

「連分数と2次体の数論」レポート問題解答

2015.8.7 玉川安騎男

[Q1] 講義で導入した実数の小数展開のアルゴリズムでは、途中からずっと9が続くような無限小数が現れることはない。0.999... を例にとって、その理由を説明せよ。

[A1] $\alpha \in \mathbb{R}$ の小数展開が 0.999... になったとすると、まず $\alpha \geq 0$ であり、講義の命題より

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$$

となるはずである。ところが、 $\alpha = 1$ を講義のアルゴリズムで小数展開すると、1 (= 1.000...) となるので、0.999... という小数展開は現れない。

[Q2] 有理数 $7/17$ の小数展開と連分数展開を求めよ。

[A2] $7/17 = 0.4117647058823529 = [0; 2, 2, 3]$

[Q3] 実数 $\sqrt{7}$ の連分数展開を求めよ。また、実数 $\sqrt{17}$ の連分数展開を求めよ。

[A3] $\sqrt{7} = [2; \dot{1}, 1, 1, 4]$, $\sqrt{17} = [4; \dot{8}]$

[Q4] 連分数 $[2015; \dot{7}, \dot{17}]$ を、 $a + b\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{Q}$) の形で表せ。

[A4] $\frac{4013}{2} + \frac{1}{14}\sqrt{14637}$

[Q5] 2次体の整数環 R_7 の基本単数を求めよ。 $(R_7 = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\})$ を用いてよい。

[A5] $8 + 3\sqrt{7}$

[Q6] 2次体の整数環 R_{17} の基本単数を求めよ。 $(R_{17} = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ または } a, b \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\})$ を用いてよい。

[A6] $4 + \sqrt{17}$

[Q ∞] (必須) 講義やレポート問題に対する感想・意見などを書いて下さい。

[A ∞] [Q2][Q3] は、皆さんかなりよくできていて、有理数や2次の無理数の連分数展開の計算ができるようになってくれてうれしく思いました。説明が少し難しい [Q1] や計算が煩雑な [Q4] も、レポート提出者の半数前後の方が取り組んでくれました。講義での説明が不十分だった [Q5][Q6] については、回答者は一部にとどまりましたが、ちゃんと正解されている方もいて、よく勉強されているなと思いました。なお、必須問題の [Q ∞] に解答しない強者が1名だけいました (笑)。