「連分数と２次体の数論」資料

2015.7.17 玉川安騎男

定義集

<u>定義１</u>

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = \{\text{ 整数全体 }\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\
&\cap \\
&\mathbb{Q} = \{\text{ 有理数全体 }\} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}\} \\
&\cap \\
&\mathbb{R} = \{\text{ 実数全体 }\} \\
&\cap \\
&\mathbb{C} = \{\text{ 複素数全体 }\} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

<u>定義２</u>　$(R, 0, 1, +, -, \cdot)$ が［あるいは、R が］（可換）環 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

R: 集合
$0, 1 \in R$
$+ : R \times R \to R,\ (a, b) \mapsto a + b$
$- : R \to R,\ a \mapsto -a$
$\cdot : R \times R \to R,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$

であって、次の (i)–(viii) が成立

(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(\forall a, b, c \in R)$
(ii) $a + 0 = 0 + a = a$ $(\forall a \in R)$
(iii) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $(\forall a \in R)$
(iv) $a + b = b + a$ $(\forall a, b \in R)$
(v) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(\forall a, b, c \in R)$
(vi) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $(\forall a \in R)$
(vii) $a \cdot b = b \cdot a$ $(\forall a, b \in R)$
(viii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(\forall a, b, c \in R)$

<u>定義３</u> $(K, 0, 1, +, -, \cdot, {}^{-1})$ が［あるいは、K が］（可換）体 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

K: 集合
$0, 1 \in K$
$+ : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a + b$
$- : K \to K,\ a \mapsto -a$
$\cdot : K \times K \to K,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$
${}^{-1} : K \smallsetminus \{0\} \to K,\ a \mapsto a^{-1}$

であって、次の (i)–(x) が成立

(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(\forall a, b, c \in K)$
(ii) $a + 0 = 0 + a = a$ $(\forall a \in K)$

(iii) $a+(-a)=(-a)+a=0$ $(\forall a \in K)$
(iv) $a+b=b+a$ $(\forall a, b \in K)$
(v) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(\forall a, b, c \in K)$
(vi) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $(\forall a \in K)$
(vii) $a \cdot b = b \cdot a$ $(\forall a, b \in K)$
(viii) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(\forall a, b, c \in K)$
(ix) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ $(\forall a \in K \setminus \{0\})$
(x) $1 \neq 0$

定義４ $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、α 以下の整数で最大のものを $[\alpha]$ で表す。

定義５ 数列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ が循環（的）とは、ある $n_0, k \in \mathbb{Z}, n_0 \geq 0, k > 0$ が存在して、任意の $n \geq n_0$ に対し、$a_{n+k} = a_n$ となることをいう。このような k の中で最小のものを、循環数列 $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ の周期という。

定義６ n を整数であって平方数でない（$n = m^2, m \in \mathbb{Z}$ と表せない）ものとする。
(i) $F_n = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ を２次体という。$F_n \subset \mathbb{R}$ ($\iff n > 0$) のとき F_n を実２次体といい、$F_n \not\subset \mathbb{R}$ ($\iff n < 0$) のとき F_n を虚２次体という
(ii) $R_n = \{F_n$ の元で $\mathbb{Z}$ 係数モニック（最高次係数が 1）多項式の根となるもの全体$\}$ を２次体 F_n の整数環という。

定義７ 環 R の元 a が単元（可逆元）とは、ある $b \in R$ が存在して $ab = ba = 1$ となることをいう。R の単元全体の集合を $R^{\times}$ と記す。

レポート問題

★ 次の問題を α 問解いてレポートして下さい。ただし、$\alpha > 1$ とします。（問題数は必須問題 [Q∞] を含めて数えること。）
★ レポート提出期限以降に、KULASIS にてレポート問題の解答を掲載します。
★ ８月５日（水）にオフィスアワーを設けますので、講義やレポート問題に関連する質問等がある方は来て下さい。
★ ７月３０日（木）– ８月５日（水）の期間、本科目取りまとめ役の望月拓郎先生へのメールを通じて質問を受け付けます。

[Q1] 講義で導入した実数の小数展開のアルゴリズムでは、途中からずっと 9 が続くような無限小数が現れることはない。$0.999\ldots$ を例にとって、その理由を説明せよ。

[Q2] 有理数 $7/17$ の小数展開と連分数展開を求めよ。

[Q3] 実数 $\sqrt{7}$ の連分数展開を求めよ。また、実数 $\sqrt{17}$ の連分数展開を求めよ。

[Q4] 連分数 $[2015; \dot{7}, \dot{17}]$ を、$a + b\sqrt{n}$（$n \in \mathbb{Z},\ a, b \in \mathbb{Q}$）の形で表せ。

[Q5] ２次体の整数環 R_7 の基本単数を求めよ。（$R_7 = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ を用いてよい。）

[Q6] ２次体の整数環 R_{17} の基本単数を求めよ。（$R_{17} = \{a + b\sqrt{17} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ または $a, b \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}$ を用いてよい。）

[Q∞] （必須）講義やレポート問題に対する感想・意見などを書いて下さい。