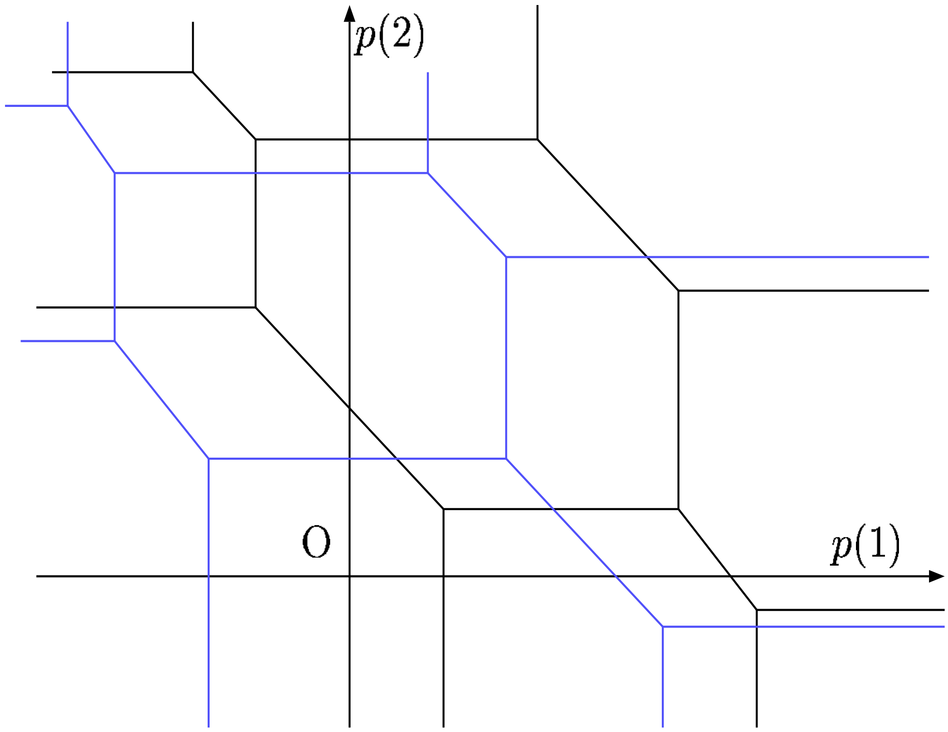
共通劣・優勾配 $p \in \partial f(x^*) \cap \partial g(x^*)$（**整数ベクトル p が選べる.**）

$$g(x^*) - \langle p, x^* \rangle \leq \beta \leq f(x^*) - \langle p, x^* \rangle$$

(p, x^*: 整数ベクトル $\Longrightarrow$ **整数値 β が選べる.**)

$\longrightarrow$

劣微分・優微分 (一般化ポリマトロイド) の交わり



$\longrightarrow$

離散 Fenchel 双対定理（室田）：

$\mathbf{Z}^n$ 上の整数値 $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数 f と $\mathrm{L}^\natural$ 凹関数 g に対して,

$$\inf\{f(x) - g(x) \mid x \in \mathbf{Z}^n\} = \sup\{g^\circ(p) - f^\bullet(p) \mid p \in (\mathbf{Z}^n)^*\}$$

が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc} f & \underset{\text{制限}}{\overset{\text{凸拡大}}{\rightleftarrows}} & \hat{f} & \overset{\text{凸共役}}{\longleftrightarrow} & \hat{f}^\bullet & \underset{\text{凸拡大}}{\overset{\text{制限}}{\rightleftarrows}} & f^\bullet \\ \mathbf{Z}^n & & \mathbf{R}^n & & (\mathbf{R}^n)^* & & (\mathbf{Z}^n)^* \end{array}$$

$\longrightarrow$

参考文献

(離散凸解析を本格的に勉強したい人には [1], [2] と [5] の 4 章および 2 版 7 章を薦める．和書では [1], [3], [4] があり，[6] の 3 章にも少し触れてある．マトロイドに関して，和書 [7] もある．本講義と関連する公開講座の原稿 [8] も参考になるであろう．)

1. 室田 一雄：「離散凸解析」, 共立出版, 2001.
2. K. Murota: *Discrete Convex Analysis* (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications **10**, SIAM, 2003).
3. 室田 一雄：「離散凸解析の考え方—最適化における離散と連続の数理」, 共立出版, 2007.
4. 田村 明久：「離散凸解析とゲーム理論」(シリーズ オペレーションズ・リサーチ 3)，朝倉書店，2009.
5. S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization* (Annals of Discrete Mathematics, Vol. 47) (North-Holland, 1991); also, Second Edition (*ibid.* Vol. 58) (2005).
6. 藤重 悟：「グラフ・ネットワーク・組合せ論」, 共立出版, 2002.
7. 伊理正夫・藤重悟・大山達雄：「グラフ・ネットワーク・マトロイド」(講座：数理計画法 7)，産業図書，1986 (復刊 2005).
8. 藤重 悟：「劣モジュラ構造と離散凸性」, 数学入門公開講座 (数理解析研究所，2005) (テキストは数理解析研ホームページで公開).