

数理統計：レポート 1 略解

担当：熊谷 隆

1. i) $x' = (x - m)/\sqrt{2v}$ とすると $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2v}) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x'^2) dx'$ 。一方、
 $(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi [-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^\infty = \pi$
だから $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x'^2) dx' = 1$ となる。
ii) $m = m_1 + m_2, v = v_1 + v_2$ とする。

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_{m_1, v_1}(x - y) \rho_{m_2, v_2}(y) dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{v_1 v_2}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x - y - m_1)^2}{2v_1} - \frac{(y - m_2)^2}{2v_2}) dy \quad (1)$$

であり、指数の肩を y について平方完成すると

$$\frac{(x - y - m_1)^2}{2v_1} + \frac{(y - m_2)^2}{2v_2} = \frac{v(y - m_2 - v_2(x - m)/v)^2}{2v_1 v_2} + \frac{(x - m)^2}{2v}$$

だから、 $y' = \sqrt{v/(2v_1 v_2)}(y - m_2 - v_2(x - m)/v)$ とおくと、

$$(1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{v_1 v_2}} \exp(-\frac{(x - m)^2}{2v}) \int_{\mathbb{R}} e^{-y'^2} \sqrt{\frac{2v_1 v_2}{v}} dy' = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp(-\frac{(x - m)^2}{2v})$$

となり、結論を得る。

2. i) X を、ポアソン分布に従う確率変数とすると、

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \\ E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

よって $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda$ 。

ii) X を、指数分布に従う確率変数とすると、

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \\ E[X^2] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

よって $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1/\lambda^2$ 。

3。 $x' = (x - m)/\sqrt{2v}$ とすると、

$$\begin{aligned}
 (\text{平均}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2v}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{2v}x' + m) e^{-x'^2} dx' \\
 &= \sqrt{\frac{2v}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x' e^{-x'^2} dx' + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x'^2} dx' = m \\
 (\text{分散}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2v}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} 2vx'^2 e^{-x'^2} dx' \\
 &= \frac{v}{\sqrt{\pi}} \left([-x' e^{-x'^2}]_0^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-x'^2} dx' \right) = v
 \end{aligned}$$

なお、2行目の最後の不等号で、 $x'e^{-x'^2}$ が奇関数であることを用いた。

4。 (標本平均) $= \bar{X}_{10} = (29.0 + 27.4 + \cdots + 28.3)/10 = 28.24$ 。不偏分散の計算のため、 $Y_i = X_i - 28$ とすると、 $\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 1 + 0.36 + 0.04 + \cdots + 0.09 = 14.6$ 。今、

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X}_{10})^2 = \sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y}_{10})^2 = \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 - 10\bar{Y}_{10}^2 = 14.6 - 10 \times (28.24 - 28)^2 = 14.024$$

だから、(不偏分散) $= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X}_{10})^2 = 14.024/9 = 1.55822\cdots$ である。

5。 (標本平均) $= \bar{X}_{10} = (60 + 64 + \cdots + 71)/10 = 64.3$ である。また、標準正規分布に従う μ について、 $\mu([-a, a]) = 0.95$ を満たす a は (正規分布表から) 1.9600 であり、 $v = 9$ だから、求める信頼区間は

$$\left[\bar{X}_n - a\sqrt{\frac{v}{n}}, \bar{X}_n + a\sqrt{\frac{v}{n}} \right] = [62.4406, 66.1594]$$

である。