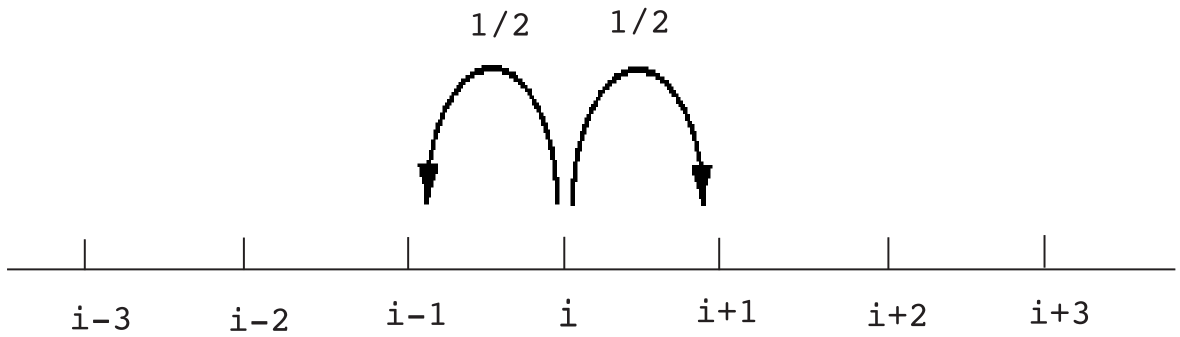
オープンコア講座

ランダムウォークと確率論

熊谷　隆（京都大学理学部数学教室）

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/



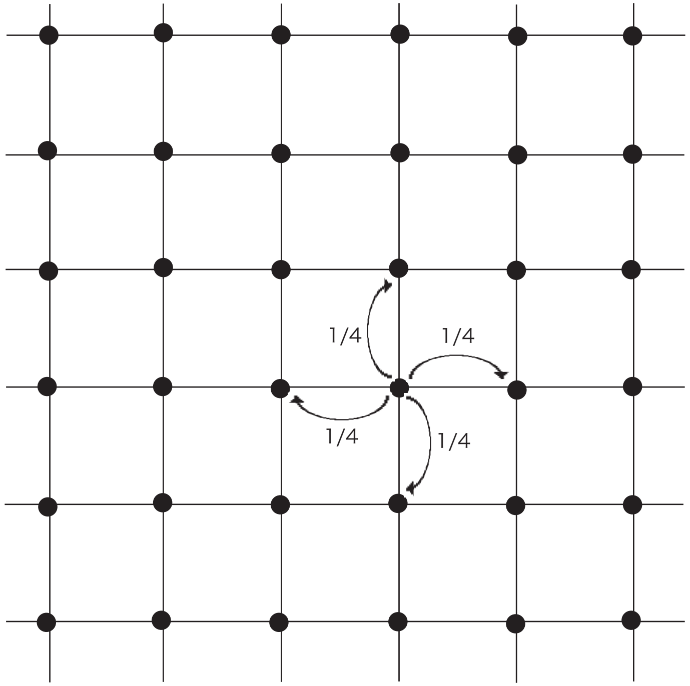
１。 D次元正方格子上のランダムウオーク

$\{X_i : i = 1, 2, 3, \cdots\}$を、　$P(X_i = 1) = 1/2,\ \ P(X_i = -1) = 1/2$　となる独立な確率変数とする。このとき

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とすると$\{S_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$は、時刻０では原点におり、１秒後に確率$1/2$で１歩右に、確率$1/2$で１歩左に動くようなランダムな動きをする。

　これを一次元シンプルランダムウォーク（酔歩）と呼ぶ。



D次元正方格子の上でも、シンプルランダムウオークを同様に定義できる。

例えば、二次元の場合、$P(X_i = (1,0)) = 1/4,\ P(X_i = (0,1)) = 1/4,$
$P(X_i = (-1,0)) = 1/4,\ P(X_i = (0,-1)) = 1/4$として、$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とするとよい。

（問い）このランダムウオークが時刻nで原点に戻る確率を求めよ。

さらにこの確率は、$n \to \infty$のときどのくらいのオーダーになるか？

〔答え〕時刻 n で粒子が原点にいる確率を u_n とする。$u_{2n+1}=0$ なので、u_{2n} を計算。

<u>$D=1$ の場合</u>

$$u_{2n}=\frac{1}{2^{2n}}{}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}$$

ここで $n!\sim\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$（スターリングの公式）を用いると

$$u_{2n}\sim\frac{\sqrt{4\pi n}e^{-2n}(2n)^{2n}}{2^{2n}(\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n)^2}=1/\sqrt{\pi n}$$

（注）$a_n\sim b_n$：　$\lim_{n\to\infty}a_n/b_n=1$ となること。

<u>$D=2$ の場合</u>

$$\begin{aligned}u_{2n}&=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\\&=\frac{1}{4^{2n}}{}_{2n}C_n\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,{}_nC_{n-k}=(\frac{1}{2^{2n}}{}_{2n}C_n)^2\sim\frac{1}{\pi n}\end{aligned}$$

$\underline{D=3 \text{の場合}}$

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{0\le j,k \\ j+k\le n}} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!}$$

となる。今度は計算は略すが、ある定数Mを使って$u_{2n} \sim M/n^{3/2}$となる。

$\underline{D \geq 4 \text{の場合}}$　ある定数M_Dを使って$u_{2n} \sim M_D/n^{D/2}$となることが知られている。

ところで、

●ある点から出発したランダムウオークが、確率１で有限時間内に元の点に戻ってくるとき、そのランダムウオークは再帰的という。

（問い２）D次元シンプルランダムウオークは、いつ再帰的か？

〔答え〕ここでは次の事実（証明は難しくはない）を認める。

m を粒子が原点に戻る回数の平均とすると、「再帰的」$\Leftrightarrow$「$m=\infty$」

今、$m=\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ だから、

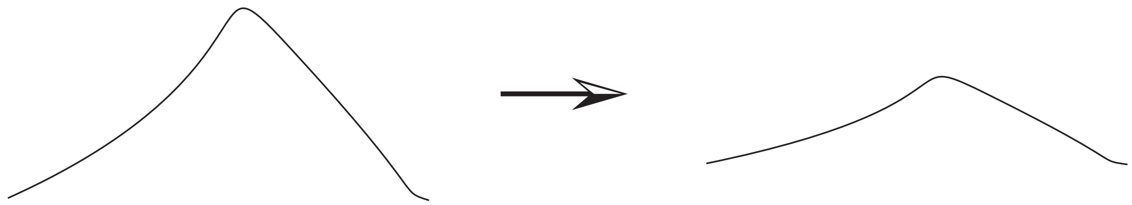
$D=1$ の場合、$m=\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} \asymp \sum_n 1/\sqrt{\pi n}=\infty$ となり、再帰的である。

$D=2$ の場合、$m \asymp \sum_n 1/(\pi n)=\infty$ となり、これも再帰的である。

$D \geq 3$ の場合、$m \leq \sum_n C_D/n^{D/2} < \infty$ となり、今度は非再帰的になる。

D 次元ランダムウオークの再帰性、非再帰性では、

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ の収束発散（$s>1$ のとき収束、$s \leq 1$ のとき発散）が鍵になっている。



● 熱伝導との関係

f を $\mathbb{R}^d$ 上の "よい" 関数とする。時刻 0 における温度分布が f で与えられたとき、時刻 t での点 x での温度を $u(t,x)$ とかくと、u は以下の熱方程式を満たす。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ \lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

以下、簡単のため一次元で話す。上の式を離散近似すると、

$$\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\{\frac{u(t,x+\Delta x)+u(t,x-\Delta x)-2u(t,x)}{(\Delta x)^2}\}$$

$\Delta t = \Delta x = 1$ として、$t = n$ とすると、

$$u(n+1,x)-u(n,x) = \frac{1}{2}\{u(n,x+1)+u(n,x-1)-2u(n,x)\} \qquad (*)$$

$$u(n+1,x)-u(n,x)=\frac{1}{2}\{u(n,x+1)+u(n,x-1)-2u(n,x)\} \qquad (*)$$

$(*)$ を、離散の熱方程式と呼ぶ。(もちろん、$u(0,x)=f(x)$ である。)

$$u(n,x)=E[f(x+S_n)]=\sum_{y\in\mathbb{Z}} f(y)P(x+S_n=y)$$

とおくと(E は平均を表す)、これは離散熱方程式の解である。

(証明)

$$\begin{aligned}
u(n+1,x) &= E[f(x+S_{n+1})] \\
&= E[f(x-1+\sum_{k=2}^{n+1}X_k):X_1=-1]+E[f(x+1+\sum_{k=2}^{n+1}X_k):X_1=1] \\
&= \frac{1}{2}E[f(x-1+\sum_{k=2}^{n+1}X_k)|X_1=-1]+\frac{1}{2}E[f(x+1+\sum_{k=2}^{n+1}X_k)|X_1=1] \\
&= \frac{1}{2}u(n,x-1)+\frac{1}{2}u(n,x+1)
\end{aligned}$$

— 時刻 n での温度分布は、x から出発した粒子の、時刻 n での f の値を平均したもの。

２。　確率空間と確率論

ところで、$\{X_i\}, P$ は、どのような空間の上に定義されており、どのような性質を持つものなのか？(そもそも、このような $\{X_i\}, P$ は、存在するのか？）

確率論の歴史（概略）

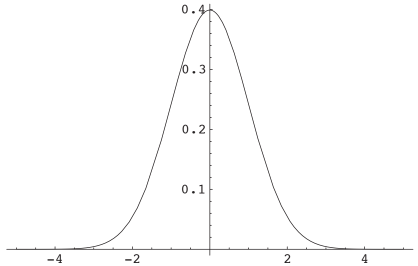
　中世：中断したギャンブルの掛け金の分配の仕方を計算したことから始まる

$\Rightarrow$ 順列・組み合わせを用いた思考ゲーム、また統計学の元となる学問が発展

$\Rightarrow$ 初等的枠組みで捉えるには限界が来る

$\Rightarrow$ ２０世紀初頭：ルベーグ積分の登場、そして測度論の発展（Kolmogorov など）

$\Rightarrow$ 様々な問題に応用されるに至る（統計力学、集団遺伝学、数理ファイナンスなど）



$\Omega = \Pi_{i=1}^{\infty}\{-1,1\}, \quad X_i : \Omega \to \{-1,1\}$ i番目の成分への射影

$\mathcal{F}$: Ωの部分集合で「測ることのできる集合」の集まり，　$P : \mathcal{F} \to [0,1]$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間

このような空間が存在するか？ $\to$ Yes.　（測度論を使うと分かる。）

さらに、例えば次のような定理を厳密に証明することが出来る。

- 大数の法則：$P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0) = 1$
- 中心極限定理：任意の実数$a < b$に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-\frac{x^2}{2})dx \quad \text{（正規分布）}$$

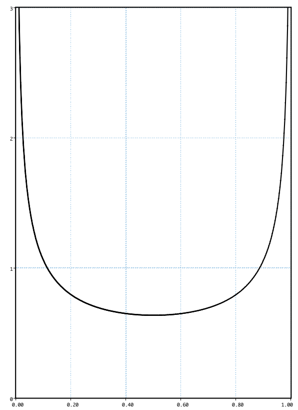
さらに、次のような定理まで厳密に証明することが出来る。

- 重複対数の法則：$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1) = 1$
  - S_n のオーダーに関するベストの結果

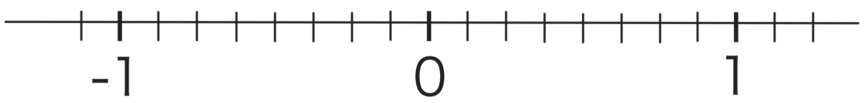
- 逆正弦定理： $A_n = (S_1, \cdots, S_n$のうち正であるものの個数$)$ とすると、

任意の $0 \le a \le b \le 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le \frac{A_n}{n} \le b) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\{\arcsin(\sqrt{b}) - \arcsin(\sqrt{a})\}$$



– 「儲かる者は、高い確率で儲かり続ける」（格差社会？）



３。　ブラウン運動とその性質

まず、自然数mに対して$2^{-m}\mathbb{Z}$上のシンプルランダムウオーク$\{2^{-m}S_n\}$を考える。

$m\to\infty$の極限として、実数上をランダムに動く粒子を作りたい。

しかし、$2^{-m}S_n$で、単に$m\to\infty$とすると粒子は動かなくなる。

そこで時間のスピードアップをする。

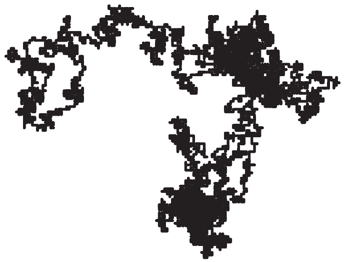
$2^{-1}S_n$が$\{-1,1\}$に着くのにかかる平均時間は？　$\to$　〔答え〕　$4\ (=2^2)$

$2^{-m}S_{[2^{2m}t]}$とすると、$\{-1,1\}$に着くのにかかる平均時間は1。

$$\boxed{m^{-1}S_{[m^2t]} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} B(t)\ \text{（実数上のブラウン運動）}}$$

＊一般にＤ次元のシンプルランダムウオークから、同様にＤ次元ブラウン運動を

作ることが出来る。



ブラウン運動の性質

(i) $B(0) = 0$ で、$t \mapsto B(t)$ は確率 1 で連続関数である。

(ii) 任意の $0 < T_1 < T_2 < T_3$ について、$B(T_2) - B(T_1)$ と $B(T_3) - B(T_2)$ は独立。

(iii) 任意の $a < b,\ T_1 < T_2$ に対して、

$$P(a < B(T_2) - B(T_1) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \int_a^b \exp(-\frac{x^2}{2(T_2 - T_1)})dx$$

(iv) $t \mapsto B(t)$ は、確率 1 ですべての t において微分不可能である。

注：実は (i),(ii), (iii) はブラウン運動の数学的定義である。

● 熱伝導との関係（簡単のため一次元で話す）

f を実数 $\mathbb{R}$ 上の（有界な）連続関数とする。

$$u(t,x) = E[f(x+B(t))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(y-x)^2}{2t})f(y)dy$$

とおくと、u は以下の熱方程式の解である。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

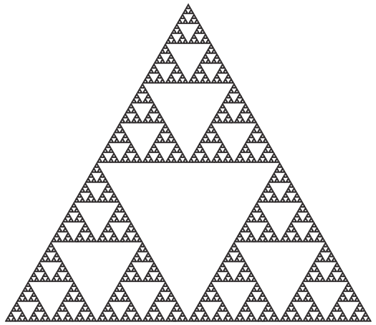
実際、$u_m(t,x) = E[f(x + m^{-1}S_{[m^2 t]})]$, $\Delta x = m^{-1}$, $\Delta t = m^{-2}$ とすると、$(*)$ と同様に

$$u_m(t+\Delta t, x) - u_m(t,x) = \frac{1}{2}(u_m(t, x+\Delta x) + u_m(t, x-\Delta x) - 2u_m(t,x))$$

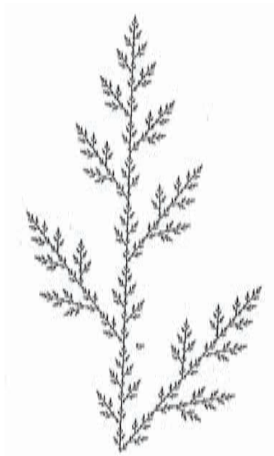
が成り立ち、$\Delta t = (\Delta x)^2$ なので

$$\frac{u_m(t+\Delta t, x) - u_m(t,x)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\{\frac{u_m(t, x+\Delta x) + u_m(t, x-\Delta x) - 2u_m(t,x)}{(\Delta x)^2}\}$$

を得る。最後に $\Delta t \to 0$ として、熱方程式を得る。



Sierpinski Gasket



Hata' s Tree-like set

D次元でも、以下で定めるuは熱方程式の解になる。

$$u(t,x) = E[f(x+B(t))] = \frac{1}{(2\pi t)^{D/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{\|y-x\|^2}{2t}) f(y) dy$$

ここで出てくる$t^{-D/2}$は、1節で計算した$u_{2n} \sim M_D n^{-D/2}$から来るものである。

- より「複雑な」空間の上でも、ランダムウオークの極限としてブラウン運動を定義し、その熱伝導等を解析することができる。

４。　確率解析とその応用

確率解析： “ブラウン運動を使った微分積分 ”

伊藤の公式： f を二階連続微分可能な関数とすると、

$$f(B(t)) - f(0) = \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds$$

もし $B(s)$ が、微分可能な関数なら、

$f(B(t)) - f(0) = \int_0^t f'(B(s))dB(s) = \int_0^t f'(B(s))B'(s)ds$ となるはず。

確率積分：リーマン積分やルベーグ積分の範ちゅうには入らない !!

標語的に言うと、「$ds = (dB(s))^2$」。

確率解析は幅広い応用がある。その一つ、「数理ファイナンス」

オプションの価格付けの問題

満期日（T とする）において、決められた行使価格（K 円とする）で、株を購入する権利（ヨーロッパ型コールオプション）の価格付け

簡単のため、市場に A 国の国債と B 社の株の二種類のみが出回っているとする。

国債、株の時刻 t での価格を、それぞれ U_t $(U_0 = 1)$、S_t $(S_0 = S)$ とし、

$$dU_t = rU_t dt, \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB(t))$$

を満たす（二式目は確率微分方程式）とすると、求めるオプションの価格は、

$$S\Phi(\frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}\Phi(\frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$

ただし $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$。これはブラック-ショールズの公式と呼ばれる。