平成 26 年度全学共通科目講義「現代の数学と数理解析」
「流れの安定性と保存量」レポート問題

1. 積分定理に基づいて次の流れの安定性について述べよ.

   (a) $U(y) = \cos y \quad (-\pi/2 \le y \le \pi/2)$.

   (b) $U(y) = \sin y \quad (-\pi/2 \le y \le \pi/2)$.

   (c) $U(y) = \sin^3 y \quad (-\pi/4 \le y \le \pi/4)$.

2. 次の折れ線モデルの安定性を考える.

$$U(y) = \begin{cases} U_o & (y \ge a) \\ U_o y/a & (-a \le y \le a) \\ -U_o & (y \le -a) \end{cases}$$

流れの擾乱 $\tilde{\psi}'$ の従う方程式は, 各領域で $d^2U/dy^2 = 0$ であるから, レイリー方程式が $\left(\dfrac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi}' = 0$ と簡単になる. また, 各領域の境界においては流線と圧力が連続であることから $\tilde{\psi}'$ と $-(U-c)\dfrac{d\tilde{\psi}'}{dy} + \dfrac{dU}{dy}\tilde{\psi}'$ が連続である. これらの条件から次のような 4x4 の係数行列から成る固有値問題を構成することができる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -e^{2ka} & 0 \\ k(U_0 - c) & -[k(U_0 - c) + U_0/a] & -[-k(U_0 - c) + U_0/a]e^{2ka} & 0, \\ 0 & e^{2ka} & 1 & -1 \\ 0 & [-k(U_0 + c) + U_0/a]e^{2ka} & [k(U_0 + c) + U_0/a] & -k(U_o + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

この係数行列の行列式が 0 となることから c と k の関係が

$$c^2 = \left(\frac{U_0}{2ka}\right)^2 [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}],$$

となることを示せ. またこの分散関係を図示してみよ (横軸 k, 縦軸は $\mathrm{Re}[c]$ および $\mathrm{Im}[c]$).